



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Borodin, Numerical solution of a three-dimensional multicomponent viscous shock layer by the method of global iterations, *TVT*, 2001, Volume 39, Issue 4, 599–608

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt1939>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

April 28, 2025, 15:20:11



УДК 519.86:533.6.011

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ МЕТОДОМ ГЛОБАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ

© 2001 г. А. И. Бородин

*НИИ прикладной математики и механики при Томском государственном университете*

Поступила в редакцию 19.07.99 г.

В рамках модели вязкого ударного слоя решена пространственная задача об обтекании гладких тел различной формы сверхзвуковым потоком неравновесно-диссоциирующего воздуха под различными углами атаки и скольжения.

### ВВЕДЕНИЕ

При движении тел в атмосфере с большими сверхзвуковыми скоростями нагрев газа в околоповерхностном слое инициирует протекание в нем различных физико-химических процессов, учет которых необходим для получения реальной физической картины течения. В данной работе численное моделирование сверхзвукового химически-неравновесного многокомпонентного течения вязкого газа проводится в рамках газодинамической модели вязкого ударного слоя (ВУС), первоначально предложенной для течений однородного газа в [1] и описывающей всю возмущенную область от ударной волны (положение ее заранее неизвестно) до поверхности тела. Уравнения ВУС, являющиеся упрощением полных уравнений Навье–Стокса, содержат все члены уравнений Эйлера и уравнений Прандтля. Так как вторые производные в направлении преимущественного течения газа в них отсутствуют, то система ВУС относится к эволюционному типу, позволяющему, в принципе, применять для своего решения маршевые методы. Однако наличие в течении дозвуковых областей, а это окрестность линии торможения и пристеночная область, делает невязкий оператор эллиптическим, что проявляется в распространении возмущений против потока через градиент давления. Кроме того, эллиптичность задачи проявляется и в граничных условиях на искомой ударной волне. Опубликовано много работ по данной теме (см. [2–4]), но численное решение поставленной задачи в пространственном случае без каких-либо упрощений остается по-прежнему актуальным.

В данной работе уравнения многокомпонентного ВУС решаются одним из эффективных подходов – методом глобальных итераций (ГИ), когда на каждой итерации краевая задача решается маршевым методом, а форма ударной волны и “эллиптические” члены в уравнениях на те-

кущей ГИ определяются по результатам предыдущей ГИ.

Метод ГИ по всему полю течения впервые был использован при гиперзвуковом осесимметричном обтекании лобовой поверхности гиперболоида вращения в работе [1]. Для первого приближения использовалась модель тонкого (гиперзвукового) вязкого слоя (ТВУС). Проведенные расчеты показали хорошую сходимость метода, однако для тел другой формы (с “толстым” ударным слоем) описанный в работе итерационный процесс расходился.

В связи с этим в ряде работ [5–8] (см. также [2, 3] и цитируемую там литературу) впервые был развит сходящийся метод ГИ для двухмерных задач с произвольным “толстым” ударным слоем.

Впервые трехмерные уравнения ВУС с заданным (взятым из решения задачи обтекания идеальным газом) положением ударной волны решены в [9, 10], где были проведены расчеты обтекания сферически затупленных конусов под углом атаки. Замыкание задачи таким способом вносило систематическую неконтролируемую ошибку. В работе [11] описывается итерационная процедура метода ГИ для трехмерного случая, но конкретные расчеты приведены для тел вращения.

Ранее различные модификации метода ГИ, предложенные автором данной работы, были опубликованы в [12, 13]. В [12] задача обтекания трехосного эллипсоида решалась в приближении, когда в качестве исходных использовались трехмерные уравнения ТВУС, однако форма ударной волны определялась в процессе ГИ. В [13] решение уравнений пространственного ВУС получено на основе метода ГИ по продольной и окружной компонентам градиента давления. Предложенная там методика позволила провести расчеты обтекания вязким однородным газом трехосного эллипсоида под различными углами атаки и скольжения, т.е. в самом общем пространственном слу-

чае. В данной работе метод ГИ применен к расчету пространственного сверхзвукового течения вязкого газа с учетом в ВУС неравновесных химических реакций и многокомпонентного характера протекающей в потоке диффузии около сферы и трехосного эллипсоида, обтекаемого под углами атаки и скольжения, причем ГИ проводится как по форме отошедшей ударной волны с фиксированной критической точкой, так и по давлению.

**Постановка задачи.** Рассмотрим сверхзвуковое неравновесное течение вязкого многокомпонентного газа около гладкого затупленного тела. Данное течение будем исследовать в рамках модели ВУС, обобщенной на случай трехмерных течений многокомпонентного газа в [14]. Исходная система уравнений с учетом неравновесных химических реакций, многокомпонентного характера диффузии в пренебрежении эффектами бародиффузии, термодиффузии и диффузионного термоэффекта в криволинейной системе координат  $x^i$ , нормально связанной с поверхностью обтекаемого тела, имеет следующий безразмерный вид:

$$D_i(\rho u^i g^{1/2} g^{(ii)-1/2}) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho(Du^\alpha + A_{ij}^\alpha u^i u^j) = \\ = -g^{\alpha\beta} g^{1/2} g^{(\alpha\alpha)} D_\beta P + D_3 \left( \frac{\mu}{\text{Re}} D_3 u^\alpha \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\rho(Du^3 + A_{ij}^3 u^i u^j) = -D_3 P, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p DT = 2DP + \\ + \frac{2\mu}{\text{Re}} g_{\alpha\beta} g^{(\alpha\alpha)-1/2} g^{(\beta\beta)-1/2} D_3 u^\alpha D_3 u^\beta - D_3 T \sum_{i=1}^N c_{pi} I_i - \\ - \sum_{i=1}^N h_i \dot{w}_i + D_3 \left( \frac{\mu c_p}{\text{RePr}} D_3 T \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\rho Dc_i + D_3 I_i = \dot{w}_i \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad (5)$$

$$P = \rho TZ \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{m_i}, \quad Z = \frac{R_A T_0}{V_\infty^2 m}, \quad (6)$$

$$D_i \equiv \partial/\partial x^i, \quad D^* \equiv u^\alpha a_{(\alpha\alpha)}^{-1/2} D_\alpha, \quad D \equiv D^* + u^3 D_3,$$

$$\text{Re} = \rho_\infty V_\infty L / \mu_\infty, \quad T_0 = 10^4 \text{ К},$$

$$\sum_{i=1}^N c_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N I_i = 0, \quad c_p = \sum_{i=1}^N c_{pi} c_i.$$

Систему (1)–(6) замыкают соотношения Стефана–Максвелла

$$I_i = \alpha_i D_3 c_i + \beta_i c_i \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad (7)$$

$$\alpha_i = -\frac{\mu b_{(ii)}}{\text{ReSc}_{IN} a_{(ii)}},$$

$$\beta_i = a_{ii}^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \left( a_{ij} I_j + D_3 c_j \frac{\mu b_j^*}{\text{ReSc}_{IN}} \right),$$

$$a_{ij} = -a_{ij}^* c_i, \quad (j \neq i),$$

$$a_{ii} = \frac{\text{Sc}_{iN}}{\text{Sc}_{IN}} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} a_{ij}^* c_j, \quad b_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} b_j^* c_j,$$

$$a_{ij}^* = \frac{m_N \text{Sc}_{ij}}{m_j \text{Sc}_{iN}} - \frac{\text{Sc}_{iN}}{\text{Sc}_{iN}}, \quad b_j^* = \frac{m_N}{m_j} - 1.$$

Здесь координатная ось  $x^3$  направлена по нормали к поверхности тела, а оси  $x^\alpha$  выбираются на касательной плоскости к поверхности. Предполагается суммирование по повторяющимся индексам, не заключенным в скобки. Латинские индексы принимают значения 1–3, исключая специально отмеченные случаи. Греческие индексы равны единице или двум. Все линейные размеры отнесены к характерному линейному размеру  $L$ ;  $V_\infty u^i$  – физические компоненты вектора скорости;  $\rho_\infty V_\infty^2 P$ ,  $\rho_\infty \rho$ ,  $T_0 T$  – соответственно давление, плотность, температура смеси газов, состоящей из  $N$  компонент;  $\mu_\infty \mu$ ,  $V_\infty^2 / (2T_0) c_p$ ,  $\text{Pr}$ ,  $m$  – коэффициент вязкости, удельная теплоемкость, число Прандтля и молекулярная масса смеси газов соответственно;  $c_i$ ,  $m_i$ ,  $0.5 V_\infty^2 h_i$ ,  $V_\infty / (2T_0) c_{pi}$ ,  $V_\infty \rho_\infty I_i$ ,  $V_\infty \rho_\infty \dot{w}_i / L$  – массовая концентрация, молекулярный вес, удельная энтальпия, удельная теплоемкость, нормальная компонента вектора диффузионного потока и скорости формирования  $i$ -й компоненты,  $T_0 = 10^4 \text{ К}$ ;  $\text{Sc}_{ij}$  – бинарные числа Шмидта;  $g_{\alpha\beta}$  – ковариантные, а  $g^{\alpha\beta}$  – контравариантные компоненты первой квадратичной формы поверхности тела;  $g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$ ,  $A_{ij}^k$  обозначают известные функции формы тела [15]. Нижние индексы  $w$ ,  $\infty$ ,  $s$  здесь и далее соответствуют значениям на поверхности тела, в набегающем потоке и за ударной волной соответственно.

Для системы (1)–(7) задаются граничные условия на ударной волне и на поверхности тела. На ударной волне используются обобщенные соотношения Рэнкина–Гюгонио в гиперзвуковом при-

ближении при пренебрежении химическими реакциями внутри ударной волны для  $x^3 = x_s^3(x^1, x^2)$

$$\begin{aligned} \rho(u^3 - D^*x^3) &= u_\infty^3, \\ u_\infty^3(u^\alpha - u_\infty^\alpha) &= \mu \text{Re}^{-1} D_3 u^\alpha, \\ P + \rho(u^3)^2 &= P_\infty + (u_\infty^3)^2, \\ u_\infty^3(c_i - c_{i\infty}) + I_i &= 0, \\ \mu c_p \text{Re}^{-1} \text{Pr}^{-1} D_3 T &= \\ &= u_\infty^3 \left( \sum_{i=1}^N c_{i\infty} (h_i - h_{i\infty}) + (u^3)^2 - (u_\infty^3)^2 - \right. \\ &\quad \left. - g_{\alpha\beta} g_{(\alpha\alpha)}^{-1/2} g_{(\beta\beta)}^{-1/2} (u^\alpha - u_\infty^\alpha) (u^\beta - u_\infty^\beta) \right). \end{aligned} \tag{8}$$

На поверхности тела с учетом гетерогенных химических реакций задаются следующие граничные условия:

$$u^i = 0 \text{ при } x^3 = 0, \quad T = T_w(x^1, x^2), \quad I_i = \dot{r}_{wi} \quad (9)$$

$$(i = 1, \dots, N-1).$$

Предполагается, что каталитические реакции на поверхности тела являются реакциями первого порядка

$$\dot{r}_{wi} = -\rho k_{wi} c_i \quad (i = O, N, \text{NO}),$$

где  $V_\infty k_{wi}$  – константа скорости гетерогенной рекомбинации.

Воздух моделируется пятикомпонентной смесью  $O_2, N_2, \text{NO}, N, O$ , в которой протекают реакции диссоциации–рекомбинации  $A_2 + M = 2A + M$ ,  $\text{NO} + M = N + O + M$  (здесь  $A_2, A, M$  – символы молекул  $O_2, N_2$ , атомов  $O, N$  и третьих частиц соответственно) и реакции обмена –  $N_2 + O_2 = 2\text{NO}$ ,  $\text{NO} + O = N + O_2$ ,  $\text{NO} + N = O + N_2$ . Зависимости констант прямых и обратных реакций от температуры определялись из [16]. Для вычислений коэффициентов переноса смеси и термодинамических величин использовались данные [17–19]. Условия в набегающем потоке соответствуют траектории входа для “Space Shuttle” [20]. Предполагается, что атмосфера изотермическая с распределением плотности по высоте  $H$  в км:

$$\rho_\infty = 1225.0 \exp(-0.142H).$$

Рассматривались следующие модели гетерогенных химических реакций

$$k_w(O) = k_w(N) = 0,$$

$$k_w(O) = k_w(N) = \infty.$$

Первая модель соответствует некаталитической поверхности, а вторая – другому предельному случаю – идеально каталитической поверхности. Всюду предполагается, что  $k_{w\text{NO}} = 0$ .

Линия торможения предполагается линейной и совпадает с нормалью к поверхности тела в критической точке. Выходная граница  $x^1 = x_*^1$  выбирается достаточно далеко вниз по потоку (в рассматриваемом случае она располагается на миделе обтекаемого тела).

**Метод решения.** Выберем на поверхности тела полярную систему координат с центром в точке торможения [21]. В этом центре нормаль к поверхности обтекаемого тела совпадает с направлением набегающего потока, которое полностью определяется углами атаки и скольжения. Одно семейство координатных линий является концентрическими “окружностями”, другое – пучком “лучей” с центром в начале координат.

Для удобства численного решения с учетом особенности выбранной системы координат на поверхности перейдем в (1)–(9) к новым переменным типа Дородницына [22]

$$\xi^\alpha = x^\alpha, \quad \zeta = \frac{g^{1/2} x^3}{\xi^1 \Delta} \int \rho dx^3, \quad \Delta = \frac{g^{1/2} x_s^3}{\xi^1} \int \rho dx^3,$$

$$\rho u^\alpha g^{1/2} g_{(\alpha\alpha)}^{-1/2} = \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^3}, \quad \rho u^3 g^{1/2} = -\frac{\partial \Psi^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^2},$$

$$\Psi^\alpha = \Delta (\xi^1)^{3-\alpha} f^\alpha, \quad X_i = I_i \Delta^{-1},$$

$$l = \frac{\mu \rho}{\text{Re} \Delta^2}, \quad u^\alpha = (\xi^1)^{2-\alpha} g_{(\alpha\alpha)}^{1/2} D_3 f^\alpha,$$

$$D_\alpha \equiv \partial / \partial \xi^\alpha, \quad D_3 \equiv \partial / \partial \zeta.$$

В новых переменных уравнение (1) выполняется тождественно, а уравнения (2)–(4) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{g}{(\xi^1)^2} D_3 (l D_3 D_3 f^\alpha) &= \frac{g^{\alpha\beta}}{\rho (\xi^1)^{(2-\alpha)}} D_\beta P - A D_3 D_3 f^\alpha + \\ &+ \frac{(\xi^1)^{(\alpha-\beta)}}{g_{(\alpha\alpha)}^{1/2}} D_3 f^\beta D_\beta ((\xi^1)^{(2-\alpha)} g_{(\alpha\alpha)}^{1/2} D_3 f^\alpha) + \\ &+ A_{\beta\gamma}^{(\alpha)} \left( \frac{g_{\beta\beta} g_{\gamma\gamma}}{g_{(\alpha\alpha)}} \right)^{1/2} (\xi^1)^{\alpha-\delta} D_3 f^\beta D_3 f^\gamma + \\ &+ 2u^3 A_{3\beta}^{(\alpha)} (\xi^1)^{\alpha-\beta} \left( \frac{g_{\beta\beta}}{g_{(\alpha\alpha)}} \right)^{1/2} D_3 f^\beta, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\delta = 2 \frac{(\beta - 1)\gamma + \beta(\gamma - 1)}{\beta\gamma},$$

$$\begin{aligned} \frac{g}{(\xi^1)^2} D_3 \left( \frac{lc_p}{Pr} D_3 T - 2AZT \ln P \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{m_i} \right) = \\ = c_p ((\xi^1)^{2-\alpha} D_3 f^\alpha D_\alpha T - AD_3 T) - \\ - \frac{2}{\rho} (\xi^1)^{2-\alpha} D_3 f^\alpha D_\alpha P - 2 \ln P D_3 \left( AZT \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{m_i} \right) + \\ + \sum_{i=1}^N \frac{h_i \dot{w}_i}{\rho} + \frac{g^{1/2}}{\xi^1} \sum_{i=1}^N c_{pi} X_i D_3 T - \\ - 2 \ln g (\xi^1)^{2-\alpha-\beta} g_{\alpha\beta} D_3 D_3 f^\alpha D_3 D_3 f^\beta, \\ D_3 \left( A(-AD_3 x^3 + (\xi^1)^{2-\alpha} D_3 f^\alpha D_\alpha x^3) - \frac{P}{\rho D_3 x^3} \right) = \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} = u^3 D_3 A + (\xi^1)^{2-\alpha} D_3 f^\alpha D_\alpha u^3 + \\ + A_{\alpha\beta}^3 (\xi^1)^{4-\alpha-\beta} g_{\alpha\alpha}^{1/2} g_{\beta\beta}^{1/2} D_3 f^\alpha D_3 f^\beta, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D_3 \left( X_i \frac{g^{1/2}}{\xi^1} \right) = AD_3 c_i - (\xi^1)^{2-\alpha} D_3 f^\alpha D_\alpha c_i + \frac{\dot{w}_i}{\rho} \\ (i = 1, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (13)$$

$$X_i = \alpha_i D_3 c_i + \beta_i c_i \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} A = \xi^1 D_1 f^1 + (2 + \xi^1 D_1 \ln \Delta) f^1 + \\ + D_2 f^2 + f^2 D_2 \ln \Delta. \end{aligned}$$

Уравнения (10) являются уравнениями третьего порядка относительно функций тока  $f^\alpha$ . Уравнение (11) – второго порядка используется для нахождения температуры  $T$ , а (12) – для определения координаты  $x^3$  и является следствием уравнения импульсов в проекции на нормаль к поверхности тела (3). Уравнение (1) является уравнением неразрывности, а (6) – уравнением состояния. Уравнения (13) имеют первый порядок и используются для определения диффузионных потоков  $X_i$  совместно с (14), имеющими второй порядок относительно концентраций  $c_i$ . Нормальная составляющая вектора скорости  $u^3$  и плотность  $\rho$  определяются по следующим формулам:

$$u^3 = -AD_3 x^3 + (\xi^1)^{2-\alpha} D_3 f^\alpha D_\alpha x^3, \quad \rho = \frac{\Delta \xi^1}{g^{1/2} D_3 x^3}.$$

Таким образом, исходная задача сводится к нахождению решения системы нелинейных уравнений (10)–(14) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} f^\alpha = D_3 f^\alpha = 0, \quad T = T_w(\xi^1, \xi^2) \quad \text{при } \zeta = 0, \\ X_i = \dot{r}_{wi} \Delta^{-1} \quad (i = 1, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} l \Delta g^{1/2} (\xi^1)^{-1} D_3 f^\alpha = u_\infty^3 (f^\alpha - u_\infty^{(\alpha)} (\xi^1)^{\alpha-2} g_{(\alpha\alpha)}^{-1/2}) \\ \text{при } \zeta = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lc_p \Delta g^{1/2} (Pr \xi^1)^{-1} D_3 T = u_\infty^3 \left( \sum_{i=1}^N c_{i\infty} (h_i - h_{i\infty}) + (u^3)^2 - \right. \\ \left. - (u_\infty^3)^2 - g_{\alpha\beta} g_{(\alpha\alpha)}^{-1/2} g_{(\beta\beta)}^{-1/2} (u^\alpha - u_\infty^\alpha) (u^\beta - u_\infty^\beta) \right), \end{aligned}$$

$$(P_\infty + (1 - \rho^{-1})(u_\infty^3)^2) D_3 x^3 = \Delta \xi^1 g^{-1/2} TZ \sum_{i=1}^N c_i m_i^{-1}, \quad (16)$$

$$\Delta X_i + u_\infty^3 (c_i - c_{i\infty}) = 0.$$

“Лишнее” граничное условие на ударной волне (первое из уравнений (8)) служит для определения величины  $\Delta(\xi^1, \xi^2)$ , характеризующей отход ударной волны, и в новых переменных имеет вид

$$-A \Delta \xi^1 = u_\infty^3 g^{1/2}. \quad (17)$$

Так как вторые производные по маршевому направлению в системе (10)–(14) отсутствуют, то ее можно решать как начально-краевую задачу, используя для этого маршевые методы. Однако, как показывает анализ [23], такой подход корректен лишь в той области течения, где невязкий оператор является гиперболическим, и некорректен там, где этот оператор имеет эллиптический тип.

Среди моделей вязкого обтекания, допускающих применение устойчивых маршевых методов, широкую известность приобрела модель ТВУС, впервые предложенная в [24]. Отличие модели ТВУС от приведенных выше уравнений ВУС состоит в том, что изменение давления поперек ударного слоя определяется только центробежными силами, как это ранее учитывалось в гиперзвуковой теории течений невязкого газа, т.е. уравнение импульсов в проекции на нормаль к поверхности принимает (по отношению к (3) усеченный) вид

$$D_3 P = -\rho A_{\alpha\beta}^3 u^\alpha u^\beta. \quad (18)$$

Это упрощение приводит к появлению на поверхности выпуклого тела линии с нулевым давлением (линии отрыва), за которую решение за-

дачи не может быть продолжено. Для устранения этого нефизического недостатка в [25, 26] была предложена другая асимптотическая модель течения – модель параболизированного вязкого ударного слоя (ПВУС), в которой уравнение движения в проекции на нормаль берется в более точной постановке (3) при сохранении того же параболического типа задачи. В обеих моделях проблема устойчивости маршевого метода решается, во-первых, заданием поверхности ударной волны эквидистантной поверхности тела и, во-вторых, заданием продольного градиента давления по формуле

$$D_3(D_\alpha P) = -D_\alpha(\rho A_{\delta\beta}^3 u^\delta u^\beta), \quad (19)$$

которая получается дифференцированием по соответствующей переменной уравнения (18). Численное исследование химически неравновесных течений в пространственном вязком ударном слое около тел с каталитической поверхностью в рамках обеих моделей было проведено в работах [27, 28].

В данной работе правильный учет механизма передачи возмущений вверх по потоку осуществляется за счет итераций по продольному градиенту давления в сочетании с определением положения ударной волны  $x_s^3(\xi^1, \xi^2)$ . Для определения нормальной составляющей скорости внешнего потока  $u_\infty^3$  в граничных условиях (16) необходимо задание также и производных этой функции по координатам  $\xi^1$  и  $\xi^2$ . В работе [8] компоненты скорости на ударной волне определялись через угол наклона ударной волны, по которому проводились глобальные итерации. Решение находилось на основе единого алгоритма вдоль всей поверхности тела. Принципиальное отличие метода ГИ от метода установления состоит в том, что для получения последующей итерации необходимы параметры не всего поля течения, а лишь поле давления и отход ударной волны.

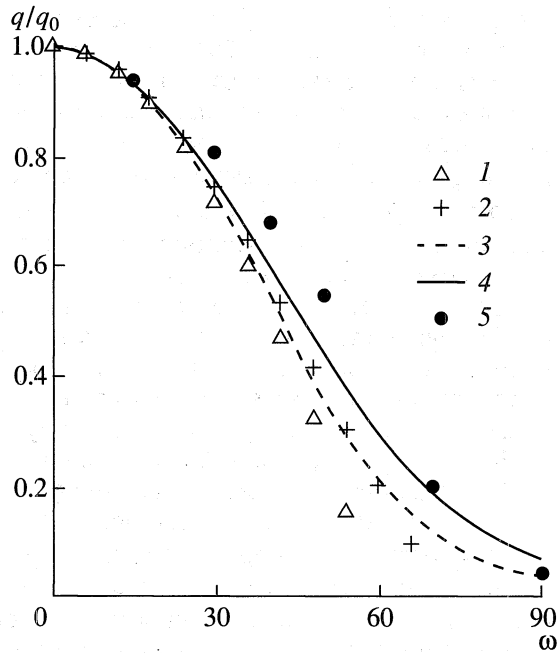
Каждая ГИ состоит из двух этапов. На первом этапе по заданному полю давления вычисляются члены  $(\xi^1)^\alpha D_\alpha P$  и на основе центральных разностей с точностью  $O(\delta\xi^1)^2 + O(\delta\xi^2)^2$  производные от отхода ударной волны  $x_s^3$ , необходимые для определения нормальной составляющей вектора скорости набегающего потока на ударной волне  $u_\infty^3$ . На втором этапе система уравнений (10)–(13) при уже заданном продольном градиенте давления с граничными условиями (15)–(16) с также заданной нормальной составляющей скоростью внешнего потока численно интегрируется маршевым методом с использованием неявной конечно-разностной схемы, имеющей порядок аппроксима-

ции  $O(\delta\zeta)^4 + O(\delta\xi^1) + O(\delta\xi^2)^2$  и представляющей собой обобщение схемы [29] на трехмерный случай. В связи с нелинейностью исходной задачи использовались итерации (локальные) при получении решения в ударном слое на текущей окружности  $\xi^1 = \text{const}$ . При этом производные по маршевому направлению  $\xi^1$  аппроксимировались разностями назад, а по окружной координате  $\xi^2$  – центральными разностями, вычисленными на основе предыдущей локальной итерации на расчетной “окружности” (на начальной локальной итерации по нелинейности производные в окружном направлении вычислялись также по центральным разностям, но с предыдущей “окружности”). Каждое из уравнений, приведенных в (10)–(13), сводилось к системе уравнений первого порядка по координате  $\zeta$  и решалось в каждой точке ( $\xi^1 = \text{const}$ ,  $\xi^2$ ) поочередно. Локальная итерация считалась завершенной после прохождения всех точек расчетной “окружности”  $\xi^1 = \text{const}$ . В конце каждой локальной итерации с помощью алгоритма циклической прогонки [30] определялась величина  $\Delta(\xi^1, \xi^2)$  и осуществлялся переход к следующей локальной итерации на данной “окружности” пока не выполнялось условие сходимости. Затем совершался шаг по маршевой координате. В результате прохождения всей расчетной области определялись новое поле давления и новое положение ударной волны.

По окончании каждой ГИ проверялось выполнение критерия установления решения, который считался выполненным (тогда решение задачи заканчивалось), если максимальное отличие давления во всех узлах разностной сетки и отхода ударной волны на текущей ГИ от предыдущей ГИ (невязка) не превышало заданную величину  $\delta$ .

Уравнения для концентраций компонент (13) решались на основе подхода Гершбейна [31], позволяющего избежать предварительного разрешения соотношений Стефана–Максвелла относительно диффузионных потоков. Вначале по заданным значениям  $c_i$  уравнения неразрывности (14) разрешались как уравнения первого порядка относительно диффузионных потоков  $X_i$ , затем вычислялись коэффициенты  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  по формулам (7) как функции  $c_i$  и  $X_i$  и, наконец, уравнения неразрывности (14) совместно с (15) – граничными условиями на теле и на ударной волне решались как двухточечная краевая задача для уравнений второго порядка относительно  $c_i$ .

Корректность задачи Коши для каждой ГИ обеспечивалась аппроксимацией производной от давления по маршевой координате по значениям давления в точках вверх по потоку, вычисленным на предыдущей ГИ, с последующим сглаживанием. Так, в [12] сглаживание формы ударной волны



**Рис. 1.** Распределения теплового потока, отнесенного к значению в критической точке, в зависимости от центрального угла. Сфера: 1–4 – расчетные результаты. 1 – расчет по модели ТВУС, 2 – по модели ПВУС, 3 – по модели ВУС с использованием метода ГИ по давлению, 4 – по модели ВУС с ГИ по давлению и форме отхода ударной волны, 5 – экспериментальные данные [32].

производилось за счет аппроксимации ее отрезком ряда. Этот способ в решаемой задаче дал положительные результаты только для осесимметричных течений. В [13] давление и составляющие его градиента сглаживались с помощью В-сплайнов по всей расчетной области. Такая методика позволяет и в данной задаче достичь желаемого. Но, как было выяснено в результате многочисленных расчетов, для достижения устойчивости достаточно сглаживать глобально итерированные функции (отход и давление) лишь в окрестности критической линии, учитывая характер поведения этих функций (равенство нулю производных на линии торможения). В результате производные по маршевой координате  $\xi^1$  от переходящих в ГИ функций на равномерной сетке ( $i = 1, \dots, I$ ) с шагом  $h$  аппроксимировались следующим образом:

$$(D_1 F)_i = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2h} \quad (i = 3, \dots, I-1),$$

$$(D_1 F)_I = \frac{F_{I-2} - 4F_{I-1} + 3F_I}{2h},$$

$$((\xi^1)^{-1} D_1 F)_1 = \frac{9((\xi^1)^{-1} D_1 F)_3 - 4((\xi^1)^{-1} D_1 F)_4}{5},$$

$$((\xi^1)^{-1} D_1 F)_2 = \frac{8((\xi^1)^{-1} D_1 F)_3 - 3((\xi^1)^{-1} D_1 F)_4}{5},$$

где  $F_i$  – значение функции  $P$  или  $x_s^3$  при  $\xi^1 = h(i-1)$ .

Метод ГИ требует задания начальных поля давления и формы поверхности ударной волны, причем от способа задания этих начальных данных существенно зависит сходимость как внутренних (локальных) итераций, так и собственно ГИ. Кроме того, успешное получение решения в окрестности линии торможения также зависит от хорошего начального решения в этой точке  $\xi^1 = 0$ . В данном случае начальные поле давления и отход ударной волны являлись решением аналогичной задачи, но для однородного газа. За начальное распределение искомых функций в критической точке принималось решение в критической точке соответствующей задачи в рамках модели ПВУС для многокомпонентной смеси газов [28]. Для повышения точности расчетов при больших числах Рейнольдса использовалась неравномерная по координате  $\zeta$  (сгущающаяся к поверхности тела) разностная сетка. В этом случае для выделения тонкого пограничного слоя у поверхности тела применялся итерационный процесс по адаптации сетки к решению, который на основе решения уравнений ПВУС в критической точке обеспечивал приблизительно равномерное приращение искомых функций на каждом шаге по координате  $\zeta$ . В дальнейшем полученное в критической точке распределение узлов по  $\zeta$  использовалось во всех остальных расчетных узлах обтекаемой поверхности. Начальное поле давления также пересчитывалось на эту неравномерную в поперечном направлении сетку.

Такое задание начальных данных позволило решить поставленную задачу за 12–15 ГИ при значении невязки  $\delta = 0.001$  в зависимости от формы обтекаемого тела.

Особенностью предложенного численного метода является то, что при своей реализации он не требует наличия в потоке плоскостей симметрии (и в связи с этим позволяет проводить расчеты для самого общего случая обтекания тел под углами атаки и скольжения), а при вычислении коэффициентов трения и теплообмена на поверхности тела не требуется численно дифференцировать полученные профили скорости и температуры поперек ударного слоя.

**Обсуждение результатов.** Вначале рассмотрим пример обтекания сферы. Точка траектории определяется следующими параметрами:

$$H = 70 \text{ км}, \quad V = 7.2 \text{ км/с}, \quad (20)$$

поверхность сферы считается идеально каталитической и  $T_w = 0.1$ , характерный линейный размер задачи  $L = 0.5$  м.

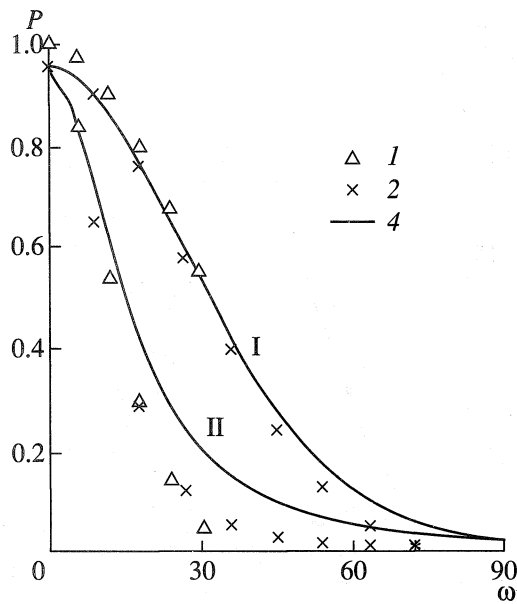


Рис. 2. Распределения давления по поверхности трехосного эллипсоида с соотношением полуосей 1 : 0.7 : 0.3. I –  $\xi^2 = 0$ , II –  $\xi^2 = 0.5\pi$ . 1, 2, 4 то же, что на рис. 1.

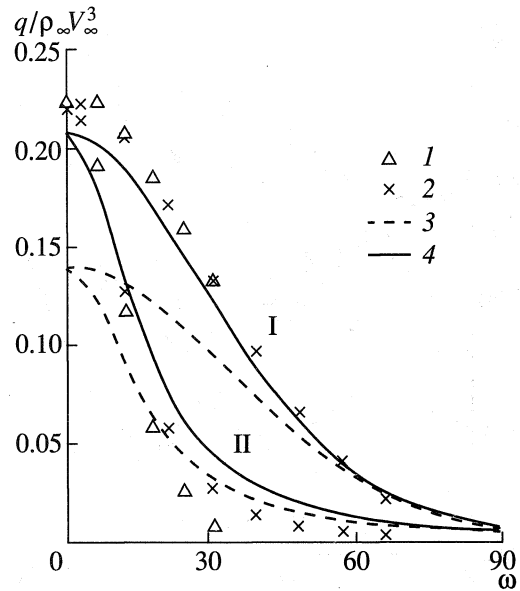


Рис. 3. Распределения безразмерного теплового потока по поверхности трехосного эллипсоида с соотношением полуосей 1 : 0.7 : 0.3. I –  $\xi^2 = 0$ . II –  $\xi^2 = 0.5\pi$ . 1, 2, 4 то же, что на рис. 1. 3 – расчет по модели ВУС с ГИ по давлению и форме отхода ударной волны для случая нейтральной поверхности.

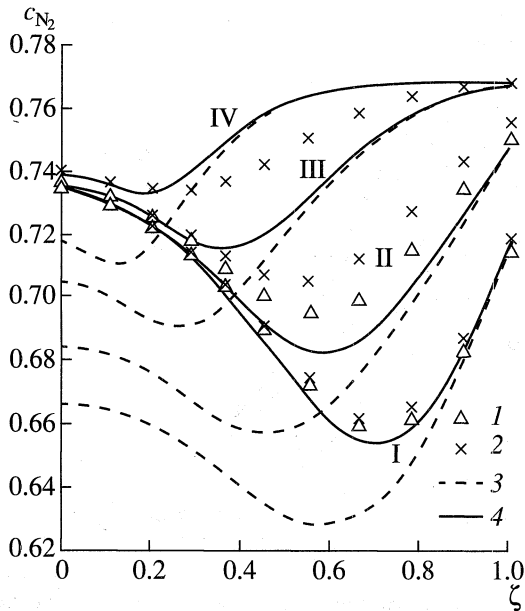
В моделях ТВУС и ПВУС продольный градиент давления аппроксимируется по формуле (19), кроме того, в ТВУС давление определяется по формуле (18). Возникает вопрос о влиянии этих допущений на окончательное решение задачи. Для ответа на поставленный вопрос было проведено сравнение результатов, полученных во всех трех моделях, причем ГИ в ВУС проводились и только по полю давления, и по полю давления совместно с учетом изменения поверхности ударной волны. На рис. 1 представлены зависимости теплового потока  $q$  к поверхности, отнесенного к своему значению в критической точке, от центрального угла во всех четырех случаях. Здесь и далее 1 – это результаты, полученные в рамках модели ТВУС, 2 – ПВУС, 3 – ВУС с использованием метода ГИ по давлению, 4 – ВУС с ГИ по давлению и по форме ударной волны. Видно, что уточнение положения ударной волны существенно влияет на распределение теплового потока. Результаты, полученные при решении уравнений ПВУС, лучше согласуются с данными, полученными методом ГИ, по сравнению с ТВУС. Кроме того, расчетная область вдоль обтекаемой поверхности в модели ПВУС больше, чем в ТВУС ( $70^\circ$  и  $56^\circ$  по центральному углу соответственно), что отмечалось и ранее. Это преимущество ПВУС еще более заметно в следующих приводимых примерах обтекания трехосных эллипсоидов. На этом же рисунке приводятся экспериментальные данные [32] – (5). Вопрос о достоверности модели ПВУС подробно рассмотрен в [25], где даны

сравнения полученных результатов по тепловому потоку и давлению на сфере и эллипсоиде с экспериментом и с расчетами по более сложным газодинамическим моделям других авторов.

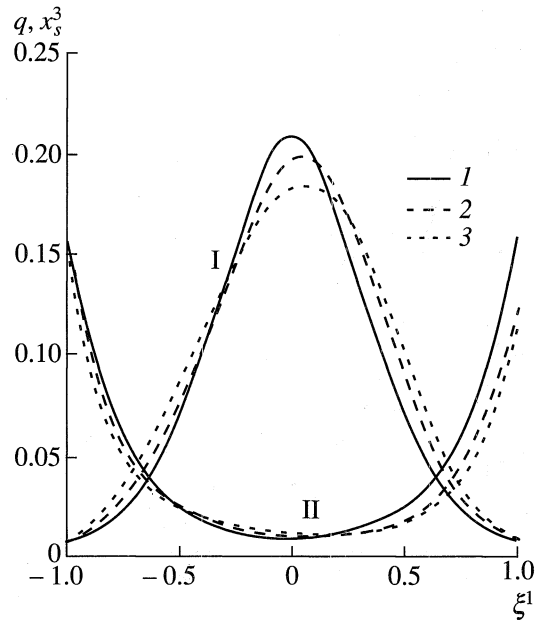
Рассмотрим обтекание трехосного эллипсоида с соотношением полуосей 1 : 0.7 : 0.3 при тех же условиях (20). При нулевом угле атаки большая ось эллипсоида совпадает с направлением набегающего потока; плоскость симметрии течения  $\xi^2 = 0$  совпадает с плоскостью симметрии тела (полуоси сечения относятся как 1 : 0.7), другая плоскость симметрии  $\xi^2 = 0.5\pi$  соответствует полуосям 1 и 0.3; маршевая координата связана с центральным углом соотношением  $\omega = 0.5\pi\xi^1$ . Распределения давления по поверхности тела и безразмерного теплового потока к ней, отнесенного к  $\rho_\infty V_\infty^3$ , в этих плоскостях симметрии в зависимости от центрального угла приведены соответственно на рис. 2 и 3 (I –  $\xi^2 = 0$ , II –  $\xi^2 = 0.5\pi$ ). Давление в критической точке в моделях ПВУС и ВУС совпадают, но различие в распределениях  $(\xi^1)^{-\alpha} D_\alpha P$  по этим моделям в этой точке существенное (в 2 раза), что оказывает влияние и на величину теплового потока в этой точке (отличие 5%). Для другого предельного случая (нейтральная поверхность) полученные описанным методом распределения теплового потока представлены на рис. 3 штриховыми линиями.

Локальные характеристики течения представлены на рис. 4. Здесь изображены распределения





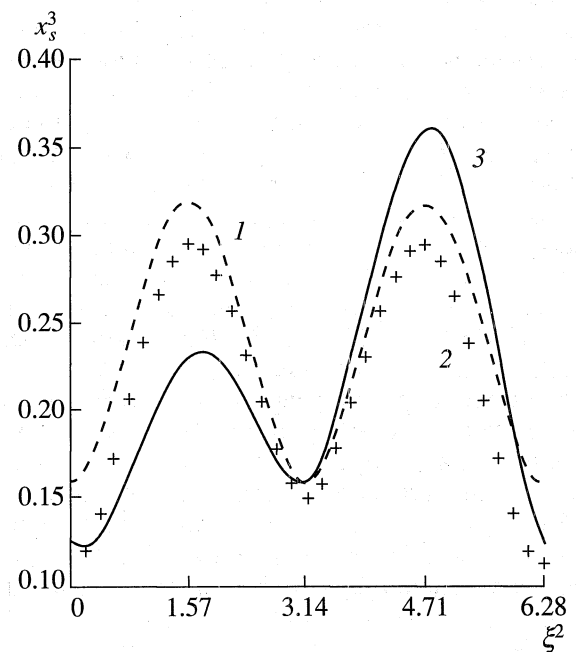
**Рис. 4.** Распределения концентраций молекул азота в поперечном сечении слоя в плоскости симметрии  $\xi^2 = 0.5\pi$  трехосного эллипсоида с соотношением полуосей 1 : 0.7 : 0.3 при значениях маршевой координаты  $\xi^1 = 0, 0.2, 0.5$ , I–IV соответственно. 1, 2, 4 то же, что на рис. 1. 3 – расчет по модели ВУС с ГИ по давлению и форме отхода ударной волны для случая нейтральной поверхности.



**Рис. 5.** Распределения в зависимости от маршевой координаты I – безразмерного теплового потока и II – отхода ударной волны в сечении течения плоскостью симметрии при обтекании трехосного эллипсоида с соотношением полуосей 1 : 0.7 : 0.3. 1–3 – расчет по модели ВУС с ГИ по давлению и форме отхода ударной волны. 1 – угол атаки  $\alpha = 0^\circ$ , 2 –  $30^\circ$ , 3 –  $45^\circ$ .

концентраций молекул азота  $c_{N_2}(\zeta)$  поперек ударного слоя в плоскости симметрии  $\xi^2 = 0.5\pi$  при значениях маршевой координаты  $\xi^1 = 0, 0.2, 0.5, 1$  (I–IV соответственно). Видно заметное различие в этих распределениях для разных моделей обтекания, увеличивающееся с расстоянием от линии торможения. Здесь также штриховыми линиями изображены распределения  $c_{N_2}(\zeta)$  для случая нейтральной поверхности. Отход ударной волны и давление во всех точках расчетной области не зависят от рассмотренных каталитических свойств поверхности обтекаемого тела.

Некоторые результаты, полученные при обтекании этого же эллипсоида под разными углами атаки в рамках модели ВУС, представлены на рис. 5. Здесь I соответствуют распределениям теплового потока, а II – отходу ударной волны в сечении течения плоскостью симметрии, причем отрицательным значениям маршевой координаты отвечают точки, лежащие на “луче”  $\xi^2 = \pi$ , а положительным –  $\xi^2 = 0$ . Кривые 1 относятся к углу атаки  $\alpha = 0^\circ$ , 2 –  $\alpha = 30^\circ$ , 3 –  $\alpha = 45^\circ$ . При приведенных граничных условиях отход ударной волны в критической точке растет, а тепловой поток уменьшается с увеличением  $\alpha$ , т.е. с уменьшением средней кривизны поверхности в этой точке.



**Рис. 6.** Распределение отхода ударной волны в зависимости от  $\xi^2$  в миделевом сечении трехосного эллипсоида с соотношением полуосей 1 : 0.7 : 0.3 при углах атаки и скольжения: 1 –  $\alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ$ ; 2 –  $\alpha = 45^\circ, \beta = 0^\circ$ ; 3 –  $\alpha = 30^\circ, \beta = 15^\circ$ . 1–3 – расчет по модели ВУС с ГИ по давлению и форме отхода ударной волны.

Возможности описанного выше метода в чисто пространственном случае иллюстрирует рис. 6, где приведены распределения  $x_s^3(1, \xi^2)$ , т.е. в миделевом сечении эллипсоида, в случае  $\alpha = 0^\circ, \beta = 0^\circ - 1, \alpha = 45^\circ, \beta = 0^\circ - 2, \alpha = 30^\circ, \beta = 15^\circ - 3$  ( $\beta$  – угол скольжения). В последнем случае отсутствует любая симметрия.

В заключение отметим, что в результате многочисленных расчетов данный метод решения пространственных уравнений ВУС зарекомендовал себя как экономичный и устойчивый метод для самых общих случаев обтекания, т.е. когда в течении отсутствует какая-либо симметрия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 98-01-00298).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Davis R.T.* Numerical Solution of the Hypersonic Viscous Shock Layer Equations // AIAA J. 1970. V. 8. № 5. P. 843.
2. *Гершбейн Э.А., Пейгин С.В., Турский Г.А.* Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. механика жидкости и газа. 1985. Т. 19. С. 3.
3. *Пейгин С.В., Турский Г.А.* Трехмерные задачи сверх- и гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. механика жидкости и газа. 1988. Т. 22. С. 62.
4. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, 1996.
5. *Васильевский С.А., Турский Г.А.* О некоторых способах численного решения уравнений вязкого ударного слоя // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 87.
6. *Васильевский С.А., Турский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 5. С. 1058.
7. *Васильевский С.А., Турский Г.А.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Исследования по гиперзвуковой аэродинамике и теплообмену с учетом неравновесных химических реакций. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 5.
8. *Васильевский С.А., Турский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения полных уравнений вязкого ударного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 26. № 5. С. 741.
9. *Murray A.L., Lewis C.H.* Heat and Mass Transfer Effects on Three-Dimensional Viscous Shock-Layer Flows // AIAA Paper. 1978. № 844. P. 13.
10. *Murray A.L., Lewis C.H.* Hypersonic Three-Dimensional Viscous Shock-Layer Flows over Blunt Bodies // AIAA J. 1978. V. 16. № 12. P. 1279.
11. *Утюжников С.В.* Об одном численном методе решения уравнений вязкого ударного слоя в задаче пространственного обтекания тел вращения // Соврем. газодинамические и физико-химические модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена. М.: Изд-во МГУ, 1994. С. 44.
12. *Бородин А.И., Пейгин С.В.* Метод глобальных итераций для решения трехмерных уравнений вязкого ударного слоя // ТВТ. 1992. Т. 30. № 6. С. 1124.
13. *Бородин А.И.* О вычислении градиента давления в модели параболизированного вязкого ударного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 6. С. 1001.
14. *Swaninathan S., Kim H.D., Lewis C.H.* Nonequilibrium Viscous Shock Layer Flows over Blunt Sphere-Cones at Angle of Attack // J. Spacecraft and Rockets. 1983. V. 20. № 4. P. 331.
15. *Гершбейн Э.А.* К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува // Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. С. 144.
16. *Miner E.W., Lewis C.H.* Hypersonic Ionizing Air Viscous Shock-Layers over Nonanalytic Blunt Bodies // NASA-CR. 1975. № 2550.
17. *Wilke C.R.* A Viscosity Equation Gas Mixtures // J. Chem. Phys. 1959. V. 18. № 4. P. 517.
18. *Mason E.A., Saxena S.C.* Approximate Formula for the Thermal Conductivity // Phys. Fluids. 1958. V. 1. № 5.
19. *Гурвич Л.В., Вейц И.А., Медведев В.А.* Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Т. 1. М.: Наука, 1978.
20. *Masek R.V., Hender D., Forney J.A.* Evaluation of Aerodynamic Uncertainties for Space Shuttle // AIAA Paper. 1973. № 737.
21. *Бородин А.И., Пейгин С.В.* Пространственный тонкий вязкий ударный слой при отсутствии в течении плоскостей симметрии // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 150.
22. *Турский Г.А.* К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим газом при наличии вдува. Тр. Ин-та мех. МГУ. 1975. № 39. С. 5.
23. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
24. *Cheng H.K.* Hypersonic Shock-Layer Theory of the Stagnation Region at Low Reynolds Number // Proc. 1961 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press., 1961. P. 161.
25. *Бородин А.И., Пейгин С.В.* Пространственное обтекание затупленных тел в рамках модели параболизированного вязкого ударного слоя // Математическое моделирование. 1993. Т. 5. № 1. С. 16.
26. *Бородин А.И., Пейгин С.В.* Модель параболизированного вязкого ударного слоя для исследования пространственного гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа // ТВТ. 1993. Т. 31. № 6. С. 925.

27. *Бородин А.И., Казаков В.Ю., Пейгин С.В.* Численное моделирование химически неравновесных течений в пространственном вязком ударном слое около тел с каталитической поверхностью // Математическое моделирование. 1989. Т. 1. № 8. С. 12.
28. *Бородин А.И., Казаков В.Ю., Пейгин С.В.* Моделирование многокомпонентных химически неравновесных течений в рамках модели параболизированного пространственного вязкого ударного слоя // Математическое моделирование. 1996. Т. 8. № 10. С. 3.
29. *Петухов И.В.* Численный расчет двухмерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 305.
30. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
31. *Гершбейн Э.А.* Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 1. С. 64.
32. *Заварзина И.Ф.* Экспериментальные исследования локальных тепловых потоков на сфере и сферическом притуплении осесимметричного тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 157.