

## ФРИДБЕРГОВЫ НУМЕРАЦИИ В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА<sup>\*)</sup>

С. С. ОСПИЧЕВ

### Введение

Работа посвящена исследованию однозначных вычислимых нумераций в иерархии Ершова. Интерес к таким нумерациям вызван тем, что вычислимая однозначная нумерация является (с точностью до эквивалентности) минимальным элементом полурешётки вычислимых нумераций данного семейства множеств. Впервые исследование подобных нумераций предпринял Р. Фридберг, который показал наличие у семейства всех вычислимо перечислимых множеств однозначной вычислимой нумерации [1]. Позднее было показано существование  $\Sigma_n^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерации для семейства всех  $\Sigma_n^{-1}$ -множеств [2].

Здесь данный результат обобщается на все конструктивные ординалы, а также исследуются различные свойства полученных нумераций.

### § 1. Основные определения

Перейдём к непосредственному описанию иерархии Ершова (общие определения и основные факты представлены в [3]. Мы используем представление множеств иерархии Ершова, лишь незначительно отличающееся от приведённого в книге К. Эша и Дж. Найт [4].

---

<sup>\*)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-00376, и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ, проект НШ-860.2014.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Для всех  $a \in \mathcal{O}$  (здесь и далее  $\mathcal{O}$  — клиниевская система обозначений ординалов) множество  $A$  является  $\Sigma_a^{-1}$ -множеством (принадлежит классу  $\Sigma_a^{-1}$  иерархии Ершова), если существуют вычислимая функция  $f(x, s)$  и частично вычислимая функция  $g(x, s)$ , такие что для всех  $x \in \omega$  выполняются условия

- (1)  $A(x) = \lim_s f(x, s)$ ,  $f(x, 0) = 0$ ;
- (2)  $g(x, s) \downarrow \rightarrow g(x, s+1) \downarrow \leq_o g(x, s) <_o a$ ;
- (3)  $f(x, s) \neq f(x, s+1) \rightarrow g(x, s+1) \downarrow \neq g(x, s)$ .

Пару  $\langle f, g \rangle$  будем называть  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимацией множества  $A$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество  $A$  является  $\Pi_a^{-1}$ -множеством, если в условиях предыдущего определения требование  $f(x, 0) = 0$  изменить на  $f(x, 0) = 1$ . Множество  $A$  является  $\Delta_a^{-1}$ -множеством, если требование  $f(x, 0) = 0$  заменить на требование о том, что  $g(x, 0)$  определена.

Отметим: если множество  $A$  принадлежит  $\Sigma_a^{-1}$ , то его дополнение  $\bar{A}$  принадлежит  $\Pi_a^{-1}$ , а любое множество из класса  $\Delta_a^{-1}$  принадлежит как  $\Sigma_a^{-1}$ , так и  $\Pi_a^{-1}$ .

Определённую выше  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимацию  $\langle f, g \rangle$  множества  $A$  можно усилить, добавив некоторые свойства для функций  $f$  и  $g$ .

Определим функцию чётности  $e(a)$  для  $a \in \mathcal{O}$  следующим образом:  $e(a) = 0$ , если  $a$  — обозначение чётного или предельного ординала, и  $e(a) = 1$ , если  $a$  — обозначение нечётного ординала.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.** Если множество  $A$  обладает  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимацией  $\langle \phi, \psi \rangle$ , то  $A$  обладает  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимацией  $\langle f, g \rangle$  с заданными свойствами:

*правильная чётность, т. е.*

если  $f(x, s) = 0$ , то  $e(g(x, s)) = e(a)$  или  $g(x, s)$  не определена,

если  $f(x, s) = 1$ , то  $e(g(x, s)) = 1 - e(a)$ ;

*замедление, т. е.*

$f(x, s) = 0$  для любого  $s \in \omega$  и любого  $x > s$ ,

$g(x, s)$  не определена для любого  $s \in \omega$  и любого  $x > s$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правильная чётность. Пусть  $f(x, s) = \phi(x, s)$

для всех  $x, s \in \omega$ .

(1) Если  $\psi(x, s)$  не определена, то  $g(x, s)$  также не определена.

(2) Если  $\psi(x, s)$  определена, то

(2.1) если  $\psi(x, s) = b$ , где  $a = 2^b$  ( $|a|_{\mathcal{O}}$  — последовательность  $|b|_{\mathcal{O}}$ ), то

(2.1.1) если  $\phi(x, s) = 0$ , то  $g(x, s)$  не определена (т. е. ещё не было сделано ни одного изменения);

(2.1.2) если  $\phi(x, s) = 1$ , то  $g(x, s) = \psi(x, s)$ ;

(2.2) если  $e(\psi(x, s)) \neq e(a)$  и  $\psi(x, s) \neq b$ , то

(2.2.1)  $\phi(x, s) = 0 \Rightarrow g(x, s) = c$ , где  $|c|_{\mathcal{O}}$  — последовательность  $|\psi(x, s)|_{\mathcal{O}}$ ;

(2.2.2)  $\phi(x, s) = 1 \Rightarrow g(x, s) = \psi(x, s)$ ;

(2.3) если  $e(\psi(x, s)) = e(a)$  и  $\psi(x, s) \neq b$ , то

(2.3.1)  $\phi(x, s) = 1 \Rightarrow g(x, s) = c$ , где  $|c|_{\mathcal{O}}$  — последовательность  $|\psi(x, s)|_{\mathcal{O}}$ ;

(2.3.2)  $\phi(x, s) = 0 \Rightarrow g(x, s) = \psi(x, s)$ .

Замедление. Для всех  $x, s \in \omega$  полагаем:

(1) если  $x \leq s$ , то  $f(x, s) = \phi(x, s)$ ,  $g(x, s) = \psi(x, s)$ ;

(2) если  $x > s$ , то  $f(x, s) = 0$ , а  $g(x, s)$  не определена.  $\square$

Свойство правильной чётности позволяет утверждать: если при построении любого множества на некотором шаге  $s$  для элемента  $x$  сделано максимальное число изменений (т. е.  $g(x, s) = 0$ ), то мы точно знаем, попадает ли этот элемент во множество (конкретнее,  $f(x, s) = e(a)$ ). Свойство замедления позволяет рассматривать на каждом шаге  $s$  только изменения первых  $s$  элементов. В дальнейшем все данные  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимации будут пониматься как  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимации правильной чётности с замедлением.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** Будем говорить, что множество  $A$  *m-сводится* к множеству  $B$  ( $A \leq_m B$ ), если существует вычислимая функция  $f$ , такая что для любого  $x \in \omega$  справедливо  $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ .

Отметим: при  $A \leq_m B$  из того, что  $B$  принадлежит некоторому классу иерархии Ершова, следует, что  $A$  принадлежит тому же классу иерархии Ершова.

Перейдём к определению вычислимой нумерации. Будем использовать понятие обобщённой вычислимости, заданное в [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Нумерация  $\{\nu_n\}_{n \in \omega}$  (далее  $\nu$ ) является  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой, если существуют вычислимая функция  $f(n, x, s)$  и частично вычислимая функция  $g(n, x, s)$ , такие что для любых  $x, n$  выполняются условия

- (1)  $\{\nu_n\}(x) = \lim_s f(n, x, s)$ ,  $f(n, x, 0) = 0$ ;
- (2)  $g(n, x, s) \downarrow \rightarrow g(n, x, s+1) \downarrow \leq_o g(n, x, s) <_o a$ ;
- (3)  $f(n, x, s) \neq f(n, x, s+1) \rightarrow g(n, x, s+1) \downarrow \neq g(n, x, s)$ .

Аналогично определению 1.1 пару  $\langle f, g \rangle$  будем называть  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимацией нумерации  $\nu$ .

Подобным образом вводятся определения  $\Pi_a^{-1}$ - и  $\Delta_a^{-1}$ -вычислимых нумераций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Будем говорить, что нумерация  $\alpha$  сводится к нумерации  $\beta$  ( $\alpha \leq \beta$ ), если существует вычислимая функция  $f$ , такая что  $\alpha_n = \beta_{f(n)}$  для любого  $n$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Нумерацию  $\eta$  будем называть *фридберговой*, если  $\eta_n \neq \eta_m$  для любых  $n \neq m$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Нумерацию  $\nu$  будем называть *позитивной* (*разрешимой*), если множество  $\{\langle x, y \rangle \mid \nu_x = \nu_y\}$  является вычислимо перечислимым (вычислимым).

Отметим, что всякая фридбергова нумерация является разрешимой, а значит и позитивной.

## § 2. Основной результат

Приступим к построению фридберговой нумерации семейства всех  $\Sigma_a^{-1}$ -множеств.

**ТЕОРЕМА 2.1** (С. С. Гончаров, С. Лемпп, Д. Р. Соломон [2]). *Для любого  $n > 0$  существует  $\Sigma_n^{-1}$ -вычислимая фридбергова нумерация семейства всех  $\Sigma_n^{-1}$ -множеств.*

Здесь и далее для ординалов, соответствующих натуральным числам, будем использовать их естественные обозначения.

Приведённый результат можно некоторым образом распространить на все конструктивные ординалы.

Пусть  $A$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -множество, такое что при  $e(a) = 0$  множество  $A$  не является конечным, а при  $e(a) = 1$  множество  $A$  не является коконечным. Пусть  $\langle \xi^1, \xi^2 \rangle$  — его  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимация. Определим семейство  $\mathcal{T}$  следующим образом:

- (1)  $\{A, A \cup \{0\}, A \cup \{0, 1\}, \dots\}$ , если  $e(a) = 1$ ;
- (2)  $\{A, A \setminus \{0\}, A \setminus \{0, 1\}, \dots\}$ , если  $e(a) = 0$ .

В дальнейшем при доказательстве основных результатов будем использовать фридбергову нумерацию некоторого подсемейства семейства  $\mathcal{T}$  с дополнительными свойствами. Покажем, что подобная нумерация существует.

**ЛЕММА 2.2.** *Существует  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимая фридбергова нумерация  $\gamma$  некоторого подсемейства семейства  $\mathcal{T}$ , такая что*

*для любых  $n_1 < n_2$  выполняется*

*$\{0, 1, \dots, n_1\} \subset \gamma_{n_1} \subset \gamma_{n_2}$ , если  $e(a) = 1$ , и*

*$\gamma_{n_2} \subset \gamma_{n_1} \subset \overline{\{0, 1, \dots, n_1\}}$ , если  $e(a) = 0$ ;*

*для любого  $n$  существует единственное  $s'$ , такое что  $\rho(n, x, s') \neq \rho(n, x, s' + 1)$  для любого  $x \leq n$  (точнее,  $\rho(n, x, s)$  не определена для  $s \leq s'$ , а затем  $\rho(n, x, s) = 0$ ). Отметим также, что  $s' \leq n$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\langle \xi^1, \xi^2 \rangle$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимация множества  $A$ . Построим  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимацию  $\langle \delta, \rho \rangle$  нумерации  $\gamma$ .

Положим  $\delta(0, x, s) = \xi^1(x, s)$  и  $\rho(0, x, s) = \xi^2(x, s)$  для любых  $x, s \in \omega$ ;  $\delta(n, 0, 0) = 0$  и  $\rho(n, 0, 0)$  не определена для всех  $n > 0$ . В дальнейшем, если какие-либо комбинации  $(n, x, s)$  не упомянуты, для них полагаем  $\delta(n, x, s + 1) = \delta(n, x, s)$ ,  $\rho(n, x, s + 1) = \rho(n, x, s)$ .

Рекурсией по  $s$  определяем функции  $\delta, \rho$  и вспомогательную функцию  $k$ .

(1) Шаг  $s = 1$ . Полагаем  $k(1, 1) = 0$ ,  $\delta(1, 0, 1) = e(a)$ ,  $\rho(1, 0, 1) = 0$ , для всех  $x > 0$  полагаем  $\delta(1, x, 1) = \xi^1(x, 1)$ ,  $\rho(1, x, 1) = \xi^2(x, 1)$ .

(2) Шаг  $s + 1$ .

(2.1) Для всех  $n \leq s$  в порядке возрастания:

(2.1.1) если для некоторого  $n' < n$  верно  $\delta(n', x, s) = \delta(n, x, s)$  при всех  $x \leq s$ , то полагаем  $k(n, s+1) = k(n, s) + 1$ , иначе  $k(n, s+1) = k(n, s)$ ;

(2.1.2) для всех  $x < k(n, s+1)$  полагаем  $\delta(n, x, s+1) = e(a)$ ,  $\rho(n, x, s+1) = 0$ , для  $x \geq k(n, s+1)$  полагаем  $\delta(n, x, s+1) = \xi^1(x, s+1)$ ,  $\rho(n, x, s+1) = \xi^2(x, s+1)$ ;

(2.2) полагаем  $k(s+1, s+1) = k(s, s+1) + 1$ ; полагаем  $\delta(n, x, s+1) = e(a)$  и  $\rho(n, x, s+1) = 0$  для всех  $x < k(s+1, s+1)$ ;  $\delta(n, x, s+1) = \xi^1(x, s)$  и  $\rho(n, x, s+1) = \xi^2(x, s+1)$  для  $x \geq k(s+1, s+1)$ .

Переходим к следующему  $s$ .

Нумерация  $\gamma$  построена.  $\square$

Пусть, наконец,  $\mathcal{S}$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимое семейство, включающее в себя семейство  $\mathcal{T}$  и множество  $\omega$ , если  $e(a) = 1$ , или пустое множество, если  $e(a) = 0$ .

**ТЕОРЕМА 2.3.** *Для любого обозначения ненулевого ординала  $a \in \mathcal{O}$  существует  $\Sigma_a^{-1}$ -вычисляемая фридбергова нумерация семейства  $\mathcal{S}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\alpha$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -вычисляемая нумерация семейства  $\mathcal{S}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\alpha_0 = \emptyset$  в случае, если  $a$  обозначает чётный ординал, и  $\alpha_0 = \omega$ , если нечётный. Будем строить  $\Sigma_a^{-1}$ -вычисляемую фридбергову нумерацию  $\beta$  семейства  $\mathcal{S}$ , а также  $\emptyset'$ -частично вычисляемую функцию  $h$  (аппроксимируемую частично вычислимыми функциями  $h_s$ ), используя нумерацию  $\gamma$  из леммы 2.2. Пусть  $\langle \phi, \psi \rangle$  — это  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимация нумерации  $\alpha$ ,  $\langle \delta, \rho \rangle$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимация нумерации  $\gamma$ . Построим аппроксимацию  $\langle f, g \rangle$  нумерации  $\beta$ .

**Требования к конструкции.**

- (1) Если  $\alpha_n = \alpha_{n'}$  для некоторого  $n' < n$ , то  $h(n)$  не определено.
- (2) Если  $\alpha_n \neq \alpha_{n'}$  для всех  $n' < n$ , то либо  $h(n)$  определено и  $\alpha_n = \beta_{h(n)}$ , либо  $\alpha_n = \gamma_x$  для некоторого  $x$  и существует  $m \in \omega \setminus \text{range}(h)$  с условием  $\alpha_n = \beta_m$ .
- (3) Любое множество  $\beta_m$ ,  $m \notin \text{range}(h)$ , совпадает с  $\gamma_y$  для некоторого  $y$ .
- (4) Для любого  $y$  существует единственное  $m$ , такое что  $\beta_m = \gamma_y$ .

**Конструкция нумерации  $\beta$ .**

Шаг  $s = 0$ . Определим:

$f(n, x, 0) = 0$  и  $g(n, x, 0) \uparrow$  для всех натуральных  $n, x$ ;

$f(0, x, s) = e(a)$  и  $g(0, x, s) = 0$  для любого  $x$  и  $s > 0$ ;

$h(0) = h_0(0) = 0$  и  $h_0(n) \uparrow$  для любого  $n > 0$ .

Шаг  $s + 1$ . Для каждого  $n \leq s$  последовательно выполняем следующие действия.

( $s + 1.1$ ) Если  $h_s(n)$  определено и для некоторого числа  $n' < n$  выполняется

$$\phi(n', x, s) = \phi(n, x, s) \text{ при всех } x \in [0, h_s(n) + 1],$$

то полагаем значение  $h_{s+1}(n)$  неопределённым.

( $s + 1.2$ ) Если  $h_s(n)$  определено,  $n > 0$  и для некоторых чисел  $s' < s$  и  $m \in \text{range}(h_{s'}) \setminus \text{range}(h_s)$  выполняется

$$f(m, x, s) = f(h_s(n), x, s) \text{ для всех } x \in [0, h_s(n) + 1],$$

то полагаем значение  $h_{s+1}(n)$  неопределённым.

( $s + 1.3$ ) Если значение  $h_s(n)$  определено, а  $h_{s+1}(n)$  стало неопределённым в результате действий ( $s + 1.1$ ) и ( $s + 1.2$ ), то для каждого такого числа  $n$  (в порядке возрастания) полагаем

$$f(h_s(n), x, s') = \delta(y, x, s' + y), \quad g(h_s(n), x, s') = \rho(y, x, s' + y)$$

для всех  $s' > s$ , где  $y$  — некоторое натуральное число, большее любого числа, упомянутого ранее в конструкции.

( $s + 1.4$ ) Если значение  $h_s(n)$  не определено для  $n \leq s$ , то для каждого такого  $n$  (в порядке возрастания  $n$ ) полагаем  $h_{s+1}(n)$  равным наименьшему  $m$ , не лежащему в  $\bigcup_{s' \leq s} \text{range}(h_{s'})$  и отличному от значения  $h_{s+1}(n')$  для всех  $n' < n$ .

( $s + 1.5$ ) Если  $h_s(n)$  определено, а  $h_{s+1}(n)$  не стало неопределённым в результате действий ( $s + 1.1$ ) или ( $s + 1.2$ ), то полагаем  $h_{s+1}(n) = h_s(n)$ .

( $s + 1.6$ ) Если  $h_{s+1}(n)$  определено, то полагаем  $f(h_{s+1}(n), x, s + 1) = \phi(n, x, s + 1)$  и  $g(h_{s+1}(n), x, s + 1) = \psi(n, x, s + 1)$  для всех  $x \in \omega$ .

Покажем, что все сформулированные выше требования выполняются.

(1) В силу  $(s + 1.1)$ , если  $\alpha_n = \alpha_{n'}$  для некоторого  $n' < n$ , то значение  $h_s(n)$  не определено для бесконечно многих шагов  $s$ .

(2) Если  $\alpha_n \neq \alpha_{n'}$  для всех  $n' < n$ , то значение  $h(n)$  становится неопределённым за счёт  $(s + 1.1)$  не более, чем конечное число раз. Если значение  $h(n)$  становится неопределённым за счёт  $(s + 1.2)$  для одного и того же числа  $m$  бесконечно часто, то  $\alpha_n = \beta_m = \gamma_y$  для некоторого  $y$ , как и требовалось. Если же допустить, что значение  $h(n)$  становится неопределённым за счёт  $(s + 1.2)$  бесконечно часто для бесконечного числа  $m$ , то  $\phi(n, x, s) = f(h_s(n), x, s) = \delta(y, x, s)$  для всё больших  $y$ . Отсюда  $\phi(n, x, s) = e(a)$  для любого  $x$  и  $\alpha_n = \omega$ , если  $e(a) = 1$ , и  $\alpha_n = \emptyset$ , если  $e(a) = 0$ . Тогда  $\alpha_n$  совпадает с  $\alpha_0$ , и для  $\alpha_n$  не требуется искать место в нумерации  $\beta$ .

(3) Это требование выполняется в силу  $(s + 1.4)$ .

(4) Рассмотрим некоторое  $y$ . В силу  $(s + 1.2)$  и  $(s + 1.4)$  существует самое большее одно число  $m$ , для которого  $\beta_m = \gamma_y$ . Выберем наименьшее  $n$ , такое что  $\alpha_n = \gamma_y$ . Тогда либо  $h(n)$  определено и  $\beta_{h(n)} = \gamma_y$ , либо, как и в (2), можно показать существование такого числа  $m$ , что  $\beta_m = \gamma_y$ .

Таким образом, все требования выполнены. Покажем, что полученная нумерация является  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой.

(1) Функция  $f$  на любом наборе  $(n, x, s)$  вычисляется за конечное число шагов, а значит является вычислимой.

(2) Для любого натурального  $m$ , построение  $\beta_m$  совпадает с построением  $\alpha_n$  до некоторого шага  $s$ , затем, возможно, происходит переход к нумерации  $\gamma_y$  для некоторых натуральных  $n, y$ . Если перехода не происходит, то  $f(m, x, s) = \phi(n, x, s)$ ,  $g(m, x, s) = \psi(n, x, s)$ , а значит  $\beta = \Sigma_a^{-1}$ -вычислимая. Если же переход будет происходить, то для всех  $s \leq s'$  выполняются  $f(m, x, s) = \phi(n, x, s)$  и  $g(m, x, s) = \psi(n, x, s)$ , а для  $s' < s$  выполняются  $f(m, x, s) = \delta(y, x, s + y)$  и  $g(m, x, s) = \rho(y, x, s + y)$ . В силу свойств замедления и правильной чётности для нумерации  $\alpha$ , а также

выбора  $y$  и свойств нумерации  $\gamma$  справедливы соотношения

$$\phi(n, x, s') \neq \delta(y, x, s' + 1 + y) \Rightarrow \rho(y, x, s' + 1 + y) <_o \psi(n, x, s'),$$

$$\phi(n, x, s') = \delta(y, x, s' + 1 + y) \Rightarrow \rho(y, x, s' + 1 + y) \leq_o \psi(n, x, s'),$$

а значит свойства  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимации также сохраняются.  $\square$

Семейство всех  $\Sigma_a^{-1}$ -множеств удовлетворяет условиям теоремы ( $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимость семейства всех  $\Sigma_a^{-1}$ -множеств доказана, напр., в [6], а в качестве семейства  $\mathcal{T}$  можно взять семейство всех начальных отрезков или семейство их дополнений).

**СЛЕДСТВИЕ 2.4.** *Для любого обозначения ненулевого ординала  $a \in \mathcal{O}$  семейство всех  $\Sigma_a^{-1}$ -множеств обладает  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерацией.*

Возьмём множество  $\Xi_a^{-1}$  ( $m$ -универсальное множество для класса  $\Sigma_a^{-1}$ , см. подробнее в [3]) для построения нумерации  $\gamma$ , а также  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимое семейство  $S$ , включающее  $\mathcal{T}$ , такое что любое множество  $A \in S$  является  $\Sigma_a^{-1}$ -собственным (т. е.  $A \in \Sigma_a^{-1}$ , но  $A \notin \Sigma_b^{-1}$  для любого  $b <_o a$ ). Согласно доказанной теореме семейство  $S$  обладает  $\Sigma_a^{-1}$ -фридберговой нумерацией, однако не обладает  $\Sigma_b^{-1}$ -вычислимой нумерацией ни для одного  $b <_o a$ .

Обратимся к другим большим семействам — семейству всех  $\Pi_a^{-1}$ -множеств и семейству всех  $\Delta_a^{-1}$ -множеств.

Семейство всех  $\Pi_a^{-1}$ -множеств состоит из дополнений всех элементов класса  $\Sigma_a^{-1}$ , значит в качестве  $\Pi_a^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерации семейства всех  $\Pi_a^{-1}$ -множеств можно выбрать нумерацию  $\beta'_x = \overline{\beta_x}$ , где  $\beta$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимая фридбергова нумерация семейства всех  $\Sigma_a^{-1}$ -множеств.

С семейством всех  $\Delta_a^{-1}$ -множеств дело обстоит несколько сложнее.

### § 3. Семейство всех $\Delta_a^{-1}$ -множеств

Чтобы построить фридбергову нумерацию семейства всех  $\Delta_a^{-1}$ -множеств, используя конструкцию основного результата, нам необходима вы-

числимая нумерация семейства всех  $\Delta_a^{-1}$ -множеств и подходящее дополнительное семейство  $T$ .

В качестве  $T$  можно взять семейство, построенное на множестве  $\omega$ , если  $e(a) = 1$ , или множестве  $\emptyset$ , если  $e(a) = 0$ .

В [7] доказано, что не существует  $\Delta_a^{-1}$ -вычислимой нумерации семейства всех  $\Delta_a^{-1}$ -множеств для любого  $a \in \mathcal{O}$ . С другой стороны, по аналогии с семейством всех вычислимых множеств  $(\Delta_1^{-1})$ , для которого существует вычислимая ( $\Sigma_1^{-1}$ -вычислимая) нумерация, справедливо следующее

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.** *Для любого обозначения ненулевого ординала  $a \in \mathcal{O}$  существует  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимая нумерация семейства всех  $\Delta_a^{-1}$ -множеств.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В. Л. Селиванов [8] доказал, что класс  $\Delta_a^{-1}$  обладает  $m$ -универсальным множеством. Если  $a$  — обозначение предельного ординала, то в качестве такого множества можно взять  $\bigoplus_{b <_o a} \Xi_b^{-1}$ , а если  $a = 2^b$  для некоторого  $b$ , то  $\Xi_b^{-1} \oplus \overline{\Xi_b^{-1}}$ .

Если  $a = 2^b$  для некоторого  $b$ , то легко заметить, что  $A \in \Delta_a^{-1}$  тогда и только тогда, когда  $A = A_1 \cap C \cup A_2 \cap \overline{C}$ , где  $C$  — вычислимое множество,  $A_1 \in \Sigma_b^{-1}$  и  $A_2 \in \Pi_b^{-1}$ .

Пусть  $\nu_n$  —  $\Delta_a^{-1}$ -вычислимая нумерация всех  $\Sigma_b^{-1}$ -множеств,  $\mu_n$  —  $\Delta_a^{-1}$ -вычислимая нумерация всех  $\Pi_b^{-1}$ -множеств. Пусть  $\kappa_n$  — универсальная функция класса одноместных частично вычислимых функций,  $\kappa_n^t$  — результат вычисления  $\kappa_n$  после  $t$  шагов. С помощью  $\kappa_n^t$  можно перебрать все вычислимые множества (будем перебирать все частично вычислимые функции и, если функция будет не возрастающей или не всюду определённой, то будем обрывать вычисление, получая для каждого  $n$  либо конечное множество, либо вычислимое множество, определяемое возрастающей вычислимой функцией). Полученное вычислимое множество будем использовать для того, чтобы определить, какую из нумераций ( $\nu_n$  или  $\mu_n$ ) использовать для данного  $n$ .

Построим нумерацию  $\alpha_{\langle l, m, n \rangle}$  всех  $\Delta_a^{-1}$ -множеств. Для этого построим функции  $f(\langle l, m, n \rangle, x, s)$  и  $g(\langle l, m, n \rangle, x, s)$ . Пусть функции  $\phi_1(l, x, s)$  и

$\psi_1(l, x, s)$  определяют нумерацию  $\nu_n$ , а функции  $\phi_2(m, x, s)$  и  $\psi_2(m, x, s)$  — нумерацию  $\mu_n$ .

**Конструкция.**

Для всех  $l, m, n, x, s \in \omega$  определим пару

$$\langle f(\langle l, m, n \rangle, x, s), g(\langle l, m, n \rangle, x, s) \rangle.$$

Пусть  $k$  — минимальное натуральное число, такое что выполняется одно из следующих условий:

- (1)  $\kappa_n^s(k)$  не определено;
- (2)  $\kappa_n^s(k) > x$ ;
- (3)  $\kappa_n^s(k) = x$ ;
- (4)  $\kappa_n^s(k) < x$  и  $\kappa_n^s(k+1) \leq \kappa_n^s(k)$ .

В зависимости от того, какое из этих условий выполняется, определим функции  $f$  и  $g$ :

- (1)  $f(\langle l, m, n \rangle, x, s) = 0$ , а  $g(\langle l, m, n \rangle, x, s)$  не определено;

(2)  $x$  не попадает в область значений вычислимой возрастающей функции, тогда определяем функции так же, как у второй нумерации, т. е.  $f(\langle l, m, n \rangle, x, s) = \phi_2(m, x, s)$ ,  $g(\langle l, m, n \rangle, x, s) = \psi_2(m, x, s)$ ;

(3)  $x$  принадлежит строящемуся вычислимому множеству, тогда определяем по первой нумерации, т. е.  $f(\langle l, m, n \rangle, x, s) = \phi_1(l, x, s)$ ,  $g(\langle l, m, n \rangle, x, s) = \psi_1(l, x, s)$ ;

(4) поскольку  $\kappa_n^s(k+1) \leq \kappa_n^s(k)$ , функция  $\kappa_n$  не является возрастающей и, как и во втором случае,  $x$  попадает в дополнение строящегося вычислимого множества, а значит  $f(\langle l, m, n \rangle, x, s) = \phi_2(m, x, s)$ ,  $g(\langle l, m, n \rangle, x, s) = \psi_2(m, x, s)$ .

Пусть  $f_1(\langle l, m, n \rangle, x, 0) = 0$ ,  $f_1(\langle l, m, n \rangle, x, s+1) = f(\langle l, m, n \rangle, x, s)$ ;  $g_1(\langle l, m, n \rangle, x, 0)$  не определена,  $g_1(\langle l, m, n \rangle, x, s+1) = g(\langle l, m, n \rangle, x, s)$ . Нумерация  $\alpha$ , определяемая функциями  $f_1$  и  $g_1$ , является  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой.

Пусть  $a$  — обозначение предельного ординала, тогда класс множеств,  $m$ -сводимых к  $\bigoplus_{b <_o a} \Xi_b^{-1}$ , легко нумеруется. Пусть  $a$  — клиниевское обозначение предельного ординала,  $a = 3 * 5^e$  и  $b = \kappa_e(m)$  для некоторой последовательности  $b <_o a$ . Для любого  $m \in \omega$  возьмём в качестве  $\nu^m$  какую-либо

$\Sigma_b^{-1}$ -вычислимую нумерацию семейства всех  $\Sigma_b^{-1}$ -множеств для одного из  $b$  из указанной последовательности. Определим нумерацию

$$\nu_{\langle n, m \rangle}(x) = \begin{cases} \nu_n^{\kappa_e(m)}(x), \kappa_e(m) \downarrow; \\ \emptyset, \kappa_e(m) \uparrow. \end{cases}$$

Построим  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимацию  $\langle f, g \rangle$  нумерации  $\nu$ , используя  $\Sigma_b^{-1}$ -аппроксимации  $\langle f_m, g_m \rangle$  нумераций  $\nu^m$ . Для любых  $s, n, m, x \in \omega$  полагаем:

(1) если  $\kappa_e^s(m)$  определена, то  $f(\langle n, m \rangle, x, s) = f_{\kappa_e(m)}(n, x, s)$ ,  $g(\langle n, m \rangle, x, s) = g_{\kappa_e(m)}(n, x, s)$ ;

(2) если  $\kappa_e^s(m)$  не определена, то  $f(\langle n, m \rangle, x, s) = 0$ ,  $g(\langle n, m \rangle, x, s)$  не определена.

Полученная нумерация, очевидно, будет  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой.  $\square$

Отметим, что таким же способом получается и  $\Pi_a^{-1}$ -вычислимая нумерация семейства всех  $\Delta_a^{-1}$ -множеств. Таким образом, справедливо

**СЛЕДСТВИЕ 3.2.** Для любого обозначения ненулевого ординала  $a \in \mathcal{O}$  существуют  $\Sigma_a^{-1}$ - и  $\Pi_a^{-1}$ -вычислимые фридберговы нумерации семейства всех  $\Delta_a^{-1}$ -множеств.

#### § 4. Следствия

В заключительной части работы приведём некоторые следствия основного результата.

**ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1.** Пусть  $\mathcal{S} — \Sigma_a^{-1}$ -вычислимое семейство, а семейство  $\mathcal{T}$  такое, как в лемме 2.2. Тогда семейство  $\mathcal{S} \cup \{\emptyset\} \setminus \mathcal{T}$ , если  $e(a) = 0$ , (или  $\mathcal{S} \cup \{\omega\} \setminus \mathcal{T}$ , если  $e(a) = 1$ ) обладает  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой нумерацией.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\alpha' — \Sigma_a^{-1}$ -вычислимая нумерация семейства  $\mathcal{S}$ . В качестве нумерации  $\alpha$  возьмём следующую нумерацию:

- (1)  $\alpha_0 = \emptyset$ , если  $e(a) = 0$ , и  $\alpha_0 = \omega$ , если  $e(a) = 1$ ;
- (2)  $\alpha_{n+1} = \alpha'_n$ .

Будем использовать нумерацию  $\gamma$ , построенную в лемме 2.2 (само применение изменится), а также модификацию конструкции из основного результата.

Внесём изменения в конструкцию.

На шаге  $s + 1$  изменятся действия  $(s + 1.2)$  и  $(s + 1.3)$ :

$(s + 1.2)$  Если  $h_s(n)$  определено,  $n > 0$  и для некоторого числа  $m < s$  выполняется

$$\delta(m, x, s) = f(h_s(n), a, s) \text{ для всех } x \in [0, h_s(n) + 1],$$

то полагаем значение  $h_{s+1}(n)$  неопределённым.

$(s + 1.3)$  Если значение  $h_s(n)$  определено, а  $h_{s+1}(n)$  стало неопределённым в ходе подшагов 1 и 2, то для каждого такого числа  $n$  (в порядке возрастания) полагаем:

$$f(h_s(n), x, s') = e(a), \quad g(h_s(n), x, s') = 0 \text{ для всех } s' > s.$$

Конструкция устроена следующим образом: сначала мы строим  $\beta_n$  как некоторое  $\alpha_{n'}$  и переходим к построению  $\emptyset$  (или  $\omega$ ), если  $\alpha_{n'}$  совпадает с  $\alpha_m$ ,  $m < n'$ , или с некоторым  $\gamma_y$ . Благодаря свойству правильной чётности дополнительных изменений не произойдёт.

Легко заметить, что полученная нумерация будет позитивной, в ней множество номеров множества  $\emptyset$  (или  $\omega$ ) является вычислимо перечислимым, а все остальные множества встречаются лишь однажды. Однако для последующих рассуждений нам понадобится только  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимость нумерации  $\beta$ .  $\square$

Ж. Т. Таласбаева [9] показала, что для любого конечного уровня  $n$  иерархии Ершова каждое бесконечное вычислимо семейство, содержащее  $\emptyset$  при чётном  $n$  или  $\omega$  при нечётном  $n$ , имеет бесконечно много вычислимых позитивных неразрешимых нумераций, попарно несравнимых относительно сводимости нумераций. (При  $n = 1$  это впервые доказал С. А. Бадаев [10]). В дальнейшем этот результат был обобщили М. Мустафа и А. Сорби [11] для всех уровней  $\Sigma_a^{-1}$  иерархии Ершова, где  $a$  является обозначением любого ненулевого вычислимого ординала.

**ТЕОРЕМА 4.2** (С. А. Бадаев [10], Ж. Т. Таласбаева [9], М. Манат, А. Сорби [11]). Пусть  $S$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимое бесконечное семейство и  $\emptyset \in S$ , если  $e(a) = 0$ , или  $\omega \in S$ , если  $e(a) = 1$ . Тогда  $S$  имеет бесконечно много  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимых позитивных неразрешимых нумераций, попарно несравнимых относительно сводимости нумераций.

Отметим, что в нумерациях из теоремы 4.2 множество номеров множества  $\emptyset$  (или  $\omega$ ) является вычислимо перечислимым, а все остальные множества встречаются лишь однажды.

Пусть  $F = S \cup \{\emptyset\} \setminus T$  — бесконечное  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимое семейство, полученное в предложении 4.1 (т. е. в  $S$  бесконечно много элементов, не встречающихся в  $T$ ). Согласно теореме 4.2 существует  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимая позитивная неразрешимая нумерация  $\alpha$  семейства  $F$ . Пусть  $M$  — множество номеров множества  $\emptyset$  (или  $\omega$ ).

Построим  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимую фридбергову нумерацию  $\beta$  семейства  $F \cup T$  (построим  $\langle f, g \rangle$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимацию нумерации  $\beta$ ), а также вычислимую функцию  $h(s, n)$ .

Пусть  $\langle \phi, \psi \rangle$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимация с замедлением нумерации  $\alpha$ , а  $\langle \delta, \rho \rangle$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимация нумерации  $\gamma$  (согласно лемме 2.2). Пусть  $\{M_s\}_{s \in \omega}$  — возрастающая последовательность конечных множеств, в пределе дающая  $M$ ,  $M_0 = \emptyset$ ,  $M_s \subseteq \bigcap \{0, 1, \dots, s\}$ .

Рассмотрим также вспомогательную нумерацию  $\nu = \alpha \oplus \gamma$ . Её  $\Sigma_a^{-1}$ -аппроксимация  $\langle \tau, \sigma \rangle$  определяется так:

- (1)  $\tau(2n, x, s) = \phi(n, x, s)$ ,  $\sigma(2n, x, s) = \psi(n, x, s)$ ;
  - (2)  $\tau(2n + 1, x, s) = \delta(n + 1, x, s)$ ,  $\sigma(2n + 1, x, s) = \rho(n + 1, x, s)$ ,
- $\tau(1, x, s) = 0$ ,  $\sigma(1, x, s)$  не определена.

Требования к конструкции.

- (1) Если  $n \notin M$ , то  $\beta_{2n} = \alpha_n$ .
- (2) Если  $n \in M$ , то  $\beta_{2n} = \gamma_y$  для некоторого  $y$ .
- (3) Для любого  $n$  выполняется  $\beta_{2n+1} = \gamma_y$  при некотором  $y$ .
- (4) Для любых  $n_1$  и  $n_2$  выполняется  $\beta_{n_1} \neq \beta_{n_2}$ .

Конструкция для  $\beta$ .

Шаг  $s = 0$ . Для любых  $n, x$  полагаем  $f(n, x, 0) = 0$ ,  $g(n, x, 0)$  не опре-

делена. Полагаем  $y' = 0$ ,  $k = 0$ ,  $h(0, 2n) = 2n$ ,  $h(0, 2n + 1) = 1$ . В дальнейшем, если какие-либо комбинации  $(n, x, s)$  не упомянуты, то полагаем для них  $h(s + 1, n) = h(s, n)$ ,  $f(n, x, s + 1) = f(n, x, s)$ ,  $g(n, x, s + 1) = g(n, x, s)$ .

Шаг  $s + 1$ . Для всех  $n \leq s$  рассмотрим следующие действия:

( $s + 1.1$ ) Для всех  $n \in M_{s+1} \setminus M_s$  (в порядке возрастания) полагаем

( $s + 1.1.1$ )  $h(s + 1, 2n) = 2y'' + 2$ , где  $y''$  — натуральное число, большее  $y'$  и  $s$ ;

( $s + 1.1.2$ ) для всех  $y' < y \leq y''$  (в порядке возрастания) полагаем  $h(s + 1, 2k + 1) = 2y + 1$  и  $k := k + 1$ ;

( $s + 1.1.3$ ) полагаем  $y' = y''$ .

Переходим к следующему  $n$  в действии ( $s + 1.1$ ).

( $s + 1.2$ ) Для всех  $n \notin M_{s+1}$  полагаем  $h(s + 1, 2n) = h(s, 2n)$  и  $h(s + 1, 2n + 1) = h(s, 2n + 1)$ .

( $s + 1.s + 1.3$ ) Для всех  $n$  полагаем  $f(n, x, s + 1) = \tau(h(s + 1, n), x, s + 1)$ ,  $g(n, x, s + 1) = \sigma(h(s + 1, n), x, s + 1)$ .

Описание конструкции завершено.

Проверим выполнение требований.

(1) Если  $n \notin M$ , то за счёт действий ( $s + 1.2$ ) и ( $s + 1.3$ ) в  $\beta_{2n}$  постоянно будет строиться множество  $\alpha_n$ .

(2) Если  $n \in M$ , то, начиная с некоторого  $s$ , за счёт действия ( $s + 1.1$ ) мы будем строить в  $\beta_{2n}$  множество  $\gamma_x$ . Из-за свойства замедления новых ошибок не появится.

(3) Это требование выполнится, т.к. множество  $M$  бесконечно, а между  $y'$  и  $y'' + 1$  всегда есть хотя бы один элемент.

(4) Это требование выполнится в силу позитивности нумерации  $\alpha$  и фридберговости нумерации  $\gamma$ .

Итак, мы получили  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимую фридбергову нумерацию  $\beta$  семейства  $F \cup T$  (точнее, семейства  $F \cup T \setminus \{\emptyset\}$ , если  $e(a) = 0$ , или  $F \cup T \setminus \{\omega\}$ , если  $e(a) = 1$ , но этот элемент легко добавить в построенную нумерацию).

Пусть  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$  — несравнимые позитивные неразрешимые  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимые нумерации семейства  $F$ , а  $\beta^1$  и  $\beta^2$  — соответствующие им  $\Sigma_a^{-1}$ -

вычислимые фридберговы нумерации семейства  $F \cup T$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.** *Нумерации  $\beta^1$  и  $\beta^2$  несравнимы относительно сводимости нумераций.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустим,  $\beta^1 \leq \beta^2$ . Существует вычислимая функция  $f$ , для которой  $\beta_n^1 = \beta_{f(n)}^2$ . Тогда  $\alpha^1 \oplus \eta \leq \alpha^2 \oplus \eta$  при помощи этой же функции  $f$ . Здесь  $\eta_n = \emptyset$ , если  $e(a) = 0$ , и  $\eta_n = \omega$ , если  $e(a) = 1$  для любого  $n$ . В силу  $\eta \equiv \eta$  выполняется  $\alpha^1 \leq \alpha^2$ ; противоречие.  $\square$

**ТЕОРЕМА 4.4.** *Семейство всех  $\Sigma_a^{-1}$ -множеств обладает бесконечным числом попарно несравнимых  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимых фридберговых нумераций для любого обозначения ненулевого ординала  $a \in \mathcal{O}$ .*

Рассмотрим ещё один способ использования конструкции из основной теоремы, идея которого возникла из следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 4.5** (М. Куммер [12]). *Пусть  $\mathcal{S}$  —  $\Sigma_1^{-1}$ -вычислимое семейство и существует два непересекающихся  $\Sigma_1^{-1}$ -вычислимых подсемейства  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$ , таких что  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$  и*

- (1)  $\mathcal{S}_2$  обладает  $\Sigma_1^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерацией;
- (2) любое конечное подмножество элемента  $\mathcal{S}_1$  имеет бесконечно много расширений в  $\mathcal{S}_2$ .

*Тогда  $\mathcal{S}$  обладает  $\Sigma_1^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерацией.*

Из этого результата мы будем использовать только разбиение семейства на два вычислимых подсемейства, одно из которых обладает фридберговой нумерацией. Дальнейшие рассуждения интересны тем, что мы пробуем отказаться от фиксированной сложности семейств для получения большего класса фридберговых нумераций.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6.** *Пусть  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  — бесконечные семейства множеств, для которых*

- (1)  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ ;
- (2)  $\mathcal{S}_1$  обладает  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой нумерацией;
- (3)  $\mathcal{S}_2$  обладает  $\Sigma_b^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерацией, если  $e(a) = 0$ , и  $\Pi_b^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерацией, если  $e(a) = 1$ .

Тогда  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  обладает  $\Sigma_{b+0a}^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерацией.

Здесь и далее,  $+_0$  — это частично вычислимая функция, удовлетворяющая  $|b +_0 a|_0 = |b|_0 + |a|_0$  для  $a, b \in \mathcal{O}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять воспользуемся конструкцией из основного результата. Пусть  $\nu$  —  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимая нумерация семейства  $\mathcal{S}_1$ . Положим  $\alpha = \nu \oplus \nu$ , т. е. дважды повторим нумерацию  $\nu$  в нумерации  $\alpha$ . Изначально никаких ограничений на  $\nu$  не накладываемся, поэтому в нумерации  $\nu$  может оказаться лишь конечное число повторов, а в нумерации  $\alpha$  каждый элемент встречается как минимум дважды, тем самым создаётся необходимый резерв номеров, на которые будут ставиться элементы из  $\mathcal{S}_2$ . В качестве  $\gamma$  мы используем соответствующую фридбергову нумерацию  $\mathcal{S}_2$ , предварительно изменив её аппроксимацию  $\langle \delta, \rho \rangle$  следующим образом:

для всех  $n, x \in \omega$  и для всех таких  $s$ , что  $\delta(n, x, 0) = \delta(n, x, 1) = \dots = \delta(n, x, s) = 0$  (т. е. первого изменения ещё не было), полагаем  $\rho(n, x, s) = b$ .

Опишем изменения в конструкции.

Поскольку  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$  не пересекаются, действие (s+1.2) не понадобится, а вместе с этим исчезает и необходимость держать в  $\alpha_0$  множество  $\omega$  (или  $\emptyset$ ). На шаге 0 дополнительно определяем  $y = 0$ .

(s + 1.3) Если значение  $h_s(n)$  определено, а  $h_{s+1}(n)$  стало неопределённым в результате действия (s + 1.1), то для каждого такого числа  $n$  (в порядке возрастания) полагаем  $f(h_s(n), x, s') = \delta(y, x, s')$ ,  $g(h_s(n), x, s') = \rho(y, x, s')$  для всех  $s' > s$ . Полагаем  $y = y + 1$ . Переходим к следующему  $n$ . В этом действии мы ставим на освободившееся место в нумерации  $\beta$  следующий элемент из  $\mathcal{S}_2$ .

(s + 1.6) Если  $h_{s+1}(n)$  определено, то полагаем  $f(h_{s+1}(n), x, s + 1) = \phi(n, x, s + 1)$  и  $g(h_{s+1}(n), x, s + 1) = b +_0 \psi(n, x, s + 1)$  для всех  $x \in \omega$ . В этом действии мы создаём дополнительную возможность изменений для элементов нумерации  $\beta$ , которая может понадобиться при переходе от построения элемента из  $\alpha$  к элементу из  $\gamma$ .

Покажем, что полученная нумерация будет  $\Sigma_{b+0a}^{-1}$ -вычислимой. Вна-

чале мы строим новый элемент нумерации как  $\Sigma_a^{-1}$ -множество, но сохраняем возможность сделать ещё  $b$  изменений. За это отвечает действие  $(s + 1.6)$ . Затем, если было выполнено действие  $(s + 1.1)$  или  $(s + 1.2)$ , начинаем строить уже  $\Sigma_b^{-1}$  или  $\Pi_b^{-1}$ -множества в зависимости от  $e(a)$ .

Если  $e(a) = 0$ , то до выполнения действия  $(s + 1.1)$  минимально возможное значение функции  $g$  будет равно  $b$ , при этом значение функции  $f$  равно 0. А значит, построение  $\Sigma_b^{-1}$ -множества после выполнения действия  $(s + 1.1)$ , начинающегося со значения  $\delta$ , равного нулю, не внесёт дополнительных ошибок.

Если же  $e(a) = 1$ , то при минимальном  $g$  значение  $f$  равно 1, а построение  $\Pi_b^{-1}$ -множества начинается со значения  $\delta$ , равного единице. Дополнительные ошибки не появятся.  $\square$

Рассмотрим семейство  $\mathcal{S} = \{\{2x, 2x + 1\} \mid x \in A\} \cup \{\{2x\}, \{2x + 1\} \mid x \notin A\}$ , где  $A$  — вычислимо перечислимое невычислимо множество. Легко заметить, что это семейство  $\Sigma_1^{-1}$ -вычислимо и у него нет  $\Sigma_1^{-1}$ -вычислимых фридберговых нумераций (см., напр., [13]). Семейство  $\{\{2x\}, \{2x + 1\} \mid x \notin A\}$  является  $\Sigma_2^{-1}$ -вычислимым, а у семейства  $\{\{2x, 2x + 1\} \mid x \in A\}$  есть  $\Sigma_1^{-1}$ -вычисляемая фридбергова нумерация. Значит, по предложению 4.6 семейство  $\mathcal{S}$  обладает  $\Sigma_3^{-1}$ -вычислимой фридберговой нумерацией.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *R. M. Friedberg*, Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication, *J. Symb. Log.*, **23**, No. 3 (1958), 309—316.
2. *С. С. Гончаров, С. Лемпи, Д. Р. Соломон*, Фридберговские нумерации семейств  $n$ -вычислимо перечислимых множеств, *Алгебра и логика*, **41**, № 2 (2002), 143—154.
3. *Ю. Л. Ершов*, Об одной иерархии множеств III, *Алгебра и логика*, **9**, № 1 (1970), 34—51.
4. *C. J. Ash, J. F. Knight*, Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy (*Stud. Logic Found. Math.*, **144**), Amsterdam etc., Elsevier Sci.

- В.В., 2000.
5. С. С. Гончаров, А. Сорби, Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса, Алгебра и логика, **36**, № 6 (1997), 621–641.
  6. С. С. Оспичев, Бесконечное семейство  $\Sigma_a^{-1}$ -множеств с единственной вычислимой нумерацией, Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., **11**, № 2 (2011), 89–92.
  7. С. С. Оспичев, Некоторые свойства нумераций различных классов иерархии Ершова, Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., **10**, № 4 (2010), 125–132.
  8. В. Л. Селиванов, Об иерархии предельных вычислений, Сиб. матем. ж., **25**, № 5 (1984), 146–156.
  9. Ж. Т. Таласбаева, О позитивных нумерациях семейств множеств иерархии Ершова, Алгебра и логика, **42**, № 6 (2003), 737–746.
  10. С. А. Бадаев, О позитивных нумерациях, Сиб. матем. ж., **18**, № 3 (1977), 483–496.
  11. М. Манат, А. Сорби, Позитивные неразрешимые нумерации в иерархии Ершова, Алгебра и логика, **50**, № 6 (2011), 759–780.
  12. M. Kummer, Numberings of  $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{F}$ , in: E. Börger (ed.) et al., CSL'88, Proc. 2nd Workshop, Duisburg/FRG 1988 (Lect. Notes Comput. Sci., **385**), Berlin, Springer-Verlag, 1989, 166–186.
  13. M. B. Pour-El, W. A. Howard, A structural criterion for recursive numeration without repetition, Z. Math. Logik Grundlagen Math., **10**, No. 2 (1964), 105–114.

Поступило 17 августа 2012 г.

Окончательный вариант 17 марта 2015 г.

Адрес автора:

ОСПИЧЕВ Сергей Сергеевич,

Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4,

Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2,

г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ.

e-mail: ospichev@gmail.com