И. В. Павлов, Контрпример к гипотезе о плотности H^∞ в пространстве BMO, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1980, том 25, выпуск 1, 154–157

ON THE CONDITIONAL DISRTIBUTIONS OF THE DEGENERATE DIFFUSION PROCESSES

B. L. ROZOVSKIĬ (MOSCOW)

(*Summary*)

Existence of a density $\pi_{t,s} = \mathrm{P}\{x_t \in dx \mid y_\tau, \tau \leqslant s\}/dx$, $s \leqslant t$, for a degenerate multidimensional diffusion process (x, y) as well as the analitical properties of $\pi_{t,s}$ and the filtering equations for $\pi_{t,t}$ are considered.

КОНТРПРИМЕР К ГИПОТЕЗЕ О ПЛОТНОСТИ H^∞ В ПРОСТРАНСТВЕ ВМО

И. В. ПАВЛОВ

В работе К. Деллашери, П. А. Мейера и М. Йора [1] высказана гипотеза о том, что пространство H^∞, состоящее из таких мартингалов X, что $[X, X]_\infty \in L^\infty$, плотно в ВМО в метрике пространства ВМО (см. [1], стр. 113). Ниже будет построен пример, который опровергает эту гипотезу.

Мы воспользуемся следующей характеристикой пространства ВМО для дискретного времени (см. [2], теорема VIII — 3—14 и следствие VIII — 3—19): пространство ВМО совпадает с множеством мартингалов $\{Y_n, n \in N\}$, которые допускают представление в виде

$$Y_n = \mathrm{E}[Y \mid \mathscr{F}_n], \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}[Z_n \mid \mathscr{F}_n], \tag{1}$$

где последовательность $\{Z_n, 0 \leqslant n \leqslant \infty\}$ такова, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |Z_n| \in L^\infty$ (суммирование производится, включая $+\infty$), и для которых существуют две такие положительные постоянные c_1, c_2, что

$$c_2 \min \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} |Z_n| \Big\|_{L^\infty} \leqslant \|Y\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant c_1 \min \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} |Z_n| \Big\|_{L^\infty} \tag{2}$$

(минимум в правой части берется по всем возможным представлениям мартингала Y и этот минимум всегда достигается).

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ вместе с возрастающим семейством σ-алгебр $(\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, причем $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\infty = \bigvee\limits_{n \geqslant 0} \mathscr{F}_n$. Предположим, что поток имеет следующую структуру:

$$\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\},$$

$\mathscr{F}_n$ порождена разбиением Ω на атомы $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, при переходе от n к $n+1$ атом $B_n \in \mathscr{F}_n$ дробится на две части A_{n+1} и B_{n+1}, а остальные атомы остаются без изменения. Положим $A_\infty = B_\infty = \bigcap\limits_n B_n$, $A_0 = \varnothing$, $B_0 = \Omega$. Обозначим $\mathrm{P}(A_k) = p_k$, $\mathrm{P}(B_1) = r_k$ и предположим, что $p_k > 0$, $r_k > 0$ для всякого $k \geqslant 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$. В дальнейших вычислениях мы будем также считать, что в выражениях вида $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}$ суммирование производится, включая индекс $+\infty$. Так же, как и в [1], мы будем часто отождествлять мартингал $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, \mathrm{P}\}$ со случайной величиной $Y = Y_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$.

Пусть $Y \in \mathrm{BMO}$. Так как случайная величина Y измерима относительно $\mathcal{F}$, ее можно представить в виде суммы

$$Y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m I_{A_m}, \tag{3}$$

где a_m — действительное число, I_{A_m} — индикатор множества A_m. В силу (1) каждая такая случайная величина Y может быть представлена с помощью последовательности $\mathcal{F}$-измеримых случайных величин $\{Z_n,\ 0 \leqslant n \leqslant \infty\}$. Пусть $Z_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} I_{A_k}$. Применим условие (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Z_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} |b_k^{(n)}|\Bigr) I_{A_k} \in L^\infty.$$

Следовательно,

$$c = \sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |b_k^{(n)}| < \infty. \tag{4}$$

Далее, имеем:

$$\mathrm{E}[Z_n | \mathcal{F}_n] = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} I_{A_k} + I_{B_n} r_n^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{(n)} p_k,$$

и легко вычислить, что

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}[Z_n | \mathcal{F}_n] = \sum_{m=0}^{\infty} \Bigl[\sum_{n=m}^{\infty} b_m^{(n)} + \sum_{n=0}^{m-1} \Bigl(r_n^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{(n)} p_k\Bigr)\Bigr] I_{A_m}.$$

Сопоставляя с (3), получаем: для всякого m $(1 \leqslant m < \infty)$

$$a_m = \sum_{n=m}^{\infty} b_m^{(n)} + \sum_{n=0}^{m-1} \Bigl(r_n^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{(n)} p_k\Bigr).$$

Запишем эту систему равенств в следующем виде:

$$a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_1^{(n)} + r_0^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(0)} p_k,$$

$$a_{m+1} - a_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} b_{m+1}^{(n)} - \sum_{n=m}^{\infty} b_m^{(n)} + r_m^{-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k^{(m)} p_k. \tag{5}$$

В силу (4) получим, что для всех m

$$|a_{m+1} - a_m| \leqslant c + c + r_m^{-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} c p_k = 3c. \tag{6}$$

Введем обозначение $\|Y\|^* = \sup_{0 \leqslant m < \infty} |a_{m+1} - a_m|$ $(a_0 = 0)$.

Предложение 1. *Для любого* $Y \in \mathrm{BMO}$ *справедливо неравенство*

$$\|Y\|^* \leqslant \frac{3}{c_2} \|Y\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно взять такие $b_i^{(j)}$, при которых в правой части (2) реализуется минимум, и применить (2) и (6).

Следующее предложение дает оценку, обратную (7).

Предложение 2. *Если последовательность* $r_m p_{m+1}^{-1}$ *ограничена, то для любого* $Y \in \mathrm{BMO}$

$$\|Y\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant c_1 \sup_m (r_m p_{m+1}^{-1}) \|Y\|^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $b_{m+1}^{(m)} = r_m p_{m+1}^{-1} (a_{m+1} - a_m)$ и $b_j^{(i)} = 0$ при $j \neq i + 1$. Очевидно, такой набор $(b_j^{(i)})$ удовлетворяет (5), причем, в силу ограниченности $r_m p_{m+1}^{-1}$, условие (4) соблюдено. Имеем:

$$\|Y\|_{BMO} \leqslant c_1 \sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |b_k^{(n)}| \leqslant c_1 \sup_m (r_m p_{m+1}^{-1}) \|Y\|^*.$$

Следствие. *Если $r_m p_{m+1}^{-1}$ ограничена, то в пространстве ВМО нормы $\|\cdot\|_{BMO}$ и $\|\cdot\|^*$ эквивалентны.*

В дальнейшем мы будем предполагать, что $r_m p_{m+1}^{-1} < K < \infty$.

Замечание. Теорема 10 из [1] утверждает, что если L и ВМО не совпадают, то L^∞ незамкнуто и неплотно в ВМО (по норме $\|\cdot\|_{BMO}$). В нашем случае можно легко показать, что мартингал $Y = \sum_{m=0}^{\infty} m I_{A_m}$ принадлежит ВМО, но не принадлежит замыканию L^∞ в ВМО. Мартингал же $Y = \sum_{m=1}^{\infty} (\ln m) I_{A_m}$ принадлежит замыканию L^∞ в ВМО, но не принадлежит L^∞.

Приступим теперь к доказательству того, что H^∞ неплотно в ВМО. Предположим дополнительно, что $r_{k+1}^{-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} r_m < M < \infty$ (можно, например, положить $r_n = 2^{-n}$). Нетрудно вычислить $[Y, Y]_\infty$:

$$[Y, Y]_\infty = Y_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (Y_{n+1} - Y_n)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m p_m^2 +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} I_{A_{n+1}} \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} (p_{k+1} r_k^{-1})^2 \Big[a_{k+1} - r_{k+1}^{-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} a_m p_m\Big]^2 +$$
$$+ (r_{n+1} r_n^{-1})^2 \Big[a_{n+1} - r_{n+1}^{-1} \sum_{m=n+2}^{\infty} a_m p_m\Big]^2\Big\}.$$

Для выполнения условия $Y \in H^\infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_n \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} (p_{k+1} r_k^{-1})^2 \Big[a_{k+1} - r_{k+1}^{-1} \sum_{m=k+2}^{\infty} a_m p_m\Big]^2 + (r_{n+1} r_n^{-1})^2 \Big[a_{n+1} - r_{n+1}^{-1} \sum_{m=n+2}^{\infty} a_m p_m\Big]^2\Big\} < \infty. \tag{8}$$

Элемент $\overline{Y} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m I_{A_m}$ принадлежит L^∞. Легко показать, что он не входит в H^∞. Докажем, что $\overline{Y}$ нельзя приблизить в пространстве ВМО элементами из H^∞.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $Y' = \sum_{m=1}^{\infty} a_m I_{A_m}$ — элемент из ВМО, лежащий в шаре радиуса ε с центром в $\overline{Y}$. Докажем, что $Y' \notin H^\infty$ при достаточно малом ε. Имеем:

$$\sup_n |(a_{n+1} - (-1)^{n+1}) - (a_n - (-1)^n)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $|a_{n+1} - a_n + 2(-1)^n| < \varepsilon$ для всякого n, т. е.

$$2 - \varepsilon < a_{n+1} - a_n < 2 + \varepsilon, \quad \text{если } n \text{ нечетно},$$
$$-2 - \varepsilon < a_{n+1} - a_n < -2 + \varepsilon, \quad \text{если } n \text{ четно}.$$

Предположим, что k нечетно. Имеем:

$$a_{k+1} - r_{k+1}^{-1} \sum_{m=k+2}^{\infty} a_m p_m = \sum_{i=1}^{\infty} (a_{k+2i-1} - a_{k+2i}) r_{k+2i-1} r_{k+1}^{-1} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty} (a_{k+2i} - a_{k+2i+1}) r_{k+2i} r_{k+1}^{-1} > (2 - \varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} r_{k+2i-1} r_{k+1}^{-1} - (2 + \varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} r_{k+2i} r_{k+1}^{-1} =$$
$$= 2 \sum_{i=1}^{\infty} p_{k+2i} r_{k+1}^{-1} - \varepsilon r_{k+1}^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} r_{k+i} > 2 p_{k+1} r_{k+1}^{-1} - \varepsilon r_{k+1}^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} r_{k+i} > \frac{2}{K} - \varepsilon M.$$

Отсюда видно, что если ε достаточно мало, то неравенство (8) не выполняется, т. е. $Y' \notin H^\infty$.

Поступила в редакцию 14.9.78

ЛИТЕРАТУРА

[1] **C. Dellacherie, P. A. Meyer, M. Yor,** Sur certaines proprietes des espaces de Banach H'et BMO, Sem. Probab. XII, Lect. Motes Math., 649, 1978, 98—113.

[2] **J. Neveu,** Discrete-parameter martingales, Morth — Holland Publ. Comp., 1975.

A COUNTEREXAMPLE TO THE HYPOTHESIS ON THE H^∞ TO BE DENSE IN THE SPACE BMO

I. V. PAVLOV (Rostov-na-Donu)

(*Summary*)

In the probability space $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ we consider a discrete increasing family of σ-fields $(\mathscr{F}_n)$ satisfying special conditions. By means of the norm (which is equivalent to that of the space BMO of martingales) we obtain an example of a martingale which belongs to BMO but cannot be approximated (in the BMO-norm) by elements of H^∞.

О СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВА МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ НЕПРЕРЫВНЫМ СТРОГО МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССАМ

М. НИКУНЕН

Рассмотрим последовательность $X^n = (X_t^n, \mathrm{P}_x^n)$ непрерывных однородных марковских процессов в r-мерном евклидовом пространстве E. Обозначим $C^r[0, T]$ пространство всех непрерывных функций, определенных на $[0, T]$ и принимающих значения из E. Далее, обозначим через μ_x^n меру на $C^r[0, T]$, соответствующую процессу (X_t^n, P_x^n) с начальным значением $X_0^n = x$.

Нас интересуют условия, при которых семейство мер $Q_x = \{\mu_x^n\colon n \leqslant 1\}$ будет слабо компактным для любого $x \in E$.

Предположим, что процесс $X^n = (X_t^n, \mathrm{P}_x^n)$ задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t^n = \sigma^n(X_t^n)\, dW_t + b^n(X_t^n)\, dt,$$

где W_t — r-мерный винеровский процесс и функции $\sigma^n(x)$ и $b^n(x)$ удовлетворяют условиям существования и единственности. Допустим, что существует такое $K > 0$, что для всех $x \in E$, $n \geqslant 1$

$$\| \sigma^n(x) \| + | b^n(x) | \leqslant K(1 + | x |). \tag{1}$$

Тогда для любого $x \in E$ семейство мер Q_x слабо компактно ([3], §, гл. III).

В этой заметке приводится достаточное условие для слабой компактности семейств Q_x в терминах переходных функций процессов X^n. В одномерном случае выводится другой критерий в терминах коэффициентов производящих операторов процессов X^n.

Пусть $X = (X_t, \mathrm{P}_x)$ — непрерывный необрывающийся однородный марковский процесс в E. Обозначим $P(t, x, \Gamma)$ переходную функцию процесса X. Введем следую-