С. А. Ложкин, О глубине функции алгебры логики в произвольном полном базисе,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 2, 80–83

https://www.mathnet.ru/vmumm1997

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.95

С. А. Ложкин

О ГЛУБИНЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОЛНОМ БАЗИСЕ

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов (СФЭ) над базисом Б, $Б=\{E_i\}_{i=1}^r$, где элемент E_i, $i=1,\ldots,r$, имеет глубину (задержку) T_i, $T_i>0$, и реализует функцию алгебры логики (ФАЛ) φ_i, существенно зависящую от k_i переменных, т. е. $E_i=\langle\varphi_i(x_1,\ldots\ldots,x_{k_i}),T_i\rangle$. Глубина цепи из последовательно соединенных элементов Б определяется как сумма глубин этих элементов, а глубина $T(\Sigma)$ СФЭ Σ — как максимальная из глубин ее цепей (ср. [1]). Будем предполагать, что система базисных ФАЛ $\{\varphi_i\}_{i=1}^r$ полна в P_2. При этом предположении для любой ФАЛ f обычным образом определяется ее глубина $T_Б(f)$ в базисе Б, а для $n=1,2,\ldots$ вводится функция Шеннона

$$T_Б(n)=\max_{f(x_1,\ldots,x_n)} T_Б(t).$$

Из [1] следует, что

$$T_Б(n)\leqslant\tau_Б n+O(\log n),\tag{1}$$

где $\tau_Б=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{T_i/\log k_i\}$. С другой стороны, в силу того что $T_Б(f)$ всегда достигается на формуле, обычная мощностная нижняя оценка для $T_Б(n)$ имеет вид

$$T_Б(n)\geqslant\tau_Б(n-\log\log n)-o(1).\tag{2}$$

Для базиса $Б_0=\{\langle xy,1\rangle,\langle x\vee y,1\rangle,\langle\bar{x},1\rangle\}$ оценки (1), (2) сближались рядом авторов (см., например, [2—4]), причем в [4] было доказано, что

$$T_{Б_0}(n)=\,]n-\log\log n\pm o(1)[\,.\tag{3}$$

Там же соотношения типа (3) были получены и для ряда других двухместных базисов. Отметим, что верхние оценки в [3, 4] устанавливались на базе метода синтеза формул [5] и существенно использовали специфику базиса $Б_0$ или подобных ему базисов. В настоящей работе на основе специальных разбиений единичного куба из [6] и обобщенного разложения из [1] доказывается, что для произвольного полного базиса Б справедливо неравенство

$$T_Б(n)\leqslant\tau_Б(n-\log\log n)+O(1).\tag{4}$$

Через B^n, $n=1,2,\ldots$, будем, как обычно, обозначать единичный n-мерный куб, а через $B^{n,s}$ — множество всех матриц из 0 и 1 с n столбцами и s строками. Каждой матрице M из $B^{n,s}$ будем сопоставлять множество $\hat{M}$, состоящее из всех различных наборов B^n, которые являются строками M, а также некоторое множество $X(M)$ из n булевских переменных, связанных со столбцами M. Матрицу M из $B^{n,s}$

будем называть *универсальной матрицей для ФАЛ* $\varphi(y_1, ..., y_l)$, если для любой ФАЛ g от $X(M)$ найдутся переменные $u_1, ..., u_l$ из $X(M)$ и константы $\sigma_1, ..., \sigma_l$ из B^1, такие, что ФАЛ $\varphi(u_1^{\sigma_1}, \dots, u_l^{\sigma_l})$ совпадает с ФАЛ g на $\hat{M}$. Обозначим через μ_t матрицу из $B^{2^t, t}$, все столбцы которой различны и расположены в порядке возрастания номеров.

Лемма. *Для любой ФАЛ φ, существенно зависящей от всех своих переменных $y_1, ..., y_l$, любого t, $t=1,2,...$, и N, $N \leqslant l \cdot t$, для ФАЛ φ во множестве $B^{q,N}$, где $q=l\cdot 2^t$, всегда найдется универсальная матрица.*

Доказательство. В силу существенной зависимости ФАЛ φ от переменной y_i, $i=1, ..., l$, найдутся константы $\alpha_{i,j}$, $j=1, ..., l$, из B^1, такие, что

$$\varphi(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i-1}, y_i, \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,l}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}.$$

Пусть матрица $M_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$, принадлежащая $B^{2^t, t}$, состоит из констант $\alpha_{i,j}$, если $i \neq j$, и равна μ_t при $i=j$. Очевидно, что матрица M, которая при всех $1 \leqslant i, j \leqslant l$ содержит матрицу $M_{i,j}$ в качестве подматрицы, расположенной в строках с номерами $(i-1)t+1, \dots, it$ и столбцах с номерами $(j-1)2^t+1, \dots, j2^t$, является универсальной для ФАЛ φ. Искомая матрица получается из M удалением любых $(tl-N)$ строк. Лемма доказана.

Элементарную конъюнкцию вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$, где $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in B^n$, будем обозначать через $\mathcal{K}_{\tilde{\sigma}}(x_1, \dots, x_n)$. Возьмем произвольную ФАЛ $f(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$, и покажем, что ее глубина $T_Б(f)$ удовлетворяет (4). Пусть $\tau_Б$ достигается на элементе E_p базиса Б и пусть $k=k_p$, $T=T_p$. Для каждого λ, $\lambda = 1, 2, \dots$, обозначим через $F^{(\lambda)}$ формулу с k^λ входами, которая представляет собой полное λ-ярусное дерево, построенное из элементов E_p. Введем натуральные параметры d, t, и пусть

$$\lambda =]\log_k(2^d/t)[, \quad l = k^\lambda, \quad b = l2^t, \quad a = n-b-d,$$

а ФАЛ $\varphi(y_1, \dots, y_l)$ — ФАЛ, реализуемая формулой $F^{(\lambda)}$. Разобъем переменные $\tilde{x}$ на группы:

$$\tilde{u} = (x_1, \dots, x_a), \quad \tilde{v} = (x_{a+1}, \dots, x_{a+b}), \quad \tilde{w} = (x_{a+b+1}, \dots, x_n).$$

Построим согласно лемме универсальную для ФАЛ φ матрицу M', $M' \in B^{b, 2^d}$, и пусть матрица M получается в результате приписывания к столбцам M' столбцов матрицы M'', представляющей собой транспонированную матрицу μ_d. Разобьем в соответствии с леммой 1 из [6] куб B^{b+d} на попарно не пересекающиеся множества $(\widehat{M_{\tilde{\beta}}})$, $\tilde{\beta} \in B^b$, где каждая матрица $M_{\tilde{\beta}}$, $M_{\tilde{\beta}} \in B^{b+d, 2^d}$, получается из M инвертированием некоторых столбцов ее подматрицы M' и поэтому является универсальной для ФАЛ φ. Пусть $X(M') = \tilde{v}$, $X(M'') = \tilde{w}$ и $\chi_{\tilde{\beta}}(\tilde{v}, \tilde{w})$, $\tilde{\beta} \in B^b$, — характеристическая ФАЛ множества $(\widehat{M_{\tilde{\beta}}})$. Обозначим через $g_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(\tilde{v})$, $\tilde{\alpha} \in B^a$, $\tilde{\beta} \in B^b$, ФАЛ вида $\varphi(x_{j_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{j_l}^{\sigma_l})$, где $(a+1) \leqslant j_i \leqslant a+b$, $\sigma_i \in B^1$ при всех $i = 1, \dots, l$, которая совпадает с ФАЛ $f(\tilde{\alpha}, \tilde{v}, \tilde{w})$ на множестве $(\widehat{M_{\tilde{\beta}}})$ и для которой по построению имеет место неравенство

$$T_Б(g_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}) \leqslant \lambda T + T_Б(\bar{x}). \tag{5}$$

Пусть далее

$$a=s'+s'',\ \tilde{z}'=(x_1,\ldots,x_{s'}),\ \tilde{z}''=(x_{s'+1},\ldots,x_a).$$

Для всех $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}\in B^b$, положим

$$g_{\tilde{\beta}}(\tilde{u},\tilde{v})=\bigvee_{\tilde{\alpha}''\in B^{s''}}\mathcal{K}_{\tilde{\alpha}''}(\tilde{z}'')\,g_{\tilde{\alpha}'',\tilde{\beta}}(\tilde{z}',\tilde{v}),\tag{6}$$

где

$$g_{\tilde{\alpha}'',\tilde{\beta}}(\tilde{z}',\tilde{v})=\bigvee_{\tilde{\alpha}'\in B^{s'}}\mathcal{K}_{\tilde{\alpha}'}(\tilde{z}')\,g_{(\tilde{\alpha}',\tilde{\alpha}''),\tilde{\beta}}(\tilde{v}).\tag{7}$$

Тогда, очевидно,

$$f(\tilde{x})=\bigvee_{\tilde{\beta}\in B^b}\chi_{\tilde{\beta}}(\tilde{v},\tilde{w})\,g_{\tilde{\beta}}(\tilde{u},\tilde{v}).\tag{8}$$

Схему, которая реализует ФАЛ f и глубина которой удовлетворяет (4), можно построить на основе (6)—(8) с использованием обобщенного разложения [1]. Действительно, из [1], в частности, следует, что для любой ФАЛ $g(\tilde{z},\tilde{y})$ вида $g(\tilde{z},\tilde{y})=\bigvee_{j=1}^{q}\chi_j(\tilde{z})\,g_j(\tilde{y})$, где никакие две различные ФАЛ χ_j, $j=1,\ldots,q$, от переменных $\tilde{z}=(z_1,\ldots,z_s)$ одновременно в единицу не обращаются, справедливо неравенство

$$T_Б(g)\leqslant\tau_Б\log q+\max\{T_Б(s),\ \max_{1\leqslant j\leqslant q}T_Б(g_j)\}+c'_Б,\tag{9}$$

а если $q=2^s$ и χ_j, $j=1,\ldots,2^s$, — различные элементарные конъюнкции от переменных $\tilde{z}$, то — неравенство

$$T_Б(g)\leqslant\tau_Б s+\max\{c''_Б\log s,\ \max_{1\leqslant j\leqslant q}T_Б(g_j)\}+c'_Б,\tag{10}$$

причем константы $c'_Б$, $c''_Б$ зависят только от базиса. Пусть

$$c''_Б\log s'\leqslant\lambda T,\ c''_Б\log s''\leqslant\tau_Б s'+\lambda T,\ T_Б(b+d)\leqslant\tau_Б a+\lambda T.\tag{11}$$

Применяя (10) с учетом (5), (11) сначала к ФАЛ $g_{\tilde{\alpha}'',\tilde{\beta}}$, представленным в виде (7), а затем к ФАЛ $g_{\tilde{\beta}}$, представленным в виде (6), и применяя, наконец, (9) к ФАЛ f, представленной в виде (8), получим

$$T_Б(f)\leqslant\tau_Б(a+b)+\lambda T+T_Б(\bar{x})+3c'_Б.\tag{12}$$

Нетрудно убедиться в том, что при

$$t=d=\left[\frac{1}{2}\log n\right],\ s'=2^{[\lambda T/c''_Б]}$$

неравенство $s'<a$ и соотношения (11) справедливы начиная с некоторого n, а поэтому из (12) следует (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект № 93-01-01-525.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками//Проблемы кибернетики. Вып. 23. М., 1970. 43—81.
2. McCall W. F., Paterson M. S. The depth of all Boolean functions//SIAM J. Comput. 1977. 6, N 2. 373—380.

3. Гашков С. Б. О глубине булевых функций//Проблемы кибернетики. Вып. 34. М., 1978. 265—268.
4. Ложкин С. А. О глубине функций алгебры логики в некоторых базисах//Ann. Univ. Sci. budapest. Sec. Comput. 1983. IV. 113—125.
5. Лупанов О. Б. О сложности универсальной параллельно-последовательной сети глубины 3//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1973. **133.** 127—131.
6. Ложкин С. А. О синтезе ориентированных контактных схем//Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и кибернетика. 1995. № 2. 36—42.

Поступила в редакцию
16.06.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 517.51

М. П. Королева

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛА ПЕРРОНА

В работе [1] В. А. Скворцов построил интеграл перроновского типа, соответствующий производной относительно последовательностей двоичных сетей и позволяющий вычислять коэффициенты всюду сходящихся рядов Хаара или Уолша как коэффициенты Фурье их сумм. Он же показал (см. [2]), что примитивная в смысле этого интеграла не обладает N-свойством Лузина. Е. С. Байгожин в [3] сузил этот интеграл: решая ту же задачу о вычислении коэффициентов, интеграл в то же время обладает N-свойством Лузина.

Аналогичные вопросы возникают в связи с построением интегралов, позволяющих вычислять коэффициенты сходящихся рядов по мультипликативным системам, обобщающим систему Уолша. При этом вместо двоичных используются P-ичные сети. Соответствующий перроновский интеграл, базирующийся на понятии производной относительно последовательностей P-ичных сетей (см. [4]), как и в двоичном случае, не обладает N-свойством. Более того, можно показать, что этот интеграл не обладает N-свойством даже в случае, когда подынтегральная функция в каждой точке является конечной производной относительно последовательностей P-ичных сетей от своего интеграла.

В данной заметке дается более узкое определение P-ичной производной и вводится соответствующий этой производной более узкий P-ичный интеграл, который, решая задачу вычисления коэффициентов для рядов по мультипликативной системе, обладает N-свойством на классе точных P-ичных производных.

Естественной областью определения мультипликативных систем является P-ичная группа, т. е. группа $G(P)$ целочисленных последовательностей $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, $0 \leqslant x_j \leqslant p_j - 1$, где $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — заданная последовательность натуральных чисел, $p_j \geqslant 2$ при всех $j \geqslant 1$, с групповой операцией $\oplus$, определяемой как покоординатное сложение по модулю p_j для j-й координаты. Если x_j истолковывать как j-й коэффициент P-ичного разложения некоторого числа из отрезка $[0, 1]$, то мы придем к геометрической модели группы $G(P)$ в виде «модифицированного» отрезка $[0, 1]_P^*$, в котором каждая P-ично-рациональная точка «раздваивается», соответствуя двум своим различным P-ичным разложениям. Отображение $\lambda_P : x \to \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}$, где $m_j = p_1 p_2 \ldots p_j$, переводит