Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 3

© 1991 г.

О ЕДИНИЧНЫХ КОМПОНЕНТАХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

С. П. Струнков

Изучаются арифметические соотношения для кратностей единичных компонент ограничений произвольного комплексного представления конечной группы на ее подгруппы. Некоторые полученные соотношения обобщают теорему делимости Эйлера

Введение

Пусть G — конечная группа, R — некоторое ее комплексное конечномерное представление, χ — характер представления R, H — подгруппа группы G. Целью настоящей работы является получение арифметических соотношений для чисел $c_\chi(H) = \frac{1}{|H|}\sum\limits_{x\in H}\chi(x)$, где $|H|$ — порядок группы H. О перспективности этого направления и содержательности результатов говорит тот факт, что на этом пути удается получить обобщение такого фундаментального утверждения, как теорема Эйлера, частным случаем которой является малая теорема Ферма. Содержащиеся в теоремах 1,2 соотношения для чисел $c_\chi(T)$ любой конечной группы и любого ее комплексного конечномерного представления превращаются в теорему Эйлера, если в качестве исходной группы взять циклическую группу, а в качестве исходного представления — сумму всех ее точных неприводимых представлений. Для того чтобы сделать доступными формулировки и доказательства результатов настоящей работы для широкого круга читателей, приведем необходимые сведения из теории представлений конечных групп.

Комплексным конечномерным представлением конечной группы G называется ее гомоморфизм в группу обратимых линейных операторов некоторого конечномерного линейного пространства V над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Самым простым примером представления группы G является единичное представление, т.е. сопоставление всем элементам группы G единичного оператора одномерного комплексного пространства. Представление группы G называется неприводимым, если в пространстве представления V нет нетривиальных инвариантных относительно G линейных подпространств, т.е. подпространств, которые были бы инвариантны относительно линейных операторов, соответствующих всем элементам группы G при заданном представлении. Так, единичное представление группы является неприводимым. По известной теореме Машке пространство V произвольного конечномерного комплексного представления конечной группы G разлагается в прямую сумму инвариантных относительно G подпространств $V_1, \ldots, V_{s'}$,

Ключевые слова: комплексные представления конечных групп, инварианты представлений конечных групп.

на каждом из которых представление группы G уже является неприводимым. Далее, два представления группы G называются эквивалентными, если в линейных пространствах этих представлений можно выбрать такие базисы, чтобы матрицы операторов, соответствующих одному и тому же элементу группы G в этих представлениях, совпадали для каждого элемента группы G. Число неприводимых неэквивалентных комплексных представлений конечной группы G конечно и равно числу классов сопряженных элементов в G.

Пусть R — некоторое конечномерное комплексное представление группы G. Характером представления R называется комплексная функция $\chi(g)$ на группе G, значение которой на элементе $g \in G$ равно следу линейного оператора, отвечающего элементу g в данном представлении R. Если R — единичное представление группы G, то $\chi(g) = 1$ для любого $g \in G$. В общем случае

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{r} c_i \hat{\chi}_i(g), \tag{1}$$

где $\chi_i(g)$ — характеры неприводимых неэквивалентных представлений группы G, r — число ее классов сопряженных элементов (если G — конечная группа), c_i — целые рациональные неотрицательные числа (число c_i называется кратностью вхождения неприводимого представления, имеющего характер χ_i, в представление R). Для характеров неприводимых комплексных представлений $\chi_i(g)$ конечной группы G основными являются следующие соотношения ортогональности

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, r), \tag{2}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (левая часть этого равенства называется скалярным произведением характеров χ_i и χ_j и обозначается (χ_i, χ_j)). Поэтому коэффициенты c_i в формуле (1) разложения $\chi(g)$ по системе неприводимых характеров выражаются следующим образом:

$$c_i = (\chi, \chi_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi_i(g)}. \tag{3}$$

Поэтому и число $c_\chi(T) = \frac{1}{|T|} \sum\limits_{g \in T} \chi(g)$ равно коэффициенту, с которым характер единичного представления входит в формулу (1) разложения характера χ представления R, но рассмотренного на подгруппе T как на самостоятельной группе, т.е. число $c_\chi(T)$ равно кратности единичного представления в ограничении R на подгруппу T. Подробнее с теорией представлений конечных групп можно ознакомиться в [1].

В настоящей работе устанавливаются различные арифметические соотношения, связывающие значения чисел $c_\chi(T)$ с разными подгруппами T группы G для заданного представления R с характером χ. В § 1 содержатся соотношения самого общего вида, т.е. без каких-либо ограничений на группы и представления. Основными здесь являются теоремы 1 и 2, которые обобщают теорему Эйлера. В § 2 получено неравенство для чисел $c_\chi(< a_i >)$, где $a_1, \ldots, a_n$ — образующие группы G, а также его обобщения. Мотивировку изучения чисел $c_\chi(T)$ с циклическими подгруппами T группы G предоставляет теорема 4, в которой дано выражение числа $c_\chi(H)$ для нециклической подгруппы H через $c_\chi(T)$ с циклическими подгруппами T. В § 3 в качестве приложения методов и результатов предыдущих параграфов дается положительное решение одного варианта ослабленной проблемы

Бернсайда для групп произвольной экспоненты с двумя образующими, в котором накладываются некоторые ограничения на числа $c_\chi(T)$ (но нет никаких ограничений на экспоненту группы). Частично результаты настоящей статьи анонсированы автором в [5]. Отметим, что исследования этой работы находятся в русле арифметического направления в теории групп и представлений групп, основные задачи которого сформулированы и развиты в работах В.П.Платонова (см.[2,3]). В работе А.Е.Залесского [4] указывается на важность информации о кратностях собственных значений операторов, отвечающих элементам групп Шевалле в их естественном представлении, в том числе и о кратностях единиц.

§ 1. Обобщения теоремы Эйлера

Множество S всех подгрупп заданной конечной группы G представляет собой частично упорядоченное множество по включению. Через $\mu(H,T)$, где H, T — подгруппы группы G, мы будем обозначать функцию Мебиуса этого множества S. Для произвольных подгрупп H,T она определяется рекуррентно при помощи следующих равенств: $\mu(H,H)=1$, $\mu(H,T)=-\sum\limits_{T\supset K\supseteq H}\mu(H,K)$ для $T\supset H$ и $\mu(H,T)=0$ в остальных случаях.

Пусть R — конечномерное комплексное представление конечной группы G,p — простое число. Тогда представление R можно редуцировать к представлению над конечным полем, а именно по представлению R группы G можно построить представление группы G над конечным полем характеристики p, т.е. гомоморфизм G в группу обратимых матриц с коэффициентами из конечного поля характеристики p. Это можно сделать при помощи, например, следующей процедуры (см.[1]). По известной теореме Р.Брауэра ([1], 41.1) представление R можно реализовать в некотором конечном расширении Φ поля рациональных чисел. Это поле Φ можно взять таким, чтобы в некотором базисе пространства V представления R матрицы операторов, соответствующих всем элементам группы G, имели своими коэффициентами целые алгебраические числа ([1], 75.4, упр.33.1). Пусть P — простой идеал кольца U целых алгебраических чисел поля Φ, соответствующий простому числу p. Тогда после факторизации кольца U по идеалу P элементам группы G будут соответствовать матрицы с коэффициентами из конечного поля $\overline{\Phi}=U/P$ характеристики p. Для нас будет особенно важен тот факт, что если p не делит порядок $|G|$ группы G, то комплексному неприводимому представлению будет соответствовать также неприводимое представление над полем характеристики p([1], § 84, замечание (1)).

Для данного комплексного представления R конечной группы G через $M(R)$ мы будем обозначать множество всех натуральных чисел a, представимых в виде $a=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_u^{k_u}$, где каждое p_i — простое число, взаимно-простое с порядком $|G|$ группы G, и представление R можно редуцировать к представлению над конечным полем, состоящем из $p_i^{k_i}$ элементов.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа, R — произвольное конечномерное комплексное представление группы G, имеющее характер χ. Тогда для любого $a\in M(R)$ справедливо соотношение*

$$\sum_{T\supseteq H}\mu(H,T)a^{c_\chi(T)}\equiv 0(\mathrm{mod}|N_G(H)/H|), \qquad (4)$$

в котором суммирование производится по всем подгруппам T группы G, содержащим H. Символ $N_G(H)$ означает нормализатор подгруппы H в группе G.

Доказательство. Возьмем некоторое число $p^k \in M(R)$, где p — простое число, и обозначим через $\overline{R}$ представление группы G, полученное из R редукцией к конечному полю порядка p^k. Это представление реализуется в линейном пространстве, содержащем $p^{k\chi(1)}$ элементов. Группа G переставляет элементы этого линейного пространства, поэтому мы получили в результате такой редукции представление группы G перестановками всех элементов этого конечного линейного пространства. Этому представлению группы G перестановками на множестве из $p^{k\chi(1)}$ элементов соответствует комплексное представление размерности $p^{k\chi(1)}$, которое мы будем обозначать через R_{p^k}. Пространство этого представления состоит из всевозможных линейных комбинаций всех элементов конечного линейного пространства (над полем из p^k элементов) с комплексными коэффициентами.

Если теперь $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_u^{k_u}$ — произвольное число, принадлежащее множеству $M(R)$, то ему мы сопоставим комплексное представление

$$R_a = R_{p_1^{k_1}} \otimes R_{p_2^{k_2}} \otimes \cdots \otimes R_{p_u^{k_u}}.$$

Через $w_\chi(g)$ мы будем обозначать значение характера этого представления на элементе $g \in G$.

Лемма 1. $w_\chi(g) = a^{c_\chi(<g>)}$.

Доказательство. Размерность пространства представления R_a равна $a^{\chi(1)}$ и его можно интерпретировать как представление G перестановками (над комплексным полем) на множестве, состоящем из $a^{\chi(1)}$ элементов, каждый элемент которого представим в виде упорядоченной последовательности $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_u)$, где θ_i — элемент пространства $\overline{V_i}$, состоящего из $p^{k_i\chi(1)}$ элементов (это пространство получается из пространства V представления группы G при редукции R к полю, состоящему из $p_i^{k_i}$ элементов). Значение $w_\chi(g)$ равно числу таких последовательностей $(\theta_1, \dots, \theta_u)$, для которых

$$(R_{p_1^{k_1}}(g)\theta_1, \dots, R_{p_u^{k_u}}(g)\theta_u) = (\theta_1, \dots, \theta_u),$$

т.е. $w_\chi(g)$ равно произведению значений характеров всех представлений $R_{p_i^{k_i}}$ на элементе g, т.е. осталось показать, что если $a = p^k \in M(R)$, где p — простое число, то $w_\chi(g) = p^{kc_\chi(g)}$.

Рассмотрим ограничение $\overline{R}_{<g>}$ на подгруппу $< g >$ представления $\overline{R}$, полученного из R редуцированием последнего к конечному полю порядка p^k. Значение $w_\chi(g)$ равно числу g-инвариантных элементов пространства $\overline{V}$ над полем F, в котором реализуется представление $\overline{R}$. Следовательно, $w_\chi(g) = p^{km_g}$, где m_g равно числу единичных компонент в представлении $\overline{R}_{<g>}$. Так как характеристика p поля F по условию взаимно-проста с порядком группы G, то в случае если F — поле разложения группы G, неприводимые неэквивалентные представления над полем F и над полем комплексных чисел взаимно-однозначно соответствуют друг другу при редукции комплексного представления к ненулевой характеристике ([1], § 84). Следовательно, $m_g = (\chi|_{<g>}, 1_{<g>})$. Если же поле F не является полем разложения группы G, то мы рассмотрим представление $\bar{R}^*$ группы G над алгебраическим замыканием F^* поля F. Так как представление $\bar{R}^*$ вполне приводимо, то из утверждения 29.6 [1] вытекает, что кратность вхождения единичной компоненты в представление $\overline{R}_{<g>}$ и $\bar{R}^*_{<g>}$ одинакова. Следовательно, и в этом случае $m_g = (\chi|_{<g>}, 1_{<g>})$, что завершает доказательство леммы 1.

Пусть T — произвольная подгруппа конечной группы G. Обозначим через $j(T)$ число всех T-инвариантных элементов в базисе пространства представления R_a, который переставляет каждый элемент группы G, т.е. число таких элементов $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_u)$, определенных в лемме 1, что $R_a(g)\theta = \theta$ для всех $g \in T$. Следующее утверждение является обобщением леммы 1.

Лемма 2. $j(T) = a^{c_\chi(T)}$.

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, наше утверждение легко сводится к случаю $a = p^k$ (p — простое число), в котором $R_a = R_{p^k}$ является представлением группы G перестановками на множестве всех элементов пространства представления $\overline{R}$ над полем F порядка p^k. Множество всех T-инвариантных элементов в пространстве представления $\overline{R}$ образует подпространство, поэтому их число равно p^{km_T}, где m_T — размерность этого подпространства. Если F является полем разложения подгруппы T, то m_T равно числу единичных компонент группы T в ограничении $\overline{R}_T$ представления $\overline{R}$ на подгруппу T, т.е.

$$m_T = \frac{1}{|T|} \sum_{x \in T} \chi(x).$$

В противном случае мы погрузим поле F в его алгебраическое замыкание F^* и, как и в лемме 1, с помощью утверждения 29.6 [1] получаем такое же равенство для m_T, т.е. $m_T = c_\chi(T)$ и в этом случае. Следовательно, для любого $a \in M(R)$

$$j(T) = a^{c_\chi(T)}$$

и лемма 2 доказана.

Пусть R — произвольное представление конечной группы G перестановками на некотором конечном множестве $M, H_1, H_2, \dots, H_v$ — все попарно несопряженные подгруппы группы G. Тогда множество M является объединением непересекающихся подмножеств, на каждом из которых действие группы G транзитивно и, следовательно, эквивалентно сдвигам G левых смежных классов группы G по одной из подгрупп H_i. Пусть подгруппа H сопряжена с одной из подгрупп H_i. Обозначим через f число G-орбит во множестве M, в каждой из которых подгруппа H является стабилизатором некоторой точки.

Лемма 3. $f = \frac{|H|}{|N_G(H)|} \sum_{T \supseteq H} \mu(H,T) j(T)$.

Доказательство. H-инвариантный элемент α множества M мы будем называть точно H-инвариантным, если α не является T-инвариантным ни для какой подгруппы T группы G, содержащей H. Число всех точно H-инвариантных элементов множества M будем обозначать через $\sigma(H)$. Если подгруппа T содержит подгруппу H, то каждый T-инвариантный элемент множества M является H-инвариантным, поэтому

$$\sigma(H) = j(H) - \sum_{T \supset H} \sigma(T).$$

Применяя эту формулу к каждому слагаемому $\sigma(T)$ (т.е. $\sigma(T) = j(T) - \sum_{K \supset T} \sigma(K)$), получим в конце

$$\sigma(H) = \sum_{T \supseteq H} k(T) j(T)$$

(так как $\sigma(G) = j(G)$), где $k(T) = 1$ при $T = H$. Заметим, что если D — подгруппа G, то каждая подстановка вместо $\sigma(T)$ его значения $j(T) - \sum_{K \supset T} \sigma(K)$ добавляет слагаемое $(-\sigma(D))$ в выражение для $\sigma(H)$ тогда и только тогда, когда $H \subseteq T \subset D$, а каждому слагаемому $\sigma(D)$ соответствует одно слагаемое $j(D)$ в силу равенства $\sigma(D) = j(D) - \sum_{K \supset D} \sigma(K)$. Поэтому в окончательном выражении $\sigma(H) = \sum_{T \supseteq H} k(T) j(T)$ коэффициент $k(D)$ при $j(D)$ равен $-\sum_{H \subseteq T \subset D} k(T)$. Следовательно, $k(D) = \mu(H, D)$, и тем самым показано, что

$$\sigma(H) = \sum_{T \supseteq H} \mu(H,T) j(T).$$

С другой стороны, легко проверить, что число f G-орбит, стабилизаторы точек которых сопряжены с H, равно $\sigma(H)|H|/|N_G(H)|$. Это вытекает из того, что в представлении G на левых смежных классах по подгруппе H H-инвариантными будут те и только те классы xH, для которых $x \in N_G(H)$. Таким образом, $f = \frac{|H|}{|N_G(H)|} \sum_{T \supseteq H} \mu(H,T) j(T)$, и лемма 3 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно взять в качестве представления R леммы 3 представление R_a, где $a \in M(R)$, подставив из леммы 2 вместо $j(T)$ его значения $a^{c_\chi(T)}$. Мы получим в результате $f|N_G(H)/H| = \sum_{T \supseteq H} \mu(H,T) a^{c_\chi(T)}$. Так как f — целое рациональное число, то из последнего равенства вытекает утверждение теоремы 1.

Соотношение (4) верно для любого целого числа a, представимого в виде $a = a' + k|N_G(H)/H|$, где $a' \in M(R)$, k — произвольное целое рациональное число. Это замечание позволяет распространить соотношение (4) на некоторые отрицательные числа a.

Пусть $G = Z_m$ — циклическая группа, H — ее единичная подгруппа, R — прямая сумма всех неприводимых неэквивалентных точных представлений группы G, χ — характер представления G. Тогда представление R при редукции к полю конечной характеристики p, взаимно-простой с числом m, реализуется уже в простом поле, состоящем из p элементов. Действительно, если $m = q$, где q — простое число, взаимно-простое с p, то регулярное представление группы G является по теореме Машке прямой суммой единичного представления группы $G = Z_q$ и представления R, т.е. представление R при редукции к полю простой характеристики p, реализуется в поле, состоящем из p элементов. Пусть уже доказано, что для любого делителя b числа m прямая сумма представлений группы Z_b, составляющих орбиту относительно группы Галуа их поля значений, при редукции к простой характеристике p, реализуется в простом поле. Тогда для группы $G = Z_m$ сумме всех представлений, имеющих в ядре заданную подгруппу $K \cong Z_{m/b}$, также реализуется в $\mathrm{GF}(p)$, прямая сумма X всех неэквивалентных неточных представлений группы $G = Z_m$ также будет реализоваться в $\mathrm{GF}(p)$. Так как $(m,p) = 1$, то по теореме Машке регулярное представление группы $G = Z_m$ над полем $\mathrm{GF}(p)$ является прямой суммой представлений R и X, откуда вытекает реализуемость представления R для группы Z_m в $\mathrm{GF}(p)$.

Так как в рассматриваемом случае $\chi(1) = \varphi(m)$ и для любой неединичной подгруппы T группы Z_m $c_\chi(T) = 0$, то соотношение (4) принимает вид

$$a^{\varphi(m)} + \sum_{T \neq 1} \mu(1,T) a^0 \equiv 0 (\bmod m).$$

Так как по определению функции Мебиуса $\sum_T \mu(1,T) = 0$, то $\sum_{T\neq 1} \mu(1,T) = -1$, и мы приходим к теореме Эйлера $a^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0(\operatorname{mod} m)$. Таким образом, теорема 1 является обобщением теоремы Эйлера. Роль числа m в ней выполняет тройка G, H, R, где G — произвольная конечная группа, H — ее подгруппа, R — произвольное конечномерное комплексное представление группы G.

Приведем теперь еще одно арифметическое соотношение, также обобщающее теорему Эйлера. В отличие от соотношения (4) оно имеет мультипликативный вид. Как и в теореме 1, в нижеследующей теореме 2 G — конечная группа, H — ее подгруппа, R — произвольное комплексное конечномерное представление группы G.

Теорема 2. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — все такие попарно различные представители чисел $c_\chi(T)$, для которых $T \supseteq H$ и числа $K_i = \sum_{c_\chi(T)=\xi_i} \mu(H,T)$ отличны от нуля. Тогда для любых $j \in \{1, \ldots, m\}$ и $a \in M(R)$ справедливо соотношение*

$$K_j \prod_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{m} (a^{\xi_i} - a^{\xi_j}) \equiv 0(\operatorname{mod}|N_G(H)/H|). \tag{5}$$

Доказательство. По определению функции Мебиуса имеем равенство

$$\sum_{T\supseteq H} \mu(H,T) = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} K_i = 0. \tag{6}$$

Обозначим через $R^{(k)}(k = 1, \ldots, m-1)$ прямую сумму k экземпляров представления R, его характер $\chi^{(k)}(g) = k\chi(g)$. Соответствующие представлениям $R^{(k)}$ числа $c_{\chi^{(k)}}(T)$ удовлетворяют равенствам $c_{\chi^{(k)}}(T) = kc_\chi(T)$. Тогда соотношение (4) для представления $R^{(k)}$ примет вид

$$\sum_{T\supseteq H} \mu(H,T) a^{kc_\chi(T)} \equiv 0(\operatorname{mod}|N_G(H)/H|).$$

Или, используя числа K_i, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} K_i a^{k\xi_i} \equiv 0(\operatorname{mod}|N_G(H)/H|) \quad , \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{7}$$

Присоединяя к (7) соотношение (6), получим

$$\sum_{i=1}^{m} (a^{\xi_i})^k K_i = |N_G(H)/H| b_k \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{8}$$

где b_k — целые рациональные числа. Рассматривая соотношения (8) как систему уравнений для K_i, получаем

$$K_j = \frac{W_j}{W(a^{\xi_1},\dots,a^{\xi_m})},$$

где $W(a^{\xi_1},\dots,a^{\xi_m})$ — определитель Вандермонда, построенный из чисел $a^{\xi_1},\dots, a^{\xi_m}$, а W_j получается из $W(a^{\xi_1},\dots,a^{\xi_m})$ заменой j-го столбца на столбец, составленный из чисел $0, |N_G(H)/H|b_1,\dots,|N_G(H)/H|b_{m-1}$. Раскладывая W_j по j-му столбцу, получаем

$$W_j = |N_G(H)/H| \sum_{s=0}^{m-1}(-1)^{s+1+j} b_s W_{js},$$

где W_{js} получается из $W(a^{\xi_1},\dots,a^{\xi_m})$ вычеркиванием j-го столбца и $(s+1)$-й строки. Как известно,

$$W_{js} = S_{m-1-s}(a^{\xi_1},\dots,a^{\xi_{j-1}},a^{\xi_{j+1}},\dots,a^{\xi_m})\cdot$$
$$\cdot W(a^{\xi_1},\dots,a^{\xi_{j-1}},a^{\xi_{j+1}},\dots,a^{\xi_m}),$$

где через $S_k(x_1,\dots,x_n)$ обозначен k-й элементарный симметрический многочлен от аргументов $x_1,\dots,x_n$. После сокращения одинаковых сомножителей, входящих в выражение для K_j от $W(a^{\xi_1},\dots,a^{\xi_m})$ и $W(a^{\xi_1},\dots,a^{\xi_{j-1}},a^{\xi_{j+1}},\dots,a^{\xi_m})$, получим

$$K_j = \frac{|N_G(H)/H| \sum\limits_{s=0}^{m-1}(-1)^s b_s S_{m-1-s}(a^{\xi_1},\dots,a^{\xi_{j-1}},a^{\xi_{j+1}},\dots,a^{\xi_m})}{\prod\limits_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{m}(a^{\xi_i}-a^{\xi_j})},$$

откуда и получается соотношение (5). Теорема 2 полностью доказана.

Заметим, что для рассмотренного выше примера, в котором $G = Z_k$, $H = 1$, R — сумма всех неэквивалентных неприводимых точных представлений группы G, соотношения (4) и (5) совпадают, поэтому соотношение (5) также является обобщением теоремы Эйлера.

Если R — представление группы G перестановками на некотором конечном множестве N, элементы которого мы будем обозначать числами $1,2,\dots,n$, a — произвольное натуральное число, большее единицы, то R_a является представлением группы G перестановками на множестве A^N последовательностей $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, где α_i — элементы множества A, состоящего из a элементов. При этом $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (\alpha_{g(1)},\dots,\alpha_{g(n)})(g\in G)$. Легко показать, что $j(T) = a^{c_\chi(T)}$ для любого натурального $a > 1$. Остальные рассуждения доказательства теоремы 1 также проходят для любого натурального числа $a > 1$. При $a = 1$ соотношение (4) также верно по определению функции Мебиуса $\mu(H,T)$. Соотношение (5) теоремы 2 выполняется для тех же a, для которых верно соотношение (4). Таким образом, имеет место следующее утверждение (с учетом замечания, сделанного после доказательства теоремы 1).

Теорема 3. *Если R — представление конечной группы G перестановками на конечном множестве, то соотношения (4), (5) выполняются для любого целого рационального числа a.*

Заметим, что соотношения (4), (5) являются сравнениями. Приведем одно точное равенство для чисел $c_\chi(T)$.

Теорема 4. *Пусть G — конечная группа, H — ее нециклическая подгруппа, χ — характер некоторого конечномерного комплексного представления группы G. Тогда*

$$\sum_{T\subseteq H} |T|c_\chi(T)\mu(T,H) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть S — частично упорядоченное по включению множество всех подгрупп группы G (включая саму группу и ее единичную подгруппу). Определим на S функцию $f(H)$ $(H \in S)$ следующим образом: $f(H) = \sum_{\langle x\rangle = H} \chi(x)$, если H — циклическая подгруппа группы G, и $f(H) = 0$ для любой нециклической подгруппы H группы G. Тогда для любой подгруппы H группы G имеют место равенства $c_\chi(H)|H| = \sum_{x\in H} \chi(x) = \sum_{T\subseteq H} f(T)$. Применяя формулу обращения [6], теорема 2.1, получаем

$$f(H) = \sum_{T\subseteq H} c_\chi(T)|T|\mu(T,H),$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

§ 2. О ЕДИНИЧНЫХ КОМПОНЕНТАХ ОГРАНИЧЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ НА ЕЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ

Доказанные в предыдущем параграфе теоремы 1-4 имеют общий характер, так как они верны без каких-либо существенных ограничений на группу G, ее подгруппу H и представление R группы G. Дополнительные условия на G, H или R дадут дополнительную информацию о числах $c_\chi(T)$, но уже в более конкретной ситуации. Мы изучим в этом параграфе влияние на числа $c_\chi(T)$ того факта, что группа G имеет заданную систему образующих $a_1, \ldots, a_n$, причем ограничимся случаем циклических подгрупп T. Последнее обстоятельство оправдывается соотношением (9) теоремы 4, в силу которого числа $c_\chi(H)$ для нециклических подгрупп H в некотором смысле определяются значениями $c_\chi(T)$, в которых T — циклические подгруппы. Заметим, что понятие образующих — одно из старейших в теории групп, однако сам по себе один факт, что данная группа порождается n или даже двумя образующими, имеет мало теоретико-групповых следствий. Мы покажем здесь, что информация об образующих конечной группы G имеет своим следствием арифметические соотношения для некоторых чисел $c_\chi(T)$. При выводе этих соотношений мы применяем методы комбинаторной топологии. Приведем необходимые сведения из этой области, так как эти методы редко применяются в теории конечных групп.

Конечное множество W вместе с системой отмеченных подмножеств в нем (называемых симплексами) называется симплициальным комплексом, если

1) каждый элемент множества W является симплексом;
2) любое подмножество симплекса также является симплексом.

Если симплекс состоит из $n+1$ точки, то он называется n-мерным. Симплекс ненулевой размерности называется ориентированным, если задан какой-нибудь порядок его вершин. При этом четная перестановка не изменяет ориентации симплекса, а нечетная — меняет ее на противоположную. Если E — ориентированный симплекс, то этот же симплекс, но ориентированный противоположно, обозначается $-E$. Упорядочив множество W, можно задать ориентацию на всех симплексах одновременно. Эту ориентацию мы будем называть стандартной. Множество всех линейных комбинаций n-мерных ориентированных симплексов с рациональными коэффициентами будем называть группой n-мерных цепей и обозначать через C_n. При этом считаем, что $\alpha(-E) = -\alpha E$ для любого рационального числа α и любого симплекса E. Определим отображение ∂_n группы C_n в группу C_{n-1}. Если $E = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — произвольный положительно ориентированный симплекс при некоторой заданной стандартной ориентации, то положим

$$\partial_n E = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varepsilon_i (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

для $n > 0$ и $\partial_0 E = 0$ для $n = 0$, где $\varepsilon_i = 1$, если ориентация симплекса $(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ совпадает со стандартной, и $\varepsilon_i = -1$ в противном случае. Для остальных элементов группы C_n отображение ∂_n определяется при помощи линейного продолжения. Легко проверяется, что $\partial_{n+1}\partial_n = 0$ для любого номера n. Фактор-группа $\mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ называется n-мерной группой гомологий комплекса W и обозначается через $H_n(W)$. Каждая группа $H_n(W)$ представляет собой линейное пространство над полем рациональных чисел. Если конечная группа G действует как группа перестановок на множестве W и каждый элемент группы G переводит любой симплекс комплекса W в симплекс (такие перестановки называются симплициальными отображениями W), то естественным образом возникают линейные представления группы G на всех линейных пространствах $H_n(W)$, характеры которых мы будем обозначать через $\tilde{t}^{(n)}(g)$, где $t^{(n)}$ — характер представления группы G перестановками на множестве n-мерных симплексов.

Введем теперь конкретную структуру симплициального комплекса для конечной группы G. Пусть $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — заданная конечная группа, $n \geqslant 2$, $a_i \neq 1$. В качестве основных вершин симплициального комплекса W мы возьмем элементы группы G. Два различных элемента $x, y \in G$ мы соединим ребром, если $x^{-1}y$ равен одному из следующих элементов: a_i, a_i^{-1} для некоторого номера $i, a_1 a_2 \dots a_n$ или $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1}$. При этом если $a_{i_1} = a_{i_2} = \dots = a_{i_k} = a$, то элементы x и $y = xa$ мы соединим k-ребрами, которые пометим парами индексов (a, i_s), где $s = 1, \dots, k$. Если $y = x(a_1 a_2 \dots a_n)$ или $x(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1}$, то ребро (x, y) мы пометим одним индексом $(a_1 a_2 \dots a_n)$. Назовем многоугольниками следующие циклически упорядоченные подмножества элементов группы G:

$$M_{a_i}(g) = \{g, ga_i, ga_i^2, \dots, ga_i^{|a_i|-1}\}, \qquad \text{если} \qquad |a_i| > 2,$$

$$M_{a_1 a_2 \dots a_n}(g) = \{g, g(a_1 a_2 \dots a_n), \dots, g(a_1 a_2 \dots a_n)^{|a_1 a_2 \dots a_n|-1}\},$$

$$M_n(g) = \{g, ga_1, ga_1 a_2, \dots, ga_1 a_2 \dots a_n\}$$

(через $|x|$ мы обозначаем порядок циклической группы $\langle x \rangle$). Если $|a_1 a_2 \dots a_n| = 2$ или 1, то многоугольники $M_{a_1 a_2 \dots a_n}(g)$ отсутствуют, при $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ $M_n(g) = \{g, ga_1, ga_1 a_2, \dots, ga_1 a_2 \dots a_{n-1}\}$. Сторонами этих многоугольников будут ребра между соседними вершинами, а также между первой и последней вершинами. При этом так как не исключается случай равенства $a_i = a_j$ при $i \neq j$, т.е. между двумя вершинами может проходить несколько ребер, то мы в качестве стороны между вершинами x и xa_i возьмем ребро, имеющее метку (a_i, i). Заметим, что в многоугольниках $M_n(g)$ некоторые вершины могут совпадать одна с другой, т.е. быть склеенными, но число различных сторон каждого такого многоугольника равно $n+1$ при $a_1 a_2 \dots a_n \neq 1$ и n при $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Два многоугольника мы считаем совпадающими, если циклической перестановкой вершин в одном из них можно добиться того, чтобы соответствующие вершины этих многоугольников совпадали и ребра между соответствующими соседними и крайними вершинами имели одинаковые метки.

Приступим к непосредственному построению комплекса W. Рассмотрим вначале общий случай, предположим, что если $|a_i| = 2$ для всех i, то $n > 2$. Добавим к основным вершинам, т.е. элементам группы G, еще центры многоугольников $M_{a_i}(g)$, $M_{a_1a_2\ldots a_n}(g)$ и $M_n(g)$ (в качестве такого центра можно взять любую внутреннюю точку многоугольника) и соединим их с основными вершинами так, чтобы все уже имеющиеся стороны в каждом многоугольнике являлись основаниями треугольников с вершиной в только что построенном центре. Другими словами, разобьем каждый многоугольник на элементарные треугольники. Для многоугольников $M_{a_i}(g), M_{a_1a_2\ldots a_n}(g)$ эта процедура не вызывает затруднений, а для многоугольников $M_n(g)$ в случае, если некоторые его вершины оказались склеенными, из центра нужно проводить в каждую такую склейку основных вершин несколько дополнительных отрезков, так чтобы каждый из них являлся боковой стороной в точности двух элементарных треугольников. Этот процесс, обычно называемый триангуляцией, может пока еще не привести к симплициальному комплексу, так как две точки могут быть соединены нескольким ребрами. Поэтому возьмем на каждом основном ребре, т.е. ребре, соединяющем элементы группы, среднюю точку и соединим ее с центрами многоугольников $M_{a_i}(g)$, $M_{a_1a_2\ldots a_n}(g)$, имеющих данное ребро в качестве своей стороны. Кроме этого, так как центры многоугольников $M_n(g)$ могут быть соединены несколькими ребрами с некоторыми элементами группы, произведем барицентрическое подразбиение каждого элементарного треугольника, входящего в состав многоугольника $M_n(g)$. Для этого к уже имеющейся системе вершин и ребер добавим центры таких элементарных треугольников и отрезки, соединяющие их, с вершинами и серединами сторон в каждом таком треугольнике. Теперь мы получили симплициальный комплекс W, двумерными симплексами которого являются половинки элементарных треугольников в многоугольниках $M_{a_i}(g)$, $M_{a_1a_2\ldots a_n}(g)$ и шестые части элементарных треугольников, входящих в состав многоугольников $M_n(g)$.

Если $G = \langle a_1, a_2\rangle$, $|a_1| = |a_2| = 2$, $a_1 \neq a_2$, то элементы группы G мы расположим на экваторе двумерной сферы в следующем циклическом порядке $1, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_1, \ldots, (a_1a_2)^{|a_1a_2|-1}a_1$ и соединим их кратчайшими дугами на этой сфере, эти дуги будут играть роль одномерных симплексов. Для построения симплициального комплекса W, представляющего сферу, к множеству основных вершин добавим полюса сферы и соединим их с лежащими на экваторе элементами группы G. Тогда система полученных сферических треугольников, их сторон и вершин образует искомый симплициальный комплекс W. Если $a_1 = a_2 = a$, то мы также расположим оба элемента группы G $1, a$ на экваторе двумерной сферы, соединим их двумя большими дугами с метками $(a,1), (a,2)$ и затем с полюсами соединим эти элементы и середины двух дуг, соединяющих элементы $1, a$.

Для построения комплекса W в случае, если некоторые из элементов a_i равны единице группы, мы исключим их из системы образующих и строим комплекс W по оставшимся неединичным образующим группы. Если только один элемент $a_i = a$ из системы образующих $a_1, \ldots, a_n$ не равен единице, то при $|a| > 2$ мы располагаем, как и выше, все элементы группы G на экваторе двумерной сферы в следующем циклическом порядке $1, a, a^2, \ldots, a^{|a|-1}$ и соседние, а также первый и последний, элементы соединим ребром. Затем полюса сферы соединим с элементами группы ребрами. Тогда, как и в случае $G = < a_1, a_2 >$, где a_i — инволюции, симплексами в W будут элементы группы и полюса сферы, построенные ребра и сферические треугольники. Если единственный неединичный образующий элемент $a_i = a$ группы G имеет порядок два, то W у нас будет представлять собой одномерный симплекс $(1, a)$. Если все $a_i = 1$, то W состоит из одной точки.

Определим на множестве основных вершин, т.е. элементов группы G, построенного комплекса отображение ρ_x с помощью равенства $\rho_x(g) = xg$. Легко проверить, что $xM_c(g) = M_c(xg)$ для $c = a_i$, $a_1 a_2 \ldots a_n$ или n (каждое ребро при этом отображении мы будем переводить в ребро с той же меткой). Очевидно, можно продолжить это отображение до симплициального отображения Ψ_x всего комплекса W на себя. Характер ограничения $\Psi^{(i)}$ представления Ψ группы G на пространство i-мерных симплексов комплекса W мы обозначим через $t^{(i)}$, тогда $\tilde{t}^{(i)}$ — характер соответствующего представления G на i-й группе гомологий $H_i(W)$ (с коэффициентами в поле рациональных чисел).

Через 1_H^G обозначим характер представления группы G сдвигами в пространстве комплексных линейных комбинаций левых смежных классов группы G по подгруппе H. В частности, $1_1^G = 1^G$ — характер регулярного представления группы G.

Теорема 5. *Пусть $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ — конечная группа, $n \geqslant 2$. Тогда для любого $x \in G$*

$$\tilde{t}^{(1)}(x) = (n-1)1^G(x) - \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) - 1^G_{\langle a_1 a_2 \ldots a_n \rangle}(x) + 2. \tag{10}$$

Доказательство. Предположим вначале, что все элементы $a_i \neq 1$. Покажем, что комплекс W представляет двумерную замкнутую поверхность или, другими словами, псевдомногообразие размерности два ([7], § 37, 24). Для этого достаточно проверить, что в системе определенных выше многоугольников $M_{a_i}(g)$,$M_{a_1 a_2 \ldots a_n}(g)$,$M_n(g)$ каждое основное ребро, т.е. ребро, соединяющее какие-то два элемента группы, является стороной в точности двух многоугольников. Для группы $G = \langle a_1, a_2 \rangle$, в которой $|a_1| = |a_2| = 2$, построенный комплекс W представляет двумерную сферу, поэтому можно считать, что если порядки всех элементов a_i равны двум, то $n > 2$. Наше утверждение мы проверим последовательно для всех ребер (x, y) при $x \neq y$, $x^{-1}y = a_i$,a_i^{-1},$a_1 a_2 \ldots a_n$,$(a_1, a_2 \ldots a_n)^{-1}$.

Пусть $|a_i| > 2$, тогда ребро (x, y) с меткой (a_i, i) является сторонами многоугольников $M_{a_i}(x)$ и $M_n(xa_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1} \ldots a_1^{-1})$. Так как даже если $a_j = a_i$ при $j \neq i$, то стороны многоугольников $M_{a_j}(g)$ имеют метки (a_i, j), поэтому наше ребро (x, y) с меткой (a_i, i) не может быть стороной никакого многоугольника $M_{a_j}(g)$ при $j \neq i$, а также никакого многоугольника $M_{a_1 a_2 \ldots a_n}(g)$. Многоугольник $M_{a_i}(g)$ представляет собой смежный класс группы G по подгруппе $\langle a_i \rangle$, поэтому элементы x,$y = xa_i$ могут принадлежать только одному такому многоугольнику, а именно $M_{a_i}(x)$. Пусть теперь ребро (x, y) с меткой (a_i, i) принадлежит некоторому многоугольнику $M_n(h)$. Тогда, двигаясь по сторонам этого многоугольника от y к x, мы последовательно получим элементы нашего многоугольника $y = xa_i$, $x = ya_i^{-1}$,xa_{i-1}^{-1},$xa_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1}, \ldots, xa_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1} \ldots a_1^{-1}$. Таким образом, $xa_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1} \ldots a_1^{-1} \in M_n(h)$. Но теперь нетрудно показать, что $M_n(h) = M_n(xa_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1} \ldots a_1^{-1})$, воспользовавшись тем, что к элементу $xa_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1} \ldots a_1^{-1}$ примыкают ребра с метками $(a_1, 1)$ и (a_n, n).

Пусть теперь $|a_i| = 2$. Легко видеть, что ребро (x, y) с меткой (a_i, i) является сторонами многоугольников $M_n(xa_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1} \ldots a_1^{-1})$ и $M_n(xa_i a_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1} \ldots a_1^{-1})$. Покажем, что эти многоугольники различны. Если $i \neq 1$ или n, то к вершине x в первом многоугольнике примыкают ребра с метками $(a_{i-1}, i-1)$,(a_i, i), а во втором — ребра с метками (a_i, i), $(a_{i+1}, i+1)$. Сравнивая вторые индексы этих ребер, мы видим, что эти многоугольники различны. Если $i = 1$, $a_1a_2\dots a_n \neq 1$, то к вершине x в первом многоугольнике примыкают ребра с метками $(a_1a_2\dots a_n)$,$(a_1, 1)$, а во втором — ребра с метками (a_n, n),$(a_1a_2\dots a_n)$, т.е. в этом случае эти многоугольники также различны. Аналогично рассматривается случай, в котором $i = n$,$a_1a_2\dots a_n \neq 1$. Если $i = 1$, $a_1a_2\dots a_n = 1$, то в первом многоугольнике к вершине x примыкают ребра с метками (a_n, n), $(a_1, 1)$, а во втором — ребра с метками $(a_1, 1)$, $(a_2, 2)$. Если эти многоугольники совпадают, то $n = 2$, $a_1a_2 = 1$, т.е. $|a_2| = 2$, $G = \langle a_1, a_2\rangle$, но этот случай мы уже рассмотрели вначале. Следовательно, если в рассматриваемом общем случае $i = 1$, $a_1a_2\dots a_n = 1$, то многоугольники $M_n(xa_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1}\dots a_1^{-1})$, $M_n(xa_ia_{i-1}^{-1}a_{i-2}^{-1}\dots a_1^{-1})$ различны. Аналогично рассматривается случай $i = n$, $a_1a_2\dots a_n = 1$. Доказательство того, что других многоугольников со стороной (a_i, i) при $|a_1| = 2$ нет, такое же, как и для случая $|a_i| > 2$.

Точно так же проверяется, что каждое ребро (x, y) с меткой $(a_1a_2\dots a_n)$ (при $a_1a_2\dots a_n \neq 1$) является стороной в точности двух многоугольников, а именно $M_{a_1a_2\dots a_n}(g)$ и $M_n(x)$, если $|a_1a_2\dots a_n| > 2$, и многоугольников $M_n(x)$ и $M_n(xa_1a_2\dots a_n)$, если $|a_1a_2\dots a_n| = 2$.

Таким образом, мы показали, что каждое ребро, соединяющее элементы группы, является стороной в точности двух многоугольников. Но тогда множество основных вершин с указанной системой многоугольников образует двумерную поверхность S_G, а симплициальный комплекс W, представляющий эту поверхность, является псевдомногообразием размерности два.

Приступим теперь к вычислению значений характера $\tilde{t}^{(1)}(x)$. Вначале предположим, что группа $G = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ удовлетворяет уже рассматривавшимся выше ограничениям, т.е. $a_i \neq 1$, и если все a_i — инволюции, то $n > 2$. Рассмотрим сужение $\Psi_x^{(0)}$ отображения Ψ_x на множестве всех вершин симплициального комплекса W. На множестве основных вершин $\Psi_x^{(0)}$ действует без неподвижных точек, число основных вершин равно $|G|$. Так как вершины многоугольника $M_{a_i}(g)(|a_i| > 2)$ для каждого фиксированного i образуют левый смежный класс группы G по подгруппе $\langle a_i\rangle$, то множества вершин двух таких многоугольников не пересекаются и число добавленных центров для таких многоугольников равно $|G|/|a_i|$. Отображение $\Psi_x^{(0)}$ осуществляет сдвиг левых смежных классов, поэтому оно действует на центрах многоугольников $M_{a_i}(g)$, как на левых смежных классах группы G по подгруппе $\langle a_i\rangle$. Если $|a_1a_2\dots a_n| > 2$, то $\Psi_x^{(0)}$ действует на многоугольниках $M_{a_1a_2\dots a_n}(g)$ и на их центрах, как на смежных классах G по подгруппе $\langle a_1a_2\dots a_n\rangle$. Так как все ребра многоугольника $M_n(g)$ различны, имеют различные метки и отображение Ψ_x сохраняет метки ребер, то $\Psi_x^{(0)}$ может оставить такой многоугольник на месте только в том случае, если он является двуугольником, т.е. $G = \langle a_1, a_2\rangle$, причем $a_1a_2 = 1$, и к тому же a_1 и a_2 должны быть в этом случае инволюциями. Эту группу мы будем исследовать позже особо, поэтому в рассматриваемом общем случае отображение $\Psi_x^{(0)}$ не имеет неподвижных точек на множестве многоугольников $M_n(g)$, следовательно, и на множестве вершин симплициального комплекса W, содержащихся внутри и на границах многоугольников $M_n(g)$.

Осталось рассмотреть действие $\Psi_x^{(0)}$ на серединах ребер, соединяющих элементы группы. Легко видеть, что на серединах ребер с метками (a_i, i) при $|a_i| > 2$ и $(a_1a_2\dots a_n)$ при $|a_1a_2\dots a_n| > 2$ $\Psi_x^{(0)}$ действует без неподвижных точек, если же $|a_i| = 2$, то концы ребер с метками (a_i, i) представляют собой левые смежные классы G по подгруппе $\langle a_i \rangle$, поэтому и действие $\Psi_x^{(0)}$ на серединах таких ребер такое же, как действие сдвига элементом x левых смежных классов группы G по подгруппе $\langle a_i \rangle$. Этот же факт имеет место и для середин ребер с меткой $(a_1 a_2 \dots a_n)$ при $|a_1 a_2 \dots a_n| = 2$.

После всех этих замечаний нетрудно получить выражения для значений $t^{(i)}(x)$, которые, очевидно, равны числу неподвижных точек отображений $\Psi_x^{(i)}$, непосредственно на множествах i-мерных симплексов. Рассмотрим вначале случай $|a_1 a_2 \dots a_n| > 2$, т.е. построенная поверхность имеет многоугольники $M_{a_1 a_2 \dots a_n}(g)$. Тогда

$$t^{(0)}(x) = 1^G(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ (|a_i|>2)}}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) + 1^G_{\langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle}(x) + 1^G(x) +$$
$$+ n_1 1^G(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ (|a_i|=2)}}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) + 1^G(x) + (n+1) \cdot 8 \cdot 1^G(x).$$

В этом выражении восемь слагаемых (точнее, групп слагаемых). Первое слагаемое $1^G(x)$ выражает число неподвижных точек сужения отображения $\Psi_x^{(0)}$ на элементы группы G, т.е. основные вершины нашего симплициального комплекса W. Следующие три слагаемых дают значение числа неподвижных точек сужения $\Psi_x^{(0)}$ на центры многоугольников $M_{a_i}(g)$ при $|a_i| > 2$, $M_{a_1 a_2 \dots a_n}(g)$ и $M_n(g)$. Следующие за ними три слагаемых представляют собой значение этого же параметра отображения при действии $\Psi_x^{(0)}$ на середины основных ребер с метками (a_i, i) и $(a_1 a_2 \dots a_n)$ (n_1 обозначает число элементов a_i, порядки которых больше двух). Последнее слагаемое равно числу неподвижных точек при действии $\Psi_x^{(0)}$ на нецентральных вершинах комплекса W, находящихся внутри многоугольников $M_n(g)$. Аналогично получаем следующее равенство

$$t^{(1)}(x) = 2n_1 1^G(x) + (n - n_1) 1^G(x) + 2 \cdot 1^G(x) +$$
$$+ 2n_1 1^G(x) + 2 \cdot 1^G(x) + (n+1) \cdot 26 \cdot 1^G(x).$$

Первые три слагаемых здесь выражают число неподвижных точек сужения отображения $\Psi_x^{(1)}$ на половинках ребер с метками (a_i, i) (при $|a_i| > 2$ и $|a_i| = 2$) и $(a_1 a_2 \dots a_n)$. Следующие за ними два слагаемых дают значение этого же параметра для действия $\Psi_x^{(1)}$ на отрезки, соединяющие центры многоугольников $M_{a_i}(g)$ при $|a_i| > 2$ и $M_{a_1 a_2 \dots a_n}(g)$ с их вершинами и серединами сторон. Последнее слагаемое характеризует действие $\Psi_x^{(1)}$ на внутренних одномерных симплексах, на которые оказались разбитыми многоугольники $M_n(g)$. Легко устанавливается также, что

$$t^{(2)}(x) = 2n_1 1^G(x) + 2 \cdot 1^G(x) + (n+1) 18 \cdot 1^G(x).$$

Здесь слагаемые характеризуют действия отображения $\Psi_x^{(2)}$ на двумерных симплексах, входящих в состав многоугольников $M_{a_i}(g)$ при $|a_i| > 2$,$M_{a_1 a_2 \dots a_n}(g)$ и $M_n(g)$ соответственно.

При $|a_1 a_2 \dots a_n| = 2$ многоугольников $M_{a_1 a_2 \dots a_n}(g)$ нет, число ребер с меткой $(a_1 a_2 \dots a_n)$ равно $|G|/2$ и на серединах этих ребер отображение $\Psi_x^{(0)}$ действует как на левых смежных классах группы G по подгруппе $\langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle$. Поэтому мы имеем следующие равенства:

$$t^{(0)}(x) = 1^G(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ (|a_i|>2)}}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) + 1^G(x) +$$

$$+ n_1 1^G(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ (|a_i|=2)}}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) + 1^G_{\langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle}(x) + (n+1)8 \cdot 1^G(x);$$

$$t^{(1)}(x) = 2n_1 1^G(x) + (n - n_1)1^G(x) + 1^G(x) + 2n_1 1^G(x) + (n+1)26 \cdot 1^G(x);$$

$$t^{(2)}(x) = 2n_1 1^G(x) + (n+1) \cdot 18 \cdot 1^G(x).$$

Если $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, то отсутствуют и ребра с меткой $(a_1 a_2 \dots a_n)$. Многоугольники $M_n(g)$ имеют при этом условии n-различных сторон. В этом случае мы получаем следующие равенства:

$$t^{(0)}(x) = 1^G(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ (|a_i|>2)}}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) + 1^G(x) +$$

$$+ n_1 1^G(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ (|a_i|=2)}}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) + n \cdot 8 \cdot 1^G(x);$$

$$t^{(1)}(x) = 2n_1 1^G(x) + (n - n_1)1^G(x) + 2n_1 1^G(x) + n \cdot 26 \cdot 1^G(x);$$

$$t^{(2)}(x) = 2n_1 1^G(x) + n \cdot 18 \cdot 1^G(x).$$

Во всех трех случаях число Лефшеца, определяемое равенством $L = t^{(0)}(x) - t^{(1)}(x) + t^{(2)}(x)$ имеет одно и то же значение

$$L = \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) + 1^G_{\langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle}(x) - (n-1)1^G(x)$$

(если $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, то $1^G_{\langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle}(x) = 1^G(x)$). С другой стороны, из формулы Хопфа ([7], § 79; [8], гл.5) мы получаем равенство $L = \tilde{t}^{(0)}(x) - \tilde{t}^{(1)}(x) + \tilde{t}^{(2)}(x)$, откуда

$$\tilde{t}^{(1)}(x) = (n-1)1^G(x) - \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i \rangle}(x) - 1^G_{\langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle}(x) + \tilde{t}^{(0)}(x) + \tilde{t}^{(2)}(x).$$

Так как поверхность S_G является связной двумерной, то группа гомологий $H_0(W)$ представляет собой одномерное линейное пространство над полем рациональных чисел, которое было взято в качестве поля коэффициентов. Что же касается группы $H_2(W)$, то она в зависимости от того, ориентируема или нет поверхность S_G, имеет размерность один или ноль ([7], § 41). Но $\tilde{t}^{(1)}$ является характером представления группы G на пространстве $H_1(W)$, поэтому, умножая его скалярно на единичный характер группы G, получаем, что $\tilde{t}^{(0)}(x) = \tilde{t}^{(2)}(x) = 1$ для любого $x \in G$ (так как кратности вхождения единичного характера в характеры $1^G_{\langle g \rangle}$,1^G равны единице). Следовательно, в этом случае теорема 5 доказана.

Если $G = \langle a_1, a_2\rangle, |a_1| = |a_2| = 2$, то поверхность S_G представляет собой двумерную сферу. Поэтому группа $H_1(W)$ оказывается нулевой, т.е. $\tilde{t}^{(1)}(x) = 0$ для любого $x \in G$. Тогда равенство $1^G_{\langle a_1\rangle}(x) + 1^G_{\langle a_2\rangle}(x) + 1^G_{\langle a_1 a_2\rangle}(x) - 1^G(x) - 2 = 0$ можно доказать непосредственно, используя свойства группы диэдра или циклической группы второго порядка при $a_1 = a_2$, а можно дословно повторить предыдущие рассуждения для этого случая.

Если некоторые элементы a_j равны единице группы, то равенство (10) остается справедливым. Поверхность S_G и комплекс W строятся при этом исходя из неединичных элементов a_i. Если затем в полученное равенство (10) добавить тождественно равные нулю слагаемые $1^G_{\langle a_j\rangle}(x) - 1^G(x)$, соответствующие элементам, равным единице группы, то мы получим равенство (10) без каких-либо ограничений на элементы a_i. Если число неединичных элементов a_i меньше двух, то равенство (10) легко проверяется непосредственно, так как группа G в этом случае является циклической. Таким образом, теорема 5 полностью доказана.

Следствие 1. *Поверхность S_G является ориентируемой.*

Следствие 2. *Представление группы G на $H_1(W)$ не имеет единичных компонент.*

Следствие 3. *Для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ конечной группы G функция*

$$\zeta(x) = (n-1)1^G(x) + 2 \cdot 1^G_{\langle a_1,\ldots,a_n\rangle}(x) - \sum_{i=1}^{n} 1^G_{\langle a_i\rangle}(x) - 1^G_{\langle a_1 a_2 \ldots a_n\rangle}(x) \tag{11}$$

является характером группы G.

Доказательство. Обозначим через H подгруппу группы G, порожденную элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. По предыдущей теореме функция

$$\gamma(x) = (n-1)1^H(x) + 2 - \sum_{i=1}^{n} 1^H_{\langle a_i\rangle}(x) - 1^H_{\langle a_1 a_2 \ldots a_n\rangle}(x)$$

является характером группы H. Но тогда $\zeta(x) = \gamma^G(x)$, что и доказывает наше утверждение.

Так как $(\zeta, \chi) \geqslant 0$ для любого характера χ группы G, где функция ζ определяется при помощи равенства (11), то мы получаем следующее арифметическое соотношение для чисел $c_\chi(T)$.

Теорема 6. *Пусть G — конечная группа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ее произвольные элементы, $n \geqslant 2$. Тогда для любого характера χ группы G выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} c_\chi(\langle a_i\rangle) + c_\chi(\langle a_1 a_2 \ldots a_n\rangle) \leqslant (n-1)\chi(1) + 2c_\chi(\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle).$$

Следствие. *Пусть $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ — конечная группа, $n \geqslant 2$, χ — характер некоторого комплексного представления группы G, не содержащего единичных компонент. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} c_\chi(\langle a_i\rangle) + c_\chi(\langle a_1 a_2 \ldots a_n\rangle) \leqslant (n-1)\chi(1). \tag{12}$$

Заметим, что способ определения на графе Кэли конечной группы структуры двумерной поверхности S_G не является единственным. Выбор другой системы многоугольников в группе G дает возможность получить другие неравенства типа (12) для чисел $c_\chi(T)$.

§ 3. Одна теорема конечности бернсайдовского типа для конечных групп

В этой заключительной части настоящей работы в качестве приложения накопленной техники и результатов мы приведем решение одного частного случая ослабленной проблемы Бернсайда (коротко ОПБ). В общем случае эта проблема пока открыта. За последние 60 лет она породила огромный поток исследований. Обычно при решении этой проблемы накладывают ограничение на показатель группы, самое популярное из них — это требование, чтобы показатель был простым числом или степенью простого числа. Это вызвано тем, что для p-групп удается использовать аппарат алгебр Ли над конечными полями. Вышеуказанное ограничение на показатель получило канонический статус после знаменитой редукционной теоремы Холла–Хигмена [10], благодаря которой из положительного решения ОПБ для p-групп легко получается ее также положительное решение в классе всех разрешимых групп. Подробнее обо всем этом можно ознакомиться по книге А.И.Кострикина [9], внесшего основополагающий вклад в методы исследования конечных p-групп. Недавно Е.И.Зельманов анонсировал положительное решение ОПБ для p-групп. Заметим, что ОПБ для конечных простых групп при таком подходе зависит от полного описания этого класса групп, которого пока нет. Поэтому не исключены альтернативные подходы к ОПБ.

Мы решаем здесь ОПБ в классе групп, выделяемом при помощи некоторых неравенств для чисел $c_{\chi_i}(T)$ для неприводимых характеров χ_i и некоторых подгрупп T. На показатель группы при этом никаких ограничений не накладывается. В предыдущей теореме 6 выявились связи между числами $c_\chi(T)$ и образующими группы, поэтому ОПБ естественным образом вписывается в рамки области наших рассмотрений. Мы рассматриваем здесь для простоты только группы с двумя образующими, однако это ограничение не является сильным, так как основную трудность при решении ОПБ представляют именно группы с двумя образующими.

Теорема 7. *Пусть $\eta,\varkappa$ — заданные натуральные числа, Σ — множество неизоморфных конечных групп, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *каждая группа G множества Σ порождена некоторыми двумя элементами a_1,a_2;*

2) *каждая группа G множества Σ имеет показатель η;*

3) *для любого неприводимого характера χ_i группы $G = \langle a_1, a_2\rangle \in \Sigma$ хотя бы одно из чисел $c_{\chi_i}(\langle a_1\rangle)$ или $c_{\chi_i}(\langle a_2\rangle)$ либо не больше $\varkappa$, либо не меньше числа $\chi_i(1) - \varkappa$.*

Тогда Σ — конечное множество.

Доказательство. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{|G|} \alpha_i g_i$ — элемент групповой алгебры $\mathbb{C}G$ группы G над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Оператор умножения всех элементов алгебры $\mathbb{C}G$ на элемент $x \in \mathbb{C}G$ будем обозначать через M_x. Нас будет интересовать оператор M_x, отвечающий элементу $x = \sum\limits_{j=1}^{|a_1|} a_1^j + \sum\limits_{j=1}^{|a_2|} a_2^j$ алгебры $\mathbb{C}G$. Матрица Y оператора M_x в базисе, состоящем из элементов группы G при ее естественном вложении в $\mathbb{C}G$, имеет неотрицательные элементы, равные 0, 1 или 2, причем сумма элементов в каждой строке и каждом столбце равна $\tau = |a_1|+|a_2|$. Это означает, что матрица Y кратна дважды стохастической матрице, но тогда τ является ее наибольшим по модулю характеристическим числом. Так как элементы a_1,a_2 порождают группу G, то матрица Y неразложима и, следовательно, τ — простой корень ее характеристического уравнения ([11], гл.13).

Оператор M_x представим в виде $M_x = M_{x_1} + M_{x_2}$, где $x_1 = \sum_{j=1}^{|a_1|} a_1^j$, $x_2 = \sum_{j=1}^{|a_2|} a_2^j$. Так как $M_{x_i}M_{x_i} = |a_i|M_{x_i}$, то каждый оператор M_{x_i} при $i = 1,2$ имеет только два собственных значения — 0 и $|a_i|$. Тогда по теореме Блихфельда [12] (см. также [13]) любое инвариантное пространство над полем $\mathbb{C}$ относительно операторов M_{x_1},M_{x_2} имеет размерность либо один, либо два, если представление алгебры, порожденной этими операторами, неприводимо в этом пространстве. Если поэтому в комплексном пространстве неприводимого представления алгебры, порожденной операторами M_{x_1},M_{x_2}, какое-нибудь собственное значение оператора M_x не является целым рациональным числом, то это пространство имеет размерность два и каждый из операторов M_{x_i} $(i = 1,2)$ имеет в нем оба свои собственных значений — 0 и $|a_i|$.

Пусть χ_s — характер неприводимого комплексного представления группы G в некотором линейном пространстве V_s. Матрицы $Y_1^{(s)}$,$Y_2^{(s)}$ сужения операторов M_{x_1},M_{x_2} на подпространстве V_s одновременно приведем к квазитреугольному виду так, чтобы порядки клеток, стоящих на главной диагонали, равнялись единице или двум. Эти клетки являются матрицами операторов M_{x_1},M_{x_2}, рассматриваемых на композиционных факторах пространства V_s. Число собственных значений оператора M_s на пространстве V_s, не являющихся целыми рациональными числами, не превосходит числа таких диагональных клеток порядка два в матрицах $Y_1^{(s)}$,$Y_2^{(s)}$, характеристические числа которых в каждой матрице $Y_1^{(s)}$,$Y_2^{(s)}$ различны. Так как число $c_{\chi_s}(\langle a_i\rangle)$ равно кратности корня $|a_i|$ характеристического уравнения матрицы $Y_i^{(s)}$, то число не рациональных собственных значений сужения оператора M_x на V_s не превосходит $2\varkappa$. Каждое такое число является корнем многочлена, степень которого не превосходит числа $2\varkappa$, а коэффициенты принадлежат полю разложения группы G, имеющему по теореме Р.Брауэра ([1], 41.1) степень η над $\mathbb{Q}$. Следовательно, степень любого собственного значения оператора M_x не превосходит некоторого числа, зависящего только от η и $\varkappa$, например числа $\eta(2\varkappa)^{2\varkappa}$. Каждое такое собственное значение λ оператора M_x мы можем считать принадлежащим некоторому своему нормальному расширению Φ_λ поля $\mathbb{Q}$, степень $(\Phi_\lambda : \mathbb{Q})$ которого зависит только от η и $\varkappa$. Следовательно, и порядок Γ_λ группы Галуа поля Φ_λ (над $\mathbb{Q}$) также не превосходит некоторого числа, зависящего только от η и $\varkappa$. Верхнюю грань для всех чисел $|\Gamma_\lambda|$ мы обозначим через N, можно считать, что N не зависит от выбора группы G во множестве Σ, а зависит только от η и $\varkappa$.

Пусть λ — некоторое характеристическое число матрицы Y оператора M_x,$\lambda_1 = \lambda$,$\lambda_2, \ldots, \lambda_l$ — орбита числа λ относительно его группы Галуа Γ_λ. Так как коэффициенты характеристического многочлена матрицы Y являются целыми рациональными числами, то легко показать, что все числа λ_i $(i = 1, \ldots, l)$ принадлежат спектру матрицы Y и, следовательно, $|\lambda_i| \leqslant \tau$ для всех $i = 1, \ldots, l$. Рассмотрим многочлен

$$P(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\ldots(t - \lambda_l) = t^l + d_1t^{l-1} + \cdots + d_l.$$

Коэффициенты этого многочлена являются целыми рациональными числами. Из выражений d_i через $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ и из неравенств $|\lambda_i| \leqslant \tau$ получаем, что $|d_i| \leqslant \binom{l}{i}\tau^i \leqslant |\Gamma_\lambda|!\tau^i \leqslant N!\tau^i$, при этом имеем также $l \leqslant |\Gamma_\lambda| \leqslant N$. Таким образом, число различных многочленов $P(t)$ с целыми рациональными коэффициентами, единицей при старшей степени аргумента, имеющих корнями характеристические числа матрицы Y и неприводимых над $\mathbb{Q}$ ограничено сверху числом, зависящим только от η и $\varkappa$ и не зависящим от выбора группы G во множестве Σ. Следовательно, и общее количество всех попарно различных чисел λ спектра матрицы Y также ограничено сверху числом, зависящим только от η и $\varkappa$(и не зависящим от порядка $|G|$ матрицы Y).

Обозначим теперь через $\lambda_1 = \tau, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ все попарно различные характеристические числа матрицы Y, а через q_i — кратность λ_i как корня характеристического уравнения матрицы Y. Тогда $q_1 = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{m} q_i = |G|$. Если s — натуральное число, то

$$\operatorname{tr}(Y^s) = \sum_{i=1}^{m} q_i \lambda_i^s.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tr}(Y^s) = 1^G((\sum_{j=1}^{|a_1|} a_1^j + \sum_{j=1}^{|a_2|} a_2^j)^s) = 1^G(\sum_{g\in G} \beta_{s,g} g) = \beta_{s,1}|G|,$$

где 1^G — характер регулярного представления группы G. Таким образом, имеем следующую систему равенств

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \lambda_i^s = \beta_s |G| \quad (s = 0, 1, \ldots, m-1).$$

В этих соотношениях $\beta_s = \beta_{s,1}$ — целые рациональные числа, $\beta_0 = 1$. Рассматривая эти равенства как систему уравнений для q_i и повторяя соответствующие рассуждения из теоремы 2, получаем

$$q_i \prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{m} (\lambda_i - \lambda_j) = |G| \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1-i} \beta_j S_{m-1-j}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_m).$$

Так как $q_1 = 1, \lambda_1 = \tau$, то

$$\prod_{j=2}^{m} (\tau - \lambda_j) = |G| \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j S_{m-1-j}(\lambda_2, \ldots, \lambda_m).$$

Множество чисел $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ вместе с каждым числом λ_i содержит все его сопряженные, поэтому все числа $\prod\limits_{j=2}^{m} (\tau - \lambda_j), S_{m-1-j}(\lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ являются целыми рациональными. Следовательно, $\prod\limits_{j=2}^{m} (\tau - \lambda_j) \equiv 0 (\operatorname{mod} |G|)$, откуда получаем оценку $|G| \leqslant \prod\limits_{j=2}^{m} (\tau - \lambda_j)$. Из неравенств $|\lambda_j| \leqslant \tau$ вытекает, что $|G| \leqslant (2\tau)^{m-1}$. Так как число m ограничено сверху числом, зависящим только от η и $\varkappa$, а $\tau \leqslant 2\eta$, то из последнего неравенства следует ограниченность сверху порядков всех групп, входящих во множество Σ, а следовательно, и конечность самого множества Σ. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Кэртис Ч., Райнер И., *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, Наука, М., 1969.

[2] Платонов В.П., *Арифметические и структурные проблемы в линейных алгебраических группах*, Proc. Internat. Congress Math. Vancouver (1974), 471–476.

[3] Платонов В.П., *Кольца и многообразия представлений конечно порожденных групп*, Вопр. алгебры, вып. 4 (1989), 36–40.

[4] Залесский А.Е., *Собственные значения матриц конечных линейных групп и теория представлений*, Вопр. алгебры, вып. 4 (1989), 22–36.

[5] Струнков С.П., О некоторых арифметических свойствах конечных групп, Международная конференция по алгебре, тезисы докладов по теории групп, Новосибирск, 1989.

[6] Холл М., *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.

[7] Зейферт Г., Трельфалль В., *Топология*, ГОНТИ, М.;Л., 1938.

[8] Борисович Ю.Г., Близнюков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н., *Введение в топологию*, Высшая школа, М., 1980.

[9] Кострикин А.И., *Вокруг Бернсайда*, Наука, М., 1988.

[10] Hall P., Higman G., *The p-length of p-soluble group and reduction theorems for Bernside's problem*, Proc. London Math. Soc. **6**, no. 3 (1956), 1–42; *рус. пер: p-длина p-разрешимой группы и редукционные теоремы для проблемы Бернсайда*, Математика **13**, no. 2 (1969), 64–104.

[11] Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц*, Наука, М., 1966.

[12] Blichfeldt H.F., *Finite collineation groups*, Univ. Chicago Press, Chicago, 1917.

[13] Залесский А.Е., *Линейные группы*, Успехи мат. наук **36**, вып. 5 (1981), 57–107.

Поступило 26 июня 1990 г.

Московский инженерно-физический
институт
115409, Москва, М-409
Каширское шоссе, 31