

Г. Х. СИНДАЛОВСКИЙ

**О КОНГРУЭНТНОЙ И АСИМПТОТИЧЕСКОЙ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 I 1963)

1. Пусть $f(x)$ — действительная функция, определенная на интервале (a, b) , E — некоторое множество точек x интервала (a, b) , а Q — множество точек h , имеющее нуль своей предельной точкой.

Назовем Q -производной функции $f(x)$ в точке $x \in E$ предел

$$f'_Q(x) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in Q} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что множество Q берется одним и тем же для всех рассматриваемых значений x ($x \in E$). В том случае, если конечная Q -производная $f'_Q(x)$ существует для всех $x \in E$, мы будем говорить, что $f(x)$ Q -дифференцируема на E или дифференцируема на E относительно конгруэнтных множеств. Верхнее и нижнее Q -производные числа функции $f(x)$ определяются следующим образом:

$$\bar{f}'_Q(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0, h \in Q} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \underline{f}'_Q(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0, h \in Q} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

В работах (3, 4) нами было найдено условие (необходимое и достаточное), которое следует наложить на множество Q , для того, чтобы из Q -дифференцируемости $f(x)$ (или из конечности Q -производных чисел) на множестве E положительной меры следовала почти всюду на E обыкновенная дифференцируемость. В классе измеримых функций $f(x)$ это условие таково:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\text{mes } Q \cdot (-\delta, \delta)}{2\delta} > 0;$$

для непрерывных же функций оно значительно слабее:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\text{mes } \bar{Q} \cdot (-\delta, \delta)}{2\delta} > 0$$

(здесь \bar{Q} — замыкание Q). Теперь мы ставим следующий вопрос.

Каким должно быть множество Q (необходимое и достаточное условие) для того, чтобы Q -дифференцируемость функции $f(x)$ (или даже выполнимость одного из неравенств $\bar{f}'_Q(x) < +\infty$, $\underline{f}'_Q(x) > -\infty$) в каждой точке множества положительной меры влекла за собой асимптотическую дифференцируемость $f(x)$ почти всюду на этом множестве.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что множество Q принадлежит классу (D) , если из него можно выделить такую последовательность точек $h_n \in Q$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{h_{n+1}}{h_n} \right| > 0^*$.

* Множество Q , принадлежащее классу (D) , может быть таким, что ни его часть, лежащая справа от нуля, ни его часть, лежащая слева от нуля, в отдельности не будут принадлежать классу (D) .

Множество Q , не принадлежащее классу (D) , может, тем не менее, иметь верхнюю плотность в нуле, равную 1: $\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\text{mes } Q \cdot (-\delta, \delta)}{2\delta} = 1$, т. е. быть достаточно «густым».

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — измеримая на интервале (a, b) функция, а множество Q принадлежит классу (D) . Тогда условие $\bar{f}'_Q(x) < +\infty$ либо $\underline{f}'_Q(x) > -\infty$ в каждой точке x множества $E \subset (a, b)$ положительной меры влечет за собой асимптотическую дифференцируемость $f(x)$ почти всюду на этом множестве.

Для всякого же множества Q , не принадлежащего классу (D) , можно построить непрерывную на интервале (a, b) функцию $f(x)$, которая имеет конечную Q -производную и не имеет асимптотической производной в каждой точке некоторого множества $\mathcal{E} \subset (a, b)$ положительной меры (мера \mathcal{E} может быть сделана сколь угодно близкой к $b - a$).

Как видно из теоремы 1, решение поставленного вопроса оказалось одинаковым и для класса измеримых и для класса непрерывных функций.

Заметим, что требование измеримости $f(x)$ в первой части теоремы 1 нельзя снять для всякого множества Q из класса (D) . Существуют такие множества Q класса (D) , для которых это требование необходимо. Такими множествами могут быть даже счетные последовательности. С другой стороны, можно определить такие Q из класса (D) , для которых требование измеримости $f(x)$ лишнее. (Например, Q — интервал, содержащий 0, или интервал с концом в 0).

Интересно отметить то обстоятельство, что для последовательностей $\{h_n\}$, быстро стремящихся к 0, наличие конечного предела отношения $\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$ (при $h_n \rightarrow 0$; $\{h_n\}$ не зависит от x) на множестве положительной меры не влечет за собой даже асимптотической дифференцируемости $f(x)$ где-либо на этом множестве, например в случае, когда $\{h_n\} = Q$ стремится к 0 быстрее геометрической прогрессии, т. е. $|h_{n+1}| = o(|h_n^2|)$.

2. Известно, что обыкновенная производная $f'(x)$ не может равняться бесконечности (определенного знака) в каждой точке множества положительной меры. Это доказано Н. Н. Лузиным^(1,2). Обыкновенную производную можно считать Q -производной $\bar{f}'_Q(x)$ относительно конгруэнтных множеств, принимая за Q любой интервал, содержащий 0. Естественно поставить вопрос, при каких условиях (относительно строения множества Q) возможно равенство $\bar{f}'_Q(x) = +\infty$ на множестве E (точек x) положительной меры и при каких условиях этого быть не может*. Полное решение этого вопроса дается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ измерима на (a, b) , а множество Q принадлежит классу (D) . Тогда множество $E \subset (a, b)$ всех точек x , где выполняется равенство $\bar{f}'_Q(x) = +\infty$, имеет меру 0.

Для всякого же множества Q , не принадлежащего классу (D) , можно построить непрерывную на интервале (a, b) функцию $f(x)$, у которой $\bar{f}'_Q(x) = +\infty$ на некотором множестве \mathcal{E} положительной меры (мера \mathcal{E} может быть сделана сколь угодно близкой к $b - a$).

Первая часть этой теоремы обобщает упомянутый ранее результат Н. Н. Лузина.

В теореме 2, так же как в теореме 1, получаем одинаковое решение вопроса и в классе измеримых и в классе непрерывных функций. Требование измеримости $f(x)$ для всех множеств Q класса (D) снять нельзя.

Так как, согласно первой части теоремы 2, для нижнего Q -производного числа равенство $\underline{f}'_Q(x) = +\infty$ возможно лишь на множестве нулевой меры (если Q из класса (D)), то условие: $\bar{f}'_Q(x) < +\infty$ либо $\underline{f}'_Q(x) > -\infty$ в теореме 1 равносильно требованию конечности хотя бы одного из Q -производных чисел.

* Равенство $\bar{f}'_Q(x) = +\infty$ в этой проблеме, естественно, можно заменить на $\bar{f}'_Q(x) = -\infty$ или на $|\bar{f}'_Q(x)| = +\infty$.

Согласно второй части теоремы 2, для каждой последовательности $\{h_n\}$, образующей множество, не принадлежащее классу (D) , в частности стремящейся к нулю быстрее геометрической прогрессии, существует непрерывная функция $f(x)$ со стремящимся к $+\infty$ разностным отношением на множестве положительной меры: $\lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = +\infty$ (подчеркиваем независимость $\{h_n\}$ от x).

3. В заключение отметим, что для Q -производных чисел неверна (по крайней мере, для множеств Q , не принадлежащих классу (D)) теорема, аналогичная теореме Н. Н. Лузина — А. Данжуа об обыкновенных производных числах.

Согласно теореме Н. Н. Лузина — А. Данжуа верхнее и нижнее (например, правые) производные числа Дини не могут быть конечными и различными в каждой точке множества положительной меры. Однако для Q -производных чисел такое явление возможно.

Т е о р е м а 3. Если множество Q не принадлежит классу (D) , то можно построить непрерывную функцию $f(x)$ на интервале (a, b) , которая в каждой точке некоторого множества $\mathcal{E} \subset (a, b)$ положительной меры будет иметь неравные конечные Q -производные числа $-\infty < \underline{f}'_Q(x) < \bar{f}'_Q(x) < +\infty$ (например, $\bar{f}'_Q(x) = 1, \underline{f}'_Q(x) = -1$) и не будет, следовательно, иметь Q -производной $f'_Q(x)$. Мера множества \mathcal{E} может быть сделана сколь угодно близкой к $b - a$.

Теорема 3 остается справедливой, если в ее формулировке условие $-\infty < \underline{f}'_Q(x) < \bar{f}'_Q(x) < +\infty$ заменить на любое из следующих условий:

- 1) $-\infty = \underline{f}'_Q(x) < \bar{f}'_Q(x) = +\infty$;
- 2) $-\infty < \underline{f}'_Q(x) < \bar{f}'_Q(x) = +\infty$;
- 3) $-\infty = \underline{f}'_Q(x) < \bar{f}'_Q(x) < +\infty$ *.

Относительно множеств Q из класса (D) мы можем сказать лишь следующее:

Если Q удовлетворяет дополнительно условию $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\text{mes } Q \cdot (-\delta, \delta)}{2\delta} > 0$, а $f(x)$ — измеримая функция (либо $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\text{mes } \bar{Q} \cdot (-\delta, \delta)}{2\delta} > 0$ в случае непрерывной $f(x)$), то условие $-\infty < \underline{f}'_Q(x) < \bar{f}'_Q(x) < +\infty$ на множестве положительной меры влечет за собой Q -дифференцируемость почти всюду на этом множестве (и даже $f'_Q(x) = f'(x)$).

Это следует из теорем 2 и 4 работы (3).

Поступило
10 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Н. Лузин, Матем. сборн., 28, в. 2, 266 (1912). ² Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, 1951, стр. 278. ³ Г. Х. Синдаловский, ДАН, 134, № 6, 1305 (1960). ⁴ Г. Х. Синдаловский, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, 125 (1962).

* Как следует из теоремы 2, для множеств Q , не принадлежащих к классу D , возможны также равенства $\underline{f}'_Q(x) = +\infty$ или $\bar{f}'_Q(x) = -\infty$ на множестве положительной меры.