МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

АСИМПТОТИКИ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. Т. Туляганов

Пусть $f(n)$ — комплекснозначная мультипликативная арифметическая функция, $M_f(x)=\sum_{n\leqslant x} f(n)$. К нахождению асимптотики $M_f(x)$ приводят многие задачи теории чисел, причем для некоторых задач особенно важно получить асимптотику с оценкой остаточного члена.

Б. В. Левиным и А. С. Файнлейбом [1] получено асимптотическое разложение для $M_f(x)$. Файнлейб А. С. [2] показал, что существование другой мультипликативной функции $g(n)$, близкой к $f(n)$ в степенях простых, т. е. такой, что

$$\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)-g(p^r)|}{p^{r\lambda}} < \infty \qquad (0<\lambda<1),$$

для которой известна асимптотика $M_g(x)$ со степенным понижением, позволяет получить асимптотику $M_f(x)$ со степенным понижением. Требуя сходимости рядов

$$\sum_p \frac{|f(p)-\lambda|}{p}\log p\,(*), \qquad \sum_p \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}\log p^\alpha, \quad (**)$$

Й. П. Кубилюс [3] получил асимптотическую формулу для $M_f(x)$ с весьма точным остаточным членом. А. Лауринчикас [4] рассматривал более широкий класс функций. В [5, 6] для функций, по модулю не превосходящих единицы, сходимость ряда $(*)$ заменяется условием $\sum_{p\leqslant x} \frac{|f(p)-\lambda p^{i\chi}|}{p}\log p = o(\log x)$. Г. Халас [7], Э. Ман-

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1985

ставичюс [8], А. Мачюлис [9] изучали случаи, когда $f(p)$ «близки» к единице. В [10] автором для функций $f(n)$, ограниченных по модулю в среднем в простых числах

$$\sum_{p\leqslant x} |f(p)| \leqslant c_1 \frac{x}{\log x} \tag{1}$$

и в степенях простых, не слишком быстро растущих:

$$f(p^r) = O((2p)^{\gamma r}) \text{ при } r \geqslant 2 \ (\gamma < 1/2), \tag{2}$$

из условия

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)\log p}{p^{1+i\chi}} = \tau_f \log x + B + O(\eta(x)\log x) \tag{3}$$

и существования по модулю в среднем ограниченной последовательности $g(p)$, «близкой» к $f(p)p^{-ix}$ (в смысле (15)), такой, что

$$\sum_{p\leqslant x} g(p)\log p = \tau_g x + O(xh(x)), \tag{4}$$

была получена асимптотика $M_f(x)$ с оценкой остаточного члена. При этом предполагалось, что $1/\eta(x) \ll \log x$, и на параметр $y = y(x)$ налагалось ограничение $\exp \log^{\varepsilon} x < y \leqslant x$.

В настоящей заметке элементарным методом получена асимптотика $M_f(x)$ с оценкой остаточного члена для экспоненциально мультипликативных функций, удовлетворяющих условиям (1), (3), (4) при любых $\eta(x)$ и $h(x)$ (основная лемма). В примере теоремы 1 показано, как вычисляются остаточные члены для конкретных $\eta(x)$ и $h(x)$. Оказывается, исследовать асимптотику сумм экспоненциально-мультипликативных функций значительно проще. А когда получена асимптотика таких функций, переход к произвольным мультипликативным функциям не представляет трудности. Процедура этого перехода показана в доказательстве теоремы 2.

Такой прием позволяет избавиться от ограничений (2) на рост функции в степенях простых чисел и на параметр $y(x)$. Отметим, что теорема 2 дает асимптотику и тогда, когда ряд (**) расходится.

Введем следующие обозначения: $f(n) = f(n, x, \xi)$ — комплексная мультипликативная по n функция, зависящая от x и вещественного параметра ξ, принадлежащего некоторому множеству Ξ; $\chi = \chi(x, \xi)$ — вещественная константа; c — постоянная Эйлера; c_i — абсолютные кон-

станты, не зависящие от ξ; $\Gamma(\ldots)$ — гамма-функция Эйлера; $y = y(x)$; $t = \frac{\log x}{\log y}$; $z(t) = z(t, \tau)$ — непрерывное при $t > 0$ решение дифференциально-разностного уравнения $tz'(t) = \tau z(t-1)$ с начальным условием $z(t) = 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$; $m_1 = m_1(m, y)$ — произведение (с учетом кратности) простых делителей m, не превосходящих y; $m_2 = m_2(m, y) = m/m_1$; A_f — не зависящая от ξ константа, удовлетворяющая условию

$$\sum_{y<p\leqslant x} \frac{|f(p)|}{p} \leqslant A_f \log \frac{\log x}{\log y} + O(1)$$

для $2 \leqslant y \leqslant x$ (существование такого A_f следует из (1)); β зависит от $\eta(x)$, она равна единице, если $\eta(x) \log x$ ограничен, а если $\eta(x) \log x \to \infty$ при $x \to \infty$, то β выбирается удовлетворяющей условию $\eta(x) \ll \log^{-\beta} x$[1]); $f * g$ — арифметическая свертка Дирихле функций f и g;

$$S_f(x) = \sum_{p\leqslant x} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^r} \log p^r;$$

$$\prod_f^{\chi}(x) = \prod_{p\leqslant x} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{r(1+i\chi)}}\right);$$

$$\prod_f(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_f^0(x);$$

$$M_f^{\chi} = \frac{1}{\Gamma(\tau_f)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\tau_f} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{r(1+i\chi)}}\right);$$

$$\ln_k x = \underbrace{\log\log\ldots\log}_{k} x.$$

Мультипликативную функцию $f(n)$ называют экспоненциально-мультипликативной, если $f(p^r) = \frac{f^r(p)}{r!}$ для всех p' и r (см. [11]).

ЛЕММА 1. *Пусть* $f(n) = f(n, x, \xi)$ *и* $g(n) = g(n, x, \xi)$ — *экспоненциально-мультипликативные функции, удовлетворяющие условию* (1) *равномерно по* $\xi \in \Xi$.

---

[1]) Например, для $\eta(x) = (\log_2^A x) \log^{-b} x$ надо взять $\beta = b - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, если $A > 0$.

Тогда для $2 \leqslant y \leqslant x$ *справедлива оценка*

$$\sum_{n\leqslant x} |f(n_1)(f*g)(n_2)| \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \frac{x}{\log^{1-A_f} x} \exp \sum_{y<p\leqslant x} \frac{|f(p)+g(p)|}{p},$$

где $c_2 > 0$ *зависит только от* c_1.

Доказательство. Имеем

$$\sum_{n\leqslant x} |f(n_1)(f*g)(n_2)| \log n =$$

$$= \sum_{p^r\leqslant x} \log p^r \sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\equiv 0(p^r) \\ n\not\equiv 0(p^{r+1})}} |f(n_1)(f*g)(n_2)| =$$

$$= \sum_{n\leqslant x} |f(n_1)(f*g)(n_2)| \Big(\sum_{\substack{p^r\leqslant x/n \\ p\nmid n \\ p\leqslant y}} |f(p^r)| \log p^r +$$

$$+ \sum_{\substack{p^r\leqslant x/n \\ p>y \\ p\nmid n}} (f*g)(p^r) \,|\log p^r\Big). \qquad (5)$$

Далее, из (1) следует, что $|f(p)| \leqslant \frac{c_1 p}{\log p}$, $|g(p)| \leqslant \frac{c_1 p}{\log p}$, и поэтому

$$\sum_{\substack{p^r\leqslant x \\ p\leqslant y}} |f(p^r)| \log p^r \leqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant \frac{\log x}{\log 2}} \sum_{p\leqslant \sqrt[r]{x}} \frac{|f(p)|^r}{r!} \cdot$$

$$\cdot \log p^r \leqslant \sum_{r\leqslant \frac{\log x}{\log 2}} \frac{c_1^{r-1} x^{\frac{r-1}{r}}}{(r-1)!} \sum_{p\leqslant \sqrt[r]{x}} |f(p)| \leqslant$$

$$\leqslant x \sum_r \frac{c_1^r}{(r-1)!} \leqslant c_3 x, \qquad (6)$$

$$\sum_{\substack{p^r\leqslant x \\ p>y}} |(f*g)(p^r)| \log p^r \leqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant \frac{\log x}{\log y}} \sum_{y<p\leqslant \sqrt[r]{x}} \log p^r \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{|f(p)|^k}{k!} \frac{|g(p)|^{r-k}}{(r-k)!} + \frac{|g(p)|^r}{r!}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r\leqslant \frac{\log x}{\log y}} r c_1^{r-1} x^{\frac{r-1}{r}} \Big(\sum_{p\leqslant \sqrt[r]{x}} |f(p)| \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!\,(r-k)!} +$$

$$+ \frac{1}{r!} \sum_{p\leqslant \sqrt[r]{x}} |g(p)|\Big) \leqslant c_4 x. \qquad (7)$$

В (6) и (7), заменяя x на x/n, подставляя в (5) и учитывая, что операция $*$ сохраняет экспоненциальную мультипликативность, находим:

$$\sum_{n\leqslant x} |f(n_1)(f*g)(n_2)| \log n \leqslant$$
$$\leqslant c_5 x \prod_{p\leqslant y} e^{|f(p)|/p} \prod_{y<p\leqslant x} e^{|f(p)+g(p)|/p},$$

откуда суммированием по Абелю получим:

$$\sum_{n\leqslant x} |f(n_1)(f*g)(n_2)| \leqslant$$
$$\leqslant c_5 \frac{x}{\log x} \prod_{p\leqslant y} e^{|f(p)|/p} \prod_{y<p\leqslant x} e^{|f(p)+g(p)|/p}.$$

Из последнего соотношения согласно (1) и определению A_f следует утверждение леммы.

Для экспоненциально-мультипликативных функций, ограниченных в среднем в простых числах, можно исследовать асимптотику сумм значений с весом $1/n$ на числах с «малыми» простыми делителями. Для нашей цели достаточна следующая лемма, хотя ее можно улучшить.

ЛЕММА 2. *Пусть $f(n)$ удовлетворяет условию предыдущей леммы. Тогда при $2 \leqslant y \leqslant x$ имеет место соотношение*

$$\sum_{n_1\leqslant x} \frac{f(n_1)}{n_1} = \prod_{p\leqslant y} e^{\frac{f(p)}{p}} + O\left(\prod_{p\leqslant y} e^{\frac{|f(p)|}{p}} e^{-t}\right),$$

где константа под знаком O зависит только от c_1.

Доказательство. Для $\delta > 0$ имеем

$$\frac{1}{\Pi_{|f|}(y)} \sum_{n_1>x} \frac{|f(n_1)|}{n_1} \leqslant \frac{1}{\Pi_{|f|}(y)} \sum_{n_1>x} \frac{|f(n_1)|}{n_1} \left(\frac{n_1}{x}\right)^{\delta} \leqslant$$
$$\leqslant x^{-\delta} \prod_{p\leqslant y} e^{\frac{|f(p)|}{p}(p^{\delta}-1)} \leqslant c_6 x^{-\delta}.$$

Взяв $\delta = 1/\log y$, получаем утверждение леммы.

Следующая лемма является уточнением теоремы 5 [12] и леммы 6 [9] для экспоненциально-мультипликативных функций.

ЛЕММА 3. *Пусть экспоненциально-мультипликативная функция $f(n)$ удовлетворяет условиям* (1) *и* (3) *с $\chi = 0$ равномерно по $\xi \in \Xi$, где $\eta(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$. Тогда при $2 \leqslant y \leqslant x$*

справедливо представление

$$B(y^t, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_2 \leqslant y^t} \frac{f(n_2)}{n_2} = Z_f(t) + O(\eta(y)\rho_1(t)),$$

где

$$Z_f(t) = Z(t, \tau_f), \qquad \rho_1(t) = \frac{t^{A_f - \beta} - t^{\operatorname{Re}\tau_f}}{A_f - \operatorname{Re}\tau_f - \beta},$$

константа под знаком O зависит от c_1 и от константы в соотношении (3).

Доказательство. Для экспоненциально-мультипликативных функций имеет место (см. также [11, с. 422])

$$\sum_{n_2 \leqslant y^t} \frac{f(n_2)\log n_2}{n_2} = \sum_{n_2 \leqslant y^t} \frac{f(n_2)}{n_2} \sum_{y < p \leqslant \frac{y^t}{n_2}} \frac{f(p)\log p}{p}.$$

Подставляя вместо внутренней суммы асимптотику из (3) аналогично [12, с. 1081], находим

$$\sum_{n_2 \leqslant y^t} \frac{f(n_2)}{n_2} \log n_2 = \sum_{n_2 \leqslant y^{t-1}} \frac{f(n_2)}{n_2} \left(\int_y^{y^t/n_2} \tau_f \frac{du}{u} + \right.$$

$$\left. + O(\eta(y)\log y) + O\left(\eta\left(\frac{y^t}{n_2}\right) \ln \frac{y^t}{n_2}\right)\right) =$$

$$= \tau_f \int_y^{y^t} B\left(\frac{y^t}{u}, y\right) \frac{du}{u} + O(t^{1-\beta}\eta(y)\log y) \frac{\prod_{|f|}(y^t)}{\prod_{|f|}(y)}.$$

Преобразуя левую часть этого соотношения суммированием по Абелю и учитывая, что $\prod_{|f|}(y^t) \Big/ \prod_{|f|}(y) = O(t^{A_f})$, получим приближенное интегральное уравнение

$$tB(y^t, y) - \int_0^t B(y^u, y)\,du - \tau_f \int_0^{t-1} B(y^u, y)\,du = O(t^{A+1-\beta}\eta(y)).$$

Полагая в нем $B(y^t, y) = z_f(t) + r(t, y)$, имеем $r(t, y) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$; а при $t \geqslant 1$ имеем

$$tr(t, y) - \int_0^t r(u, y)\,du - \tau_f \int_0^{t-1} r(u, y)\,du = O(t^{A_f+1-\beta}\eta(y)). \tag{8}$$

Отсюда

$$t|r(t, y)| \leqslant (|\tau_f| + 1) \int_1^t |r(u, y)|\,du + O(t^{A_f+1-\beta}\eta(y)).$$

Последнее соотношение делим на $t^{|\tau_f|+2}$ и интегрируем по t в промежутке $[1, t]$. Тогда получаем

$$\frac{1}{t^{|\tau_f|+1}}\int_1^t |r(u, y)|\,du = O\left(\int_1^t \eta(y)\, t^{A_f-|\tau_f|-1-\beta}\,dt\right) =$$

$$= O\left(\eta(y)\frac{t^{A_f-|\tau_f|-\beta}-1}{A_f-|\tau_f|-\beta}\right).$$

Подставляя это в предыдущее неравенство, имеем

$$r(t, y) = O(\eta(y))\frac{t^{A_f-\beta}-t^{|\tau_f|}}{A_f-|\tau_f|-\beta}. \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) находим

$$tr(t, y) - (\tau_f+1)\int_1^t r(u, y)\,du = O(t^{A_f+1-\beta}\eta(y)).$$

Теперь, повторяя вышепроведенные процедуры для $r(t, y)$, получим оценку, отличающуюся от (9) тем, что вместо $|\tau_f|$, будет стоять $\operatorname{Re}\tau_f$, что утверждалось в лемме.

ЛЕММА 4. *Пусть $g(n) = g(n;\ \xi)$ — комплексная экспоненциально-мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям* (1) *и* (4) *равномерно по $\xi \in \Xi$, где $h(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$. Тогда при $t \geqslant 1$*

$$\Delta(y^t, y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n_2 \leqslant y^t} g(n_2) =$$

$$= 1 + \int_1^t y^u z_g'(u)\,du + O\left(\frac{y^t}{\log y}h(y)\,\rho_2(t)\right), \tag{10}$$

где

$$\rho_2(u) = \frac{u^{A_g-1}-u^{\operatorname{Re}\tau_g-1}}{A_g-\operatorname{Re}\tau_g}.$$

Доказательство. Как упоминалось в доказательстве предыдущей леммы, для экспоненциально-мультипликативных функций справедливо равенство

$$\sum_{n_2 \leqslant y^t} g(n_2)\log n_2 = \sum_{n_2 \leqslant y^{t-1}} g(n_2)\sum_{y<p\leqslant y^t/n} g(p)\log p.$$

Отсюда согласно (4), как и выше, находим

$$ty^{-t}\Delta(y^t, y) - \int_0^t y^{-t}\Delta(y^u, y)\,du - \tau_g\int_0^{t-1} y^{-u}\Delta(y^u, y)\,du =$$

$$= O\left(\frac{t^{A_g}h(y)}{\log y}\right).$$

Решая это уравнение аналогично лемме 3 итерационным методом, получим (10).

Лемма 4 является уточнением теоремы 4 [12] для экспоненциально-мультипликативных функций.

ЛЕММА 5 (основная). *Пусть $f(n)$ — комплексная экспоненциально-мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям* (1), (3) *с* $\chi = 0$ *равномерно по* $\xi \in \Xi$, *а* $g(p) = g(p, x, \xi)$ — *последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям* (1) *и* (4) *равномерно по* $\xi \in \Xi$, *где* $\eta(x)$ *и* $h(x)$ *монотонно стремятся к нулю при* $x \to \infty$ *так, что* $\int_2^\infty \eta(u)\, \mathrm{d} \ln_2 u$ *сходится. Тогда равномерно по* $\xi \in \Xi$

$$M_f(y^t) = M_f^0 y^t (\log^{\tau_f - 1} y^t)\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln y} + \int_y^\infty \eta(y) \frac{\mathrm{d} \log u}{\log u}\right)\right) +$$
$$+ O(y^t \log^{A_f - 1} y)(t^{\operatorname{Re} \tau_f - 2} + t^{\operatorname{Re}(\tau_f + \tau_g) - 1} +$$
$$+ t^{A_f} h(y) \sup_{1 \leqslant u \leqslant t} \rho_2(t) + \frac{1}{t} \exp \sum_{y < p < yt} \frac{|f(p) + g(p)|}{p} +$$
$$+ \eta(y) \sup_{1 \leqslant u \leqslant t} \rho_1(u) \frac{t^{\operatorname{Re} \tau_g - 1} - 1}{\operatorname{Re} \tau_g - 1}\Bigg).$$

Доказательство. Последовательность $g(p)$ доопределим до мультипликативной функции $g(n)$ условием $g(p^r) = \frac{g^r(p)}{r!}$ при $r \geqslant 2$. Тогда, воспользовавшись леммами 4 и 1, так же как в [10], находим

$$\sum_{n \leqslant y^t} f(n) = -\sum_{n_1 \leqslant y^t} f(n_1) \int_0^{t - \ln n_1 / \ln y} y^{t - u - \ln n_1 / \ln y} \cdot$$
$$\cdot \sum_{k_2 \leqslant y^{t-u-1/n_1}} \frac{f(k_2)}{k_2} Z_g'\left(t - u - \frac{\ln n_1 k_2}{\ln y}\right) \mathrm{d}u +$$
$$+ O(y^t (\ln^{A_f - 1} y)\, h(y)\, t^{A_f} \sup_{1 \leqslant u \leqslant t} \rho_2(u)) +$$
$$+ O\left(\frac{y^t \ln^{A_f - 1} y}{t} \exp \sum_{y < p \leqslant yt} \frac{|f(p) + g(p)|}{p}\right). \qquad (11)$$

Далее, из леммы 3 следует (см. [10], с. 29])

$$\sum_{k_2 \leqslant y^{v-1}} \frac{f(k_2)}{k_2} Z_g'\left(v - \frac{\ln k_2}{\ln y}\right) =$$
$$= Z_{f*g}'(v) - Z_f'(v) + O(\eta(y)) \int_1^v \rho_1(u) Z_g''(v - u)\, \mathrm{d}u,$$

где

$$Z_{f*g}(t) = Z(t, \tau_f + \tau_g).$$

Вычислим I — главный член соотношения (11). Подставляя найденное выражение вместо подынтегральной суммы, пользуясь суммированием по Абелю и оценками для $Z'(t)$, $Z''(t)$ (см. [10, лемма 4]), находим:

$$I = \int_0^t y^{t-u} \sum_{n_1 \leqslant y^{t-u}} \frac{f(n_1)}{n_1} \left(Z_f' \left(t - u - \frac{\ln n_1}{\ln y} \right) - \right.$$

$$\left. - Z_{f*g}' \left(t - u - \frac{\ln n_1}{\ln y} \right) \right) du + O(y^t) \int_0^{t-1} y^{-u} \sum_{n_1 \leqslant y^{t-u}} \frac{|f(n_1)|}{n_1}$$

$$\cdot \left(\int_1^{t-u-\frac{\ln n_1}{\ln y}} (\eta(y) \rho_1(v)) \left| Z_g'' \left(t - u - \frac{\ln n_1}{\ln y} - v \right) \right| dv\, du \right) =$$

$$= \int_0^t y^{t-u} (Z_f'(t-u) - Z_{f*g}'(t-u)) \sum_{n_1 \leqslant y^{t-u-1}} \frac{f(n_1)}{n_1} du -$$

$$- \int_0^{t-1} y^{t-u} \int_1^{t-u} \sum_{t-u-v < n_1 < y^{t-u-1}} \frac{f(n_1)}{n_1} (Z_f''(v) -$$

$$- Z_{f*g}''(v)) du\, dv +$$

$$+ O\left(\frac{y^t \prod_{|f|}(y)}{\log y} \eta(y) \sup_{1 \leqslant v \leqslant t} \rho_1(v) \frac{1 - t^{\operatorname{Re} \tau_g - 1}}{1 - \operatorname{Re} \tau_g} \right).$$

Теперь согласно лемме 2 и неравенству $\prod_{|f|}(y) \ll \log^{A_f} y$, а также из леммы 4 [9], для производных $Z'(t)$, $Z''(t)$ получаем

$$I = \prod_f (y) \int_1^t y^u Z_f'(u)\, du +$$

$$+ O\left(y^t \log^{A_f} y \int_0^{t-1} y^{-u} \left[(t-u)^{\operatorname{Re} \tau_f - 1} e^{-(t-u-1)} + \right.\right.$$

$$+ (t-u)^{\operatorname{Re}(\tau_f + \tau_g) - 1} + \int_0^{t-u-1} e^{-v} ((t-u-v)^{\operatorname{Re} \tau_f - 2} +$$

$$\left.\left. + (t-u-v)^{\operatorname{Re}(\tau_f + \tau_g) - 2}) dv \right] du \right) + O(\ldots) =$$

$$= \frac{y^t e^{-c\tau_f} \prod_f (y)}{\Gamma(\tau_f) \log y} t^{\tau_f - 1} + O(y^t \log^{A_f - 1} y) \left(t^{\operatorname{Re} \tau_f - 2} + \right.$$

$$\left. + t^{\operatorname{Re}(\tau_f + \tau_g) - 1} + \eta(y) \sup_{1 \leqslant u \leqslant t} \rho_1(u) \frac{t^{\operatorname{Re} \tau_g - 1} - 1}{\operatorname{Re} \tau_g - 1} \right). \qquad (12)$$

Далее, ввиду (1), (3) и экспоненциальной мультипликативности $f(n)$, находим

$$\prod_{y<p\leqslant x}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau_f}=$$
$$=\exp\left(\sum_{y<p\leqslant x}\frac{f(p)-\tau_f}{p}+O\left(\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1+|f(p)|^2}{p^2}\right)\right)=$$
$$=1+O\left(\frac{1}{\log y}+\sum_{y}^{\infty}\eta(u)\frac{\mathrm{d}\ln u}{\log u}\right),$$

так как

$$\sum_{y<p}\frac{|f(p)|^2}{p^2}=O\left(\frac{1}{\log y}\right).$$

Отсюда и из формулы Мертенса [13, с. 94] следует, что

$$\frac{\mathrm{e}^{-c\tau_f}\prod_f(y)}{\Gamma(\tau_f)}=M_f^0\log^{\tau_f}y\left(1+O\left(\frac{1}{\log y}+\int_y^{\infty}\eta(u)\frac{\mathrm{d}\ln u}{\ln u}\right)\right). \tag{13}$$

Для завершения доказательства леммы остается подставить (13) в (12) и полученный результат — в (11).

Для конкретных $\eta(x)$ и $h(x)$, аналогично [10] [1]), выбрав в основной лемме параметр y оптимальным образом, получим соответствующие остаточные члены. Мы ограничиваемся одним случаем.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть комплексная экспоненциально мультипликативная функция $f(n)$ и последовательность $g(p)$ удовлетворяют условиям* (1) *и соответственно* (3) *и* (4), *причем* $\eta(x)=h(x)=\log_2^{-b}x$ $(b>1)$, $\operatorname{Re}\tau_g\leqslant 1$ *и*

$$\sum_{y<p\leqslant x}\frac{|f(p)p^{-i\chi}+g(p)|}{p}\leqslant\alpha\log t+O(1), \tag{14}$$

где α — не зависящая от ξ константа, $0\leqslant\alpha<A_f$. Тогда

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)=M_f^{\chi}\frac{x^{1+i\chi}}{1+i\chi}\log^{\tau_f-1}x\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2^{b-1}x}\right)\right)+$$
$$+O\left(x\log^{A_f-1}x\left(\frac{\log_3 x}{\log_2^b x}\right)^{1-(1+\delta)/(A_f+d+\delta)}\right),$$

---

[1]) В основной лемме статьи [10] имеется опечатка, в последнем остаточном члене соотношения (7) пропущен множитель t^{A_f}.

где $\delta = \max(0, \quad A_g - 1)$, $d = 1 - \sup_{\xi \in \Xi} \{\operatorname{Re} \tau_f - 1, \operatorname{Re}(\tau_f + \tau_g), \ \alpha\}$.

Доказательство. По определению, в рассматриваемом случае $\beta = 0$. Далее, так как $\alpha < A_f$, то одновременно не может быть «мало» и $\operatorname{Re} \tau_g - 1$, и $A_f - \operatorname{Re} \tau_f$, поэтому

$$\frac{t^{\operatorname{Re} \tau_g - 1} - 1}{\operatorname{Re} \tau_g - 1} \cdot \frac{t^{\operatorname{Re} \tau_f - A_f} - 1}{\operatorname{Re} \tau_f - A_f} = O(\log t).$$

Учитывая эти замечания, в силу основной леммы находим

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n^{i\alpha}} = M_f^x x \log^{\tau_f - 1} x \left(1 + O\left(\frac{1}{\log_2^{b-1} y}\right)\right) + \\ + O(x \log^{A_f - 1} y)\left(\frac{1}{t^d} + \frac{t^{A_f + \delta} \log t}{\log_2^b y}\right).$$

Отсюда, взяв $t = (\log_2^b x / \log_3 x)^{1/(A_f + d + \delta)}$, затем применяя суммирование по Абелю, получим утверждение теоремы.

Теперь от экспоненциально-мультипликативных функций переходим к произвольным мультипликативным функциям.

Теорема 2. *Пусть мультипликативная функция $f(n)$ и последовательность $g(p)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, за исключением экспоненциальной мультипликативности, и пусть для всех p $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \cdot |f(p^r)|}{p^r} < \infty$ равномерно по $\xi \in \Xi$. Тогда*

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \frac{1}{\Gamma(\tau_f)} \frac{x^{1+i\chi}}{1+i\chi} \frac{\Pi_f(x)}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log_2^{b-1} x}\right)\right) + \\ + O(x)\left(\log^{\operatorname{Re} \tau_f - 1} x \left(\frac{1}{\log_2^{b-1} x} + \frac{S_{|f_1|}(x)}{\log x}\right) + \right. \\ + \log^{A_f - 1} x \left(\frac{\log_3 x}{\log_2^b x}\right)^{1-(1+\delta)/(A_f + d + \delta)} \left(1 + \frac{S_{|f_1|}(x)}{\log x}\right) + \\ \left. + \left(\log^{\max(\operatorname{Re} \tau_f, 1) - 1} x\right) \frac{S_{|f_1|}(x)}{\log x}\right) \Pi_{|f_1|}(x), \qquad (15)$$

где $f_1(n)$ — мультипликативная функция,

$$f_1(p^r) = \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k f^k(p)}{k!} f(p^{r-k}),$$

δ и d те же, что и в теореме 1.

Доказательство. Из $f(n)$ образуем экспоненциально-мультипликативную функцию $f_0(n)$, взяв $f_0(p^r) = \frac{f^r(p)}{r!}$. Она удовлетворяет условиям теоремы 1, согласно которой

$$M_{f_0}(x) = M_{f_0}^{\chi} \frac{x^{1+i\chi}}{1+i\chi} \log^{\tau_f - 1} x + O(x\varepsilon(x)), \tag{16}$$

где

$$\varepsilon(x) = \frac{\log^{\operatorname{Re}\tau_f - 1} x}{\log_2^{b-1} x} + (\log^{A_f - 1} x)\left(\frac{\log_3 x}{\log_2^b x}\right)^{1-(1+\delta)/(A_f+d+\delta)}. \tag{17}$$

Далее, введем мультипликативную функцию $f_1(n)$ с помощью свертки Дирихле $f(n) = (f_1 * f_0)(n)$. Тогда имеем

$$M_f(x) = \sum_{n \leqslant x} f_1(n) M_{f_0}\left(\frac{x}{n}\right) =$$

$$= M_{f_0}^{\chi} \frac{x^{1+i\chi}}{1+i\chi} \log^{\tau_f - 1} x \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{f_1(n)}{n^{1+i\chi}} \left(1 + O\left(\frac{\ln n}{\ln x}\right)\right) +$$

$$+ O(x)\left(\sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{|f_1(n)|}{n} \varepsilon\left(\frac{x}{n}\right) +\right.$$

$$\left. + \sum_{\sqrt{x} \leqslant n \leqslant x} \frac{|f_1(n)|}{n} \left(\log^{\max(\operatorname{Re}\tau_f, 1)-1} \frac{x}{n} + \varepsilon_1\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right), \tag{18}$$

где

$$\varepsilon_1(x) = \max(1, \varepsilon(x)). \tag{19}$$

Заметим, что для каждого $p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p)|^r}{(r-1)!\, p^r} < \infty$, и из условия $\sum_r \frac{r|f(p^r)|}{p^r} < \infty$ следует сходимость ряда $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r|f_1(p^r)|}{p^r}$ для всех p. Кроме того, в соотношении (18) $\varepsilon(x/n)$, $\varepsilon_1(x/n)$ и $\log^{\max(\operatorname{Re}\tau_f, 1)-1} x/n$ можно заменить соответственно на $\varepsilon(x)$, $\varepsilon_1(x)$ и $(\log x)^{\max(\operatorname{Re}\tau_f, 1)-1} x$.

Учитывая, что

$$\sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{f_1(n)}{n^{1+i\chi}} = \prod_{f_1}^{\chi}(x) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log x} \sum_{\substack{n > \sqrt{x} \\ p/n \to p \leqslant x}} \frac{|f_1(n)|}{n} \log n\right) =$$

$$= \prod_{f_1}^{\chi}(x) + O\left(\frac{1}{\log x} S_{|f_1|}(x) \prod_{|f_1|}(x)\right),$$

$$M_{f_0}^{\chi}\cdot\prod_{f_1}^{\chi}(x)=\frac{1}{\Gamma(\tau_f)}\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau_f}\left(1+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+i\chi)}}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2^{b-1}x}\right)\right),$$

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{|f_1(n)|}{n}=O\left(\prod_{|f_1|}(x)\right)$$

и суммы

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{|f_1(n)|}{n}\frac{\log n}{\log x},\quad\sum_{\sqrt{x}<n\leqslant x}\frac{|f_1(n)|}{n}$$

не превосходят $\frac{2}{\log x}S_{|f_1|}(x)\prod_{|f_1|}(x)$, находим

$$M_f(x)=\frac{x^{1+i\chi}\log^{\tau_f-1}x}{\Gamma(\tau_f)(1+i\chi)}\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\tau_f}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+i\chi)}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2^{b-1}x}\right)\right)+O(x)\left(\varepsilon(x)+\frac{S_{|f_1|}(x)}{\log x}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\log^{\max(\operatorname{Re}\tau_f,\,1)-1}x+\varepsilon_1(x)\right)\right)\prod_{|f_1|}(x).$$

Подставляя вместо $\varepsilon(x)$ и $\varepsilon_1(x)$ их выражения из (17) и (19), получаем доказательство теоремы 2.

Следствие. *Если для мультипликативной функции $f(n)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, кроме экспоненциальной мультипликативности, ряд $\sum_{p,\,r\geqslant 2}\frac{|f(p^r)|}{p^r}\log p^r$ сходится, то утверждение теоремы 1 остается в силе.*

Чтобы найти асимптотику суммы функции с другими $\eta(x)$ и $h(x)$, сначала с помощью основной леммы получим асимптотику суммы соответствующей экспоненциально-мультипликативной функции, затем применим процедуру из доказательства теоремы 2.

Институт математики АН УзССР
им. В. И. Романовского

Поступило
06.06.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Левин Б. В., Файнлейб А. С. Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел.— Успехи мат. наук, 1967, т. 22, вып. 3, с. 119—197.

[2] Файнлейб А. С. Некоторые асимптотические формулы для сумм мультипликативных функций и их приложения.— Литов. мат. сб., 1968, т. VII, № 3, с. 535—545.

[3] Кубилюс Й. П. Метод производящих рядов Дирихле в теории распределения аддитивных арифметических функций. I.— Литов. мат. сб., 1971, т. XI, № 2, с. 261—273.
[4] Лауринчикас А. Большие уклонения арифметических функций.— Литов. мат. сб., 1976, т. XVI, № 1, с. 159—171.
[5] Манставичюс Э. Применение метода производящих рядов Дирихле в теории распределения значений арифметических функций.— Литов. мат. сб., 1974, т. XIV, № 1, с. 99—111.
[6] Крижюс З. А. Среднее значение мультипликативных функций.— Литов. мат. сб., 1980, т. XX, № 2, с. 69—78.
[7] Halasz G. On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions.— Studia Sci. Math. Hungar., 1971, v. 6, p. 211—233.
[8] Манставичюс Э. Суммы мультипликативных функций и предельные теоремы в вероятностной теории чисел. I.— Литов. мат. сб., 1979, т. XIX, № 2, с. 135—151.
[9] Мачюлис А. Применение сумм мультипликативных функций к изучению больших уклонений.— Литов. мат. сб., 1983, т. XXIII, № 2, с. 127—139.
[10] Туляганов С. Т. Оценка остаточных членов теорем о суммировании мультипликативных функций. — Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1977, № 6, с. 25—33.
[11] Wirsing E. Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen.— Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1967, v. 18, p. 411—467.
[12] Левин Б. В., Файнлейб А. С. Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1970, т. 34, с. 1064—1109.
[13] Прахар К. Распределение простых чисел.— М.: Мир, 1967.