УДК 519.4

Сэндвичи в алгебрах Ли

А. И. Кострикин (Москва)

Введение

Имеются в виду тождества вида

$$\operatorname{ad} c \cdot \operatorname{ad} x_1 \ldots \operatorname{ad} x_k \cdot \operatorname{ad} c = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где $x_1, \ldots, x_k$ — произвольные k элементов алгебры Ли L с операцией умножения $(x, y) \mapsto [xy]$, а $c \neq 0$ — некоторый ее фиксированный элемент, называемый оболочкой сэндвича (1).

Как обычно, $\operatorname{ad} x : y \mapsto [xy]$ — оператор присоединенного представления алгебры L. Сэндвич (1) имеет, по определению, толщину m, если найдутся элементы $e_1, \ldots, e_{m+1}$, для которых $\operatorname{ad} c \cdot \operatorname{ad} e_1 \ldots \operatorname{ad} e_{m+1} \times \times \operatorname{ad} c \neq 0$. При $m \leqslant 1$ будем говорить о тонком сэндвиче, а при $m > 1$ — о толстом. Толщина сэндвича в принципе может быть неограниченной. Если, например, алгебра L обладает нетривиальным центром $Z(L)$ или хотя бы абелевым идеалом N, то, как нетрудно заметить, при $c \in N$ мы будем иметь сэндвич неограниченной толщины. Впредь, желая избежать малоинтересной с нашей точки зрения ситуации, условимся понимать под L алгебру Ли без абелевых идеалов и, в частности, с $Z(L) = 0$. По той же причине предполагается, что основное поле K имеет конечную характеристику $p > 5$.

В этой работе доказывается следующая

Теорема. *Пусть алгебра Ли L, порожденная над K элементами x_0, $x_1, \ldots, x_d$, $(\operatorname{ad} x_i)^2 = 0$, $0 \leqslant i \leqslant d$, удовлетворяет условию Энгеля $(\operatorname{ad} x)^n = 0$ $\forall x \in L$, $n < p$. Тогда в L существуют толстые сэндвичи.*

Толстыми сэндвичами обладает также всякая конечномерная алгебра Ли над K, в которой имеется хотя бы один тонкий сэндвич.

Вытекающая из этой теоремы несложная философия «был бы тонкий сэндвич, найдется и толстый» проявила свою жизнеспособность по меньшей мере дважды. Именно, изучение свойств сэндвичей в работе [1] (там они фигурировали без всякого названия) привело к доказательству локальной нильпотентности алгебр Ли, удовлетворяющих n-му условию Энгеля, а в дальнейшем (см. работы [2], [3]) послужило основой для важного критерия, характеризующего конечномерные классические простые алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики p. Так как во всех известных примерах неклассических простых алгебр Ли сэндвичи (а точнее, оболочки сэндвичей) существуют, то теорема содержательна в обеих своих частях.

Утверждение первой или «энгелевой» части теоремы, казавшееся автору 20 лет назад довольно очевидным, использовалось в работе [1] в качестве промежуточного этапа, оформленного, к сожалению, несовершенным образом. Несовершенство проистекало из-за чрезмерного стремления к краткости изложения. Фактически это сводилось к тому, что многие детали автор держал в голове, не доводя их до сведения читателя. Немногим дотошным читателям, к категории которых автор с благодарностью и удовольствием относит Уайгольда (J. Wiegold), Ивасаву (K. Iwasawa), а также здравствовавшего в то время В. В. Морозова, приходилось писать пространные письма, скупо излагающие то, что должно было содержаться в работе.

Вторая, или «конечномерная» часть теоремы в некотором смысле, более интересна для приложений. Но, как и в работе [2], она приводится без какой-либо аргументации, в расчете на добросовестного читателя, который возьмет на себя труд провести параллель с рассуждениями в § 3 работы [1]. Более того, представляется привлекательной следующая

Задача. Найти доказательство «конечномерной» части теоремы средствами линейной алгебры, не опираясь на комбинаторные соображения, развитые в [1].

Вероятно, настала пора подумать, чтобы заново, более элегантными средствами решить всю ослабленную проблему Бернсайда для простого показателя p и, может быть, подобрать ключи к общему случаю p^m. Не окажет ли стимулирующего воздействия публикация настоящего «мемуарного» материала, хранившегося в течение многих лет в виде черновых набросков?

§ 1. Подготовительная часть

Поскольку нам придется регулярно ссылаться на работу [1], удобно сохранить введенные там обозначения. В частности, алгебра Ли L, элементы которой обозначаются строчными латинскими буквами, отождествляется с алгеброй внутренних дифференцирований. Операция умножения в L сводится к обычному коммутированию: $[xy]=xy-yx$ в обертывающей алгебре U_L, элементы которой обозначаются большими латинскими буквами. Для краткости внутренние скобки в нормированном произведении опускаются:

$$[\ldots[[ua_1]a_2]\ldots a_m]=[ua_1a_2\ldots a_m],$$

причем ввиду условия $Z(L)=0$ справедлива импликация в обе стороны:

$$A=a_1a_2\ldots a_m=0 \Leftrightarrow [uA]=[ua_1a_2\ldots a_m]=0 \quad \forall u\in L.$$

Определение сэндвича толщины m в новых обозначениях сводится к системе тождеств

$$cx_1x_2\ldots x_kc=0, \quad k=0, 1, \ldots, m, \quad \forall x_k\in L,$$

и к условию $ce_1e_2\ldots e_{m+1}c\neq 0$, $e_i\in L$. Известны следующие элементарные свойства.

а) *Толщина сэндвича всегда нечетна.*

Пример. Пусть c — оболочка тонкого сэндвича. Тогда $c^2=0 \Rightarrow [uc^2]=0 \Rightarrow cuc=0$.

б) *Если c — оболочка сэндвича толщины m, то при любом $x \in L$ элемент $[cx^{m+2}c]$ либо равен нулю, либо является оболочкой сэндвича толщины $l \geqslant m$. При $p-7 \geqslant m > 1$ всегда имеет место строгое неравенство $l > m$, и толщину сэндвича тем самым можно довести до $p-4$ (до сколь угодно большой величины в случае основного поля K характеристики нуль).*

Пример. $c^2=0 \Rightarrow [cx^3c]^2=0$, т. е. при отсутствии толстых сэндвичей в алгебре мы получаем «воспроизводство» тонких сэндвичей.

Для доказательства свойств а), б), которые в полной общности нам не понадобятся, см. § 1 в [1].

Существование толстого сэндвича в энгелевой алгебре L устанавливается при помощи формулируемых ниже лемм 1—3, смысл которых виден из следующих дополнительных свойств тонких сэндвичей.

в) *Пусть c — оболочка тонкого сэндвича в произвольной алгебре Ли L, и пусть $cu_1^2cu_2^2c\ldots cu_m^2c=0$ при любых $u_i \in L$ и некотором натуральном $m \geqslant 2$. Тогда в L существует толстый сэндвич.*

Это вытекает из доказательства леммы 3.2 в работе [1], не использующего каких-либо специальных свойств алгебры L.

г) *Пусть L — энгелева или конечномерная агебра Ли и c — оболочка тонкого сэндвича. Пусть также при любых $u, v \in L$ выполнено соотношение $[cu^3c][cv^3c]=0$. Тогда в L существует толстый сэндвич.*

Это утверждение совпадает с леммой 3.4 из [1], основанной на лемме 3.3 из [1], в конце доказательства которой нужно убедиться в том, что равен нулю элемент вида $[hc_1u_1^2c_1\ldots c_1u_m^2c_1]$, $c_1^2=0$, с перестановочными u_i ($\forall u_i \in L$!):

$$[hc_1u_1^2c_1 \ldots c_1u_m^2c_1] = [hc_1u_{\pi 1}^2c_1 \ldots c_1u_{\pi m}^2c_1]$$

(π — произвольная перестановка симметрической группы S_m). В этом месте использовалось n-е условие Энгеля при $m=n$ (индекс m — в нашем распоряжении). Если L — всего лишь конечномерная алгебра Ли с базисом $e_1, \ldots, e_r$, то, как легко заметить, элементы u_k без ограничения общности можно брать в виде $u_k=e_i$ или $u_k=e_i+e_j$. Значит, различных среди них не более $\binom{r+1}{2}$, а в таком случае при достаточно большом m получатся совпадающие u_k. Перестановочность u_k и тождество $c_1u^2c_1u^2c_1=0$ завершают рассуждения.

Первая часть нашей теоремы имеет смысл только в связи с доказательством теоремы о локальной нильпотентности энгелевых алгебр Ли, поэтому данную нам алгебру Ли

$$L=\langle x_0, x_1, \ldots, x_d \mid x_i^2=0,\ 0 \leqslant i \leqslant d;\ u^n=0\ \ \forall u \in L;\ n<p\rangle$$

можно считать (рассуждая от противного) локально регулярной, т. е. не содержащей нетривиальных локально нильпотентных идеалов. Индукция по числу образующих позволяет также считать любую подалгебру в L с d образующими $y_1, \ldots, y_d$ ($y_i^2=0$) нильпотентной. Для краткости будем говорить, что L — экстремальная алгебра Ли. В этой экстремальной алгебре нам и нужно найти толстый сэндвич. Некоторым указанием на результативность такого поиска может служить чрезвычайно полезное свойство мультипликативной замкнутости оболочек тонких сэндвичей.

д) *Если* $c_1^2=0=c_2^2$, *то* $[c_1c_2]^2=0$. *Если, далее,*

$$c=[c_0c_1c_2c_3c_4]=[c_0c_{\pi1}c_{\pi2}c_{\pi3}c_{\pi4}] \quad \forall\pi\in S_4 \quad (c_i^2=0),$$

то либо c, *либо* $[cb^3c]$ — *оболочка толстого сэндвича (для некоторого элемента* $b\in L$*)*.

Доказательство содержится в первой (доброкачественной) половине доказательства теоремы 3 из [1].

Воспользоваться свойством д) в полной мере, по-видимому, нелегко, но его достижимые аналоги позволяют строить достаточно длинные произведения оболочек тонких сэндвичей с заданными свойствами.

Лемма 1. *Пусть* c_0, c_1, c_2 — *оболочки тонких сэндвичей в произвольной алгебре Ли* L. *Если*

$$c=[c_0c_1c_2]=[c_0c_2c_1]$$

(не требуется, чтобы $[c_1c_2]=0$*), то* $[cuvc_1c_2]=0$ *для любых* $u, v\in L$ *(т. е.* $cuc_1c_2=0$*)*.

Доказательство. Линеаризацией получаем, что $[cu^2c_1c_2]=0$ $\forall u\in L$, $\Rightarrow[cuvc_1c_2]=0$. Далее,

$$[cu^2c_1c_2]=[c_0c_1\underline{c_2[c_1u^2]c_2}]+2[c_0\underline{c_1c_2}uc_1uc_2]-[c_0\underline{c_1c_2}c_1u^2c_2]=2[c_0c_2\underline{c_1uc_1}uc_2]=0.$$

Примечание. Здесь и в дальнейшем чертой снизу выделяется отрезок произведения, на который следует обратить внимание: он либо дает нуль, либо подлежит преобразованию, обычно легко усматриваемому из контекста.

Лемма 2. *Пусть* L — *произвольная алгебра Ли;* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m\geqslant 3)$ — *любая конечная последовательность оболочек тонких сэндвичей, возможно, с повторениями. Если элемент* $c=[c_1c_2\ldots c_m]$ *таков, что* $[cc_i]=0$, $1\leqslant i\leqslant m$, *и* $cc_k=cc_l=0$, *где* k *и* l — *два фиксированных индекса* $(k\neq l)$, *меньших, чем* m, *то в* L *существует толстый сэндвич.*

Доказательство. См. п. 1 доказательства леммы 3.5 из [1]. В конце этого пункта имеется ссылка на первую половину доказательства леммы 3.3 из [1], приспособленную к произвольной алгебре Ли.

Лемма 3. *Пусть* L — *экстремальная алгебра Ли (определенная выше). Тогда в* L *существуют оболочки тонких сэндвичей* c, c_0, c_1, c_2 *такие, что*:

i) $[cc_0c_1c_2]\neq 0$;

ii) $[cc_0c_1c_2]=[cc_{\pi0}c_{\pi1}c_{\pi2}]$ $\forall\pi\in S_3$;

iii) $[c_0c_1]=0=[c_0c_2]$ (*не утверждается, что* $[c_1c_2]=0$).

Доказательство. См. доказательство теоремы 3 в [1], за исключением последних 13 строк.

§ 2. Энгелева часть

Всюду ниже L — экстремальная алгебра Ли. Так как L порождена оболочками тонких сэндвичей, то свойство д) означает, в частности, что любой элемент $z \in L$ записывается в виде суммы оболочек тонких сэндвичей:

$$z = z_1 + z_2 + \ldots + z_k, \quad z_i^2 = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{2}$$

Этап 1. По лемме 3 в L найдутся элементы c, c_0, c_1, c_2 $(c_i^2=0)$, $[cc_0c_1c_2]=[cc_{\pi 0}c_{\pi 1}c_{\pi 2}]\neq 0$ $\forall \pi \in S_3$. По лемме 2 имеем $[cc_0c_1c_2c]\neq 0$ и $[cc_0c_1c_2cac_0]\neq 0$ для некоторого $a \in L$, причем в соответствии с (2) можно полагать $a^2=0$. Значит,

$$[cc_0c_1c_2cc_0^1] \neq 0, \quad c_0^1 = [ac_0], \quad [c_0^1c_0] = 0 = c_0^1c_0.$$

Теперь, кроме очевидного соотношения $[cc_0c_1c_2cc_0^1c] = 0$, имеем еще

$$[cc_0c_1c_2cc_0^1c_i] = [cc_kc_l\underline{c_icc_0^1}c_i] = [cc_k\underline{c_lc_i}c_0^1cc_i] = [cc_1c_2\underline{c_0c_0^1}cc_i] = 0.$$

Здесь мы использовали обозначение $\{0, 1, 2\} = \{i, k, l\}$. По лемме 2 имеем

$$[cc_0c_1c_2cc_0^1c^{(1)}] \neq 0, \quad c^{(1)} = [a_1c], \quad a_1^2 = 0.$$

По условию $c_0^1uc_0 + c_0uc_0^1 = 0$, откуда

$$[cc_0c_1c_2cc_0^1c^{(1)}c_0] = -[cc_1c_2\underline{c_0cc_0}c^{(1)}c_0^1] = 0.$$

Далее, $c^{(1)}c = 0 = cc^{(1)}$ (стало быть, $cuc^{(1)} + c^{(1)}uc = 0$), так что $[cc_0c_1c_2cc_0^1\underline{c^{(1)}c}] = 0$ и $[cc_0c_1c_2cc_0^1c^{(1)}uc] = -[cc_0c_1c_2\underline{cc_0^1}cuc^{(1)}]=0$, поэтому по лемме 2 имеем

$$[cc_0c_1c_2cc_0^1c^{(1)}c_{i_1}] \neq 0, \quad i_1 \in \{1, 2\}.$$

Предположим, что мы уже нашли элемент

$$e = [cc_0c_1c_2cc_0^1c^{(1)}c_{i_1}c^{(2)}c_{i_2} \ldots c^{(m-1)}c_{i_{m-1}}c^{(m)}c_{i_m}] \neq 0, \tag{3}$$

где $i_1 \in \{1, 2\}$, $i_k \in \{0, 1, 2\}$, $k > 1$, $c^{(k)} = [a_kc]$, $a_k^2 = 0$. Так как $e = [cc_0c_1c_2c\,[c_0^1c^{(1)}c_{i_1}c^{(2)} \ldots c_{i_{m-1}}c^{(m)}c_{i_m}]]$, то $[ec] = 0$. Кроме того, в соответствии с леммой 1,

$$[ec_j] = [cc_0c_1c_2\,[cc_0^1c^{(1)}c_{i_1} \ldots c_{i_{m-1}}c^{(m)}]\,c_{i_m}c_j] = 0$$

(при $i_m = j$ это очевидно и так, а при $i_m \neq j$ следует записать $[cc_0c_1c_2] = [cc_kc_{i_m}c_j] = [c'c_{i_m}c_j]$ и заменить в лемме 1 c_0 на c'). По лемме 2 теперь имеем $[ec^{(m+1)}] \neq 0$, $c^{(m+1)} = [a_{m+1}c]$, $a_{m+1}^2 = 0$ (для некоторого a_{m+1}), и так как $[ec^{(m+1)}uc] = -[\underline{ec}uc^{(m+1)}] = 0$, $[ec^{(m+1)}[c_0^1 c^{(1)} c_{i_1} \ldots c^{(m)} c_{i_m}]] = 0$, то снова по лемме 2 будет $[ec^{(m+1)} c_{i_{m+1}}] \neq 0$ для какого-то индекса $i_{m+1} \in \{0, 1, 2\}$.

Итак, мы получили часть следующего важного утверждения.

Предложение 1. *Если в L нет толстых сэндвичей, то существует элемент e вида* (3) *со сколь угодно большим индексом m. При этом в произведении* (3) *не может быть интервалов $c_{i_s} c^{(s+1)} c_{i_{s+1}} \ldots c_{i_{s+t-1}} c^{(s+t)} c_{i_{s+t}}$ длины $t > 2n$ (n — показатель энгелевости) с нижними индексами всего лишь двух сортов*: $\{i_s, i_{s+1}, \ldots, i_{s+t}\} = \{i, j\} \subset \{0, 1, 2\}$.

Доказательство. В самом деле, предположим, что

$$e = [e' c^{(s)} c_j c^{(s+1)} c_i c^{(s+2)} c_j \ldots c^{(s+2n-1)} c_i c^{(s+2n)} c_j \ldots c_{i_m}],$$

где e' — элемент того же типа, что и e. Запишем еще e в виде

$$e = [e'' c^{(\alpha)} c_\nu c^{(\beta)} c_\mu c^{(\gamma)} c_\nu \ldots c_{i_m}], \quad \{\nu, \mu\} = \{i, j\},$$

и обратим внимание на соотношения:

$$[e'' c^{(\alpha)} c_\nu [c_\mu c^{(\beta)} c^{(\gamma)}] c_\nu \ldots c_{i_m}] = 0;$$

$$[e'' c^{(\alpha)} c_\nu c_\mu c^{(\beta)} c^{(\gamma)} c_\nu \ldots c_{i_m}] = 0$$

(см. выше доказательство соотношения $[ec_j] = 0$);

$$[e'' c^{(\alpha)} c_\nu c^{(\gamma)} c^{(\beta)} c_\mu c_\nu \ldots c_{i_m}] = -[e'' c^{(\alpha)} c_\nu c a_\gamma a_\beta c c_\mu \ldots] = -[e''' c a_\gamma a_\beta c c_\mu \ldots] = 0$$

(все штрихованные элементы e', e'', e''' обладают свойствами e). Мы получаем косую симметрию e относительно $c^{(k)}$, $s+1 \leqslant k \leqslant s+2n$:

$$e = [e'' c^{(\alpha)} c_\nu c^{(\beta)} c_\mu c^{(\gamma)} c_\nu \ldots c_{i_m}] = -[e'' c^{(\alpha)} c_\nu c^{(\gamma)} c_\mu c^{(\beta)} c_\nu \ldots c_{i_m}].$$

Заодно мы получаем также выражение

$$e = [e' c^{(s)} c_j f_1 f_2 \ldots f_n \ldots c_{i_m}],$$

где $f_k = [c^{(s+2k-1)} c_i [c^{(s+2k)} c_j]]$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Косая симметрия e относительно $c^{(k)}$, $s+1 \leqslant k \leqslant s+2n$, влечет, очевидно, полную симметрию e относительно $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

$$e = [e' c^{(s)} c_j f_{\pi 1} f_{\pi 2} \ldots f_{\pi n} \ldots c_{i_m}] \quad \forall \pi \in S_n,$$

причем замена в e одного из f_ν на f_μ, $\mu \neq \nu$, дает нулевой элемент, поскольку симметрия при этом сохраняется, а $f_\mu^2 = 0$. На основании всего вышесказанного можно утверждать, что

$$n! e = [e' c^{(s)} c_j (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)^n \ldots c_{i_m}] = 0.$$

Здесь мы впервые воспользовались n-м условием Энгеля. Так как $n < p$, то $e = 0$. Получили противоречие, доказывающее наше утверждение.

Этап. 2. Согласно предложению 1 (при достаточно большом m)

каждый из индексов 0, 1, 2 должен встретиться в произведении (3) сколь угодно много раз. Рассуждаем теперь так. Построим элемент

$$e_1 = [cc_0c_1c_2cc_0^1c^{(1)}c_{i_1}c^{(2)} \ldots c^{(k)}c_{i_k}c^{(k+1)}c_0] \neq 0, \quad \{i_1, \ldots, i_k\} = \{1, 2\},$$

с минимально возможным индексом k. Как отмечалось ранее, $i_1 \in \{1, 2\}$, поэтому $k \geqslant 1$. Никакие два соседних индекса i_s, i_{s+1}, очевидно, совпадать не могут, т. е. $i_1, \ldots, i_k = 1, 2, 1, 2, \ldots$ или $2, 1, 2, 1, \ldots$. Прием, подобный использованному в ходе доказательства предложения 1, показывает, что имеет место косая симметрия e_1 относительно $c^{(s)}$, $c^{(s+1)}$, $2 \leqslant s \leqslant k-1$. Кроме того, $[c_{i_1}c^{(1)}c^{(2)}] = -[c_{i_1}ca_1a_2c] = [bc]$ — элемент того же типа, что и $c^{(1)}$, $c^{(2)}, \ldots$. То же относится к элементу $[c_{i_k}c^{(k)}c^{(k+1)}]$. Стало быть, в силу минимальности k имеют место соотношения

$$[cc_0c_1c_2cc_0^1\,[c_{i_1}c^{(1)}c^{(2)}]\,c_{i_2} \ldots c^{(k+1)}c_0] = 0 = [c \ldots c^{(1)}c_{i_1}c^{(2)} \ldots [c_{i_k}c^{(k)}c^{(k+1)}]\,c_0],$$

из которых следует косая симметрия e_1 относительно $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, соответственно, $c^{(k)}$, $c^{(k+1)}$. Таким образом,

$$e_1 = (-1)^{\operatorname{sgn}\pi}\,[cc_0c_1c_2c_0^1c^{(\pi 1)}c_{i_1}c^{(\pi 2)}c_{i_2} \ldots c^{(\pi(k+1))}c_0] \quad \forall\,\pi \in S_{k+1}.$$

Вспоминая конструкцию произведения (3) и вновь опираясь на предложение 1, перейдем к элементу

$$e_2 = [e_1c^{(k+2)}c_{j_1} \ldots c^{(k+l+1)}c_{j_l}c^{(k+l+2)}c_0] \neq 0, \quad \{j_1, \ldots, j_l\} = \{1, 2\},$$

с минимально возможным индексом l. Как и в случае элемента e_1, выполняется свойство косой симметрии:

$$e_2 = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\,[e_1c^{(\sigma(k+2))}c_{j_1} \ldots c_{j_l}c^{(\sigma(k+l+2))}c_0] \quad \forall\,\sigma \in S_{l+1}.$$

Далее различаются две альтернативы.

П е р в а я а л ь т е р н а т и в а. Выполнено соотношение

$$[ec_0c_1c_2c \ldots c^{(\pi k)}c_{i_k}\,[c_0c^{(\pi(k+1))}c^{(\sigma(k+2))}]\,c_{j_1} \ldots c_{j_l}c^{(\sigma(k+l+2))}c_0] = 0$$

для всех π и σ. Это будет иметь место, например, при $i_k = j_1$. В такой ситуации произведение e_2 кососимметрично относительно всех элементов $c^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, k+l+2$, поскольку

$$[\ldots c_{i_k}c_0c^{(\pi(k+1))}c^{(\sigma(k+2))} \ldots] = 0 = [\ldots c_{i_k}c^{(\pi(k+1))}c^{(\sigma(k+2))}c_0 \ldots]$$

(аналогичные рассуждения мы уже использовали ранее). В частности,

$$e_2 = \pm\,[\ldots c^{(s)}c_0], \quad s = 1, 2, \ldots, k+l+2,$$

откуда $[e_2c^{(s)}] = 0$. Соотношения $[e_2c_0^1] = 0$, $[e_2c_i] = 0$, $[e_2c] = 0$ проверяются так же, как и для произведения (3). Так как, далее, $e_2c_0 = 0$ и c_0 входит в e_2 трижды, то мы находимся в условиях применимости леммы 2, обеспечивающей существование в L толстого сэндвича.

Вторая альтернатива. Найдутся перестановки π, σ, для которых

$$[cc_0c_1c_2cc_0^1 \ldots c^{(\pi k)}c_{i_k}[c_0c^{(\pi(k+1)}c^{(\sigma(k+2))}]c_{j_1} \ldots c_0] \neq 0.$$

Положим $c^{(\lambda)}=[c_0c^{(\pi(k+1))}c^{(\sigma(k+2))}]=[b'c]$. В произведении

$$[cc_0c_1c_2cc_0^1c^{(1)}c_ic^{(2)}c_j \ldots c_jc^{(k)}c_ic^{(\lambda)}c_j \ldots c_0] \neq 0, \quad \{i, j\} = \{1, 2\},$$

индексы 1, 2 правильно чередуются. Поэтому в силу косой симметрии относительно $c^{(s)}$, $c^{(s+1)}$, $2 \leqslant s \leqslant k$ $(c^{(k+1)}=c^{(\lambda)})$, мы можем поставить $c^{(\lambda)}$ на место $c^{(2)}$ и уже там «развернуть», используя определение $c^{(\lambda)}$. Получим

$$[\ldots c_ic^{(\pi(k+1))}c_0c^{(\sigma(k+2))}c_j \ldots] + [\ldots c_ic^{(\sigma(k+2))}c_0c^{(\pi(k+1))}c_j \ldots] \neq 0.$$

Значит, одно из слагаемых отлично от нуля. После небольшого изменения обозначений получим элемент

$$e_3 = [cc_0c_1c_2c_0^1c^{(1)}c_{i_1}c^{(2)}c_0c^{(3)}c_{i_2}c^{(4)}c_{i_3} \ldots c^{(k)}c_{i_k}c^{(k+1)}c_0] \neq 0$$

с правильно чередующимися нижними индексами $i_1, \ldots, i_k \in \{1,2\}$ и с минимально возможным индексом $k \geqslant 3$ (между прочим, прежний индекс k в e_2 оказался равным 1). Последнее условие обеспечивает косую симметрию e_3 относительно $c^{(3)}, c^{(4)}, \ldots, c^{(k+1)}$. Элемент e_3 кососимметричен также относительно $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, но переставить местами $c^{(2)}$, $c^{(3)}$, вообще говоря, нельзя, а, стало быть, невозможно применить и лемму 2, поскольку $[e_3c^{(1)}]\neq 0$ или $[e_3c^{(2)}]\neq 0$. Приходится еще раз применить прежнюю конструкцию.

Именно, записав e_3 в виде

$$e_3 = [cc_0c_1c_2c\widetilde{c}_0c^{(3)}c_{i_2} \ldots c^{(k)}c_{i_k}c^{(k+1)}c_0],$$

где $\widetilde{c}_0 = [c_0^1c^{(1)}c_{i_1}c^{(2)}c_0]$ — элемент, выполняющий функцию c_0^1, построим произведение

$$e_4 = [e_3c^{(k+2)}c_{i_{k+1}}c^{(k+3)} \ldots c^{(k+l+1)}c_{i_{k+l}}c^{(k+l+2)}c_0] \neq 0$$

с минимально возможным индексом l. Снова возникают две альтернативы: одна из них сразу приводит к толстому сэндвичу, а вторая дает элемент

$$[cc_0c_1c_2c\widetilde{c}_0c^{(3)}c_{i_2}c^{(4)} \ldots c^{(k)}c_{i_k}[c_0c^{(k+1)}c^{(k+2)}]c_{i_{k+1}}c^{(k+3)} \ldots c^{(k+l+2)}c_0] \neq 0$$

(перестановки π и σ для краткости опущены) с правильно чередующимися индексами $i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{k+l} \in \{1, 2\}$. Это обстоятельство дает нам возможность поставить $c^{(\mu)}=[c_0c^{(k+1)}c^{(k+2)}]$ на место $c^{(4)}$ и получить отличный от нуля элемент

$$[cc_0c_1c_2c\widetilde{c}_0c^{(3)}c_{i_2}c^{(\mu)}c_{i_3} \ldots c^{(k+l+2)}c_0].$$

Без ограничения общности можно считать $i_1=1$, $i_2=2$, $i_3=1$ и т. д. «Развернем» теперь коммутаторы $\widetilde{c}_0$ и $c^{(\mu)}$, памятуя о том, какие члены заведомо будут равны нулю, и отбросим лишние сомножители. После небольшого изменения обозначений ($c^{(k+1)}$ или $c^{(k+2)}$ заменить на $c^{(4)}$) мы придем к утверждению, завершающему второй этап.

Предложение 2. *Если в L нет толстых сэндвичей, то найдется оболочка тонкого сэндвича вида*

$$d=[cc_0c_1c_2cc_0^1c^{(1)}c_1c^{(2)}c_0c^{(3)}c_2c^{(4)}c_0]\neq 0.$$

Произведение d кососимметрично в отдельности относительно $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ и $c^{(3)}$, $c^{(4)}$.

Поразительно, что для доказательства существования оболочки d, имеющей вполне конкретный вид, пришлось избрать столь окольный путь. Вся эта комбинаторика похожа на шаманство. Сейчас мы увидим, что заклинания действуют.

Этап 3. Возможны два случая.

1) $[dc^{(1)}]=0=[dc^{(2)}]$. Тогда, очевидно, $[dc^{(i)}]=0$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, и $[dc_0^1]=0$ (ибо $c_0c_0^1=0$). Соотношения $[dc]=0$, $[dc_i]=0$, $i=0,\ 1,\ 2$, уже проверялись для всех произведений вида (3). Кроме того, $dc_0=0$, а так как степень d относительно c_0 равна трем, то лемма 2 непосредственно приводит к толстому сэндвичу.

2) $[dc^{(1)}]\neq 0$ или $[dc^{(2)}]\neq 0$. Ввиду косой симметрии d относительно $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ достаточно ограничиться рассмотрением элемента

$$f=[dc^{(1)}]=[cc_0c_1c_2cc_0^1c^{(1)}c_1c^{(2)}c_0c^{(3)}c_2c^{(4)}c_0c^{(1)}]\neq 0,$$

записываемого также в виде $f=[cc_0c_1c_2ch]$, где $h=[c_0^1c^{(1)}c_1c^{(2)}c_0c^{(3)}c_2c^{(4)}c_0c^{(1)}]$,

Покажем, что $[cc_0c_1c_2ch]$ — оболочка толстого сэндвича, для чего вновь воспользуемся леммой 2. Так как $c^{(1)}c=0$ и, следовательно, $c^{(1)}uc+cuc^{(1)}=0$ $\forall u\in L$, то $[fc]=0$ и $[fuc]=[dc^{(1)}uc]=-[dcuc^{(1)}]=0$ (см. случай 1)). Степень f относительно c равна двум, и множитель c не занимает крайнего правого положения, поэтому нужно убедиться лишь в том, что c_0, c_1, c_2 коммутируют с f (вопреки общим положениям, изложенным при конструировании произведения (3)). Для c_0 это очевидно, а для c_2 является результатом небольшой проверки:

$$[fc_2]=[\ldots c_0c^{(3)}\underline{c_2c^{(4)}c_0c^{(1)}c_2}]=-[\ldots \underline{c_0c^{(3)}c_2c^{(1)}}c_0c^{(4)}c_2]=$$

$$=[\ldots \underline{c^{(1)}c_1c^{(2)}c_0c^{(1)}}c_2c^{(3)}c_0c^{(4)}c_2]=-[cc_0c_1c_2\underline{cc_0^1c^{(1)}c_0}c^{(2)}c_1c^{(1)}\ \ldots]=$$

$$=[cc_1c_2\underline{c_0cc_0}c^{(1)}c_0^1\ \ldots]=0.$$

Что касается c_1, то проверка более утомительна. Мы имеем:

$$[fc_1]=[\ldots c_0^1c^{(1)}c_1c^{(2)}c_0c^{(3)}c_2c^{(4)}\ \ldots]=[\ldots c_0^1c^{(1)}[c_1c^{(2)}]c_0c^{(3)}c_2c^{(4}\ \ldots]=$$

$$=[\ldots c_0^1c^{(1)}[c_1c^{(2)}c_0]c^{(3)}c_2c^{(4)}\ \ldots]=[\ldots c_0^1c^{(1)}[c_1c^{(2)}c_0c^{(3)}]c_2c^{(4)}\ \ldots]=$$

$$=[\ldots c_0^1c^{(1)}[c_1c^{(2)}c_0c^{(3)}c_2]c^{(4)}\ \ldots]+[\ldots c_0^1c^{(1)}c_2[c_1c^{(2)}c_0c^{(3)}]c^{(4)}\ \ldots].$$

Но

$$[\ldots c_0^1c^{(1)}c_2[c_1c^{(2)}c_0c^{(3)}]c^{(4)}\ \ldots]=-[\ldots c_0^1c^{(1)}c_2c^{(3)}[c_1c^{(2)}c_0]c^{(4)}c_0\ \ldots]=$$

$$= [\ldots\ c_0^1 c^{(1)} c_2 c^{(3)} c_0 [c_1 c^{(2)}]\, c^{(4)} c_0\ \ldots] = -[\ldots\ c_0^1 c^{(1)} c_2 c^{(3)} c_0 c^{(2)} \underline{c_1 c^{(4)} c_0 c^{(1)} c_1}] =$$

$$= [\ldots\ c_0^1 c^{(1)} c_2 c^{(3)} \underline{c_0 c^{(2)} c_1 c^{(1)} c_0} c^{(4)} c_1] = -[\ldots\ c_0^1 \underline{c^{(1)} c_2 c^{(3)} c_0 c^{(1)}} c_1 c^{(2)} c_0 c^{(4)} c_1] =$$

$$= [c c_1 c_2 c_0 c \underline{c_0^1 c^{(1)}} c_0 c^{(3)} c_2 c^{(1)}\ \ldots] = -[c c_1 c_2 \underline{c_0 c c_0} c^{(1)} c_0^{(1)} c^{(3)} c_2 c^{(1)}\ \ldots] = 0.$$

Значит,

$$[fc_1] = [\ldots\ c_0^1 c^{(1)} [c_1 c^{(2)} c_0 c^{(3)} c_2]\, c^{(4)} c_0 c^{(1)} c_1] = [\ldots\ c_0^1 c^{(1)} [c_1 c^{(2)} c_0 c^{(3)} c_2 c^{(4)}]\, c_0 c^{(1)} c_1] =$$

$$= [\ldots\ c_0^1 \underline{c^{(1)} [c_1 c^{(2)} c_0 c^{(3)} c_2 c^{(4)} c_0]\, c^{(1)}} c_1] = 0.$$

Энгелева часть теоремы исчерпана.

З а м е ч а н и е. Пусть L — произвольная алгебра Ли с n-м условием Энгеля, не содержащая локально нильпотентных идеалов (или конечномерная алгебра Ли), и пусть $c_1, c_2 \in L$, причем

$$c_1 c_2 \neq 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = [c_1 c_2] = c_1 u^2 c_1 c_2 = 0 \quad \forall u \in L. \tag{4}$$

Для элементов $e_1 = [c_1 u^3 c_1]$, $e_2 = [v c_1 c_2]$ имеем $e_1^2 = e_2^2 = [e_1 e_2] = 0$,

поскольку, например,

$$[e_1 e_2] = [c_1 u^3 c_1 [v c_1 c_2]] = [c_1 u^3 c_1 [v c_2 c_1]] = [c_1 u^3 \underline{c_1 [v c_2]\, c_1}] = 0.$$

С другой стороны, из очевидных тождеств $c_1 [c_1 u^3 v] c_1 = 0$, $c_1 [c_1 u v c_2 v^2] c_1 = 0$, с учетом условий (4), вытекает, что

$$c_1 c_2 u v c_1 u^2 c_1 = -c_1 c_2 u^2 c_1 u v c_1, \quad c_1 u^2 c_1 u c_2 v c_1 = c_1 v c_2 u c_1 u^2 c_1.$$

В таком случае

$$e_2 e_1 = [c_1 u^3 c_1]\, v c_1 c_2 - [c_1 u^3 c_1]\, c_1 v c_2 - [c_1 u^3 c_1]\, c_2 v c_1 + [c_1 u^3 c_1]\, c_1 c_2 v =$$

$$= 3 c_1 u^2 c_1 u c_2 v c_1 = 3 c_1 v c_2 u c_1 u^2 c_1,$$

$$e_1 e_2 = \underline{v c_1 c_2 [c_1 u^3 c_1]} - c_2 v \underline{c_1 [c_1 u^3 c_1]} - c_1 v c_2 [c_1 u^3 c_1] + c_1 c_2 v [c_1 u^3 c_1] =$$

$$= -c_1 v c_2 [c_1 u^3]\, c_1 + c_1 c_2 v [c_1 u^3]\, c_1 = 3 c_1 v c_2 u c_1 u^2 c_1 - 3 c_1 c_2 u^2 c_1 u v c_1.$$

Стало быть, $0 = [e_1 e_2] = e_1 e_2 - e_2 e_1 = -3 c_1 c_2 u^2 c_1 u v c_1$.

Но тождество $c_1 c_2 u^2 c_1 u v c_1 = 0$ $\forall u, v \in L$ влечет, согласно утверждению 3) леммы 3.3 из [1], существование толстого сэндвича в L.

Это замечание делает лишними лемму 3.6 в [1] и следующие за ней рассуждения.

Поступила в редакцию
19/IV 1979 г.

Литература

1. **А. И. Кострикин**, О проблеме Бернсайда, Изв. АН СССР, серия матем., **23** (1959), 3—34.
2. **А. И. Кострикин**, Квадраты присоединенных эндоморфизмов в простых p-алгебрах Ли, Изв. АН СССР, серия матем., **31** (1967), 445—487.
3. **H. Strade**, Nonclassical simple Lie algebras and strong degeneration, Arch. Math., **24** (1973), 482—485.