Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. П. Рязанцева, Регуляризованный непрерывный аналог метода Ньютона для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве,
Изв. вузов. Матем., 2016, номер 11, 53–67

https://www.mathnet.ru/ivm9175

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
19 января 2026 г., 14:58:08

Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, № 11, с. 53–67 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

И.П. РЯЗАНЦЕВА

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ МОНОТОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. В гильбертовом пространстве для нелинейного уравнения с дифференцируемым по Фреше оператором построен непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона, получены достаточные условия его сильной сходимости к нормальному решению заданного уравнения при приближенном задании оператора и правой части уравнения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, монотонный оператор, метод Ньютона, непрерывный метод, сходимость.

УДК: 519.642

1. Основные предложения, вспомогательные утверждения и постановка задачи

Пусть H — вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ — монотонный ([1], с. 22) дифференцируемый по Фреше ([1], с. 29; [2], с. 636) нелинейный оператор на H, причем производная $A'(u)$ непрерывна по u на H и является ограниченным оператором на H для всех $u \in H$. Рассмотрим уравнение

$$Ax = f, \tag{1}$$

где f — некоторый фиксированный элемент из H.

Для нахождения решения уравнения (1) при определенных свойствах оператора A (свойства обеспечивают и существование решения (1)) можно использовать итеративный метод Ньютона, который определяется равенством ([2], с. 663)

$$x_n = x_{n-1} - [A'(x_{n-1})]^{-1}(Ax_{n-1} - f), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

элемент $x_0 \in H$ задается. В работе [3] предложен непрерывный аналог итерационного процесса (2) вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = -[A'(x(t))]^{-1}(Ax(t) - f) \tag{3}$$

с некоторым начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \in H, \tag{4}$$

где $t \geq t_0 \geq 0$. При этом сходимость решения $x(t)$ задачи Коши (3), (4) при $t \to +\infty$ к решению уравнения (1) установлена при более слабых ограничениях, чем сходимость последовательности $\{x_n\}$, определяемой равенством (2) (например, [4], [5]). В то же время имеется достаточно многообразный и обширный класс алгоритмов для численного решения эволюционных задач. В основном этими причинами вызван интере к методу (3), (4).

Поступила 19.03.2015

Рассмотрим более общее, чем (3), дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\gamma(t)[A'(x(t))]^{-1}(Ax(t) - f), \tag{5}$$

где $\gamma(t)$ — положительная непрерывная функция на $[t_0, +\infty)$.

Пусть оператор A является сильно монотонным на H, т. е.

$$(Au - Av,\, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \quad M > 0. \tag{6}$$

Тогда уравнение (1) имеет в H единственное решение ([1], с. 262; [6], п. 2; [7], п. 4.1), которое обозначим через $\widetilde{x}$. Считая задачу (5), (4) однозначно разрешимой в классе $C^1[t_0, +\infty)$, при нашем предположении (6), докажем стабилизацию ее решения при $t \to +\infty$ к решению $\widetilde{x}$ уравнения (1). Для этого (5) перепишем в виде

$$A'(x(t))\frac{dx(t)}{dt} + \gamma(t)(Ax(t) - f) = 0$$

или $y'(t) + \gamma(t)y(t) = 0$, где $y(t) = Ax(t) - A\widetilde{x}$. Следовательно, справедливо равенство

$$(y'(t), y(t)) + \gamma(t)\|y(t)\|^2 = 0. \tag{7}$$

Если положить $r(t) = \|y(t)\|^2/2$, то $r'(t) = (y'(t), y(t))$ и из (7) имеем $r'(t) + 2\gamma(t)r(t) = 0$. Отсюда находим

$$r(t) = r(t_0)\exp\left(-2\int_{t_0}^{t}\gamma(s)ds\right), \quad r(t_0) = \|Ax_0 - A\widetilde{x}\|^2/2. \tag{8}$$

Если

$$\int_{t_0}^{+\infty}\gamma(t)dt = +\infty, \tag{9}$$

то из (8) следует

$$r(t) = \|Ax(t) - A\widetilde{x}\|^2/2 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{10}$$

Кроме того, свойство (6) оператора A обеспечивает выполнение неравенства

$$\|x(t) - \widetilde{x}\| \leq \frac{1}{M}\|Ax(t) - A\widetilde{x}\|. \tag{11}$$

Теперь на основании (10) заключаем, что $x(t) \to \widetilde{x}$ при $t \to +\infty$ и любом начальном условии (4).

Далее частично будет использована схема этого доказательства при исследовании сходимости регуляризованного непрерывного аналога метода Ньютона.

Отметим, что в наших условиях свойство (6) оператора A эквивалентно неравенству [8]

$$(A'(u)h, h) \geq M\|h\|^2 \quad \forall u, h \in H.$$

Значит, при любом $u \in H$ существует линейный оператор $[A'(u)]^{-1}$, причем $\|[A'(u)]^{-1}\| \leq 1/M$ при всех $u \in H$ (ср. с [3]).

Условие (6) гарантирует однозначную разрешимость уравнения (1) и непрерывную зависимость его решения от возмущений данных определенного класса (например, [6] и (11)). Целью данной статьи является изучение регуляризованного непрерывного аналога метода Ньютона. Следовательно, справедливость свойства (6) оператора A далее не предполагается. Непрерывные методы регуляризации для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве, построенные на основе итеративного метода нулевого порядка (определение порядка см. [9], с. 124), исследовались в многочисленных работах, укажем, например, [10]–[13]. Рассматриваемый в данной статье метод, построенный на основе итеративного метода первого порядка, позволяет найти приближения к решению (1) в общем случае иного качества,

чем методом из [10]–[13], ибо методы отличаются направлением подхода к искомому решению [3]. Возможность получения приближений к решению некорректной задачи с априорно известными свойствами [14], [15] может быть обеспечена наличием многообразных методов регуляризации. Таким образом, поставленная задача представляет интерес. Отметим, что в отличие от итеративного метода Ньютона скорость сходимости его непрерывного аналога можно увеличить, используя замену переменной t (см. [10]).

Пусть N — непустое множество решений уравнения (1), x^* — нормальное решение (1), т. е. элемент выпуклого замкнутого множества N с минимальной нормой. Известно (например, [6]), что единственное решение уравнения

$$Ax_\alpha(t) + \alpha(t)x_\alpha(t) = f \tag{12}$$

при $t \to +\infty$ сильно сходится к решению x^* уравнения (1), т. е.

$$\lim_{t\to+\infty} \|x_\alpha(t) - x^*\| = 0, \tag{13}$$

если $\alpha(t)$ — положительная функция при $t \geq t_0$ и

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0. \tag{14}$$

Далее дополнительно считаем, что $\alpha(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ и убывает.

Методы решения некорректных задач должны обладать устойчивостью к возмущениям данных задачи, поэтому считаем, что A и f в (1) возмущены.

Пусть приближения $A(t)$ и $f(t)$ соответственно оператора A и элемента f при всех $t \geq t_0 \geq 0$ обладают следующими свойствами:

(i) функция $f(t)$ имеет непрерывную производную $f'(t)$ и

$$\|f(t) - f\| \leq \delta(t); \tag{15}$$

(ii) $A(t) : H \to H$ — монотонный дифференцируемый по Фреше оператор, при всех $u \in H$ существует $A'(t)u = (A(t)u)'_t$, т. е. определен оператор $A'(t) : H \to H$, причем элемент $A'(t)u(t)$ непрерывно зависит от t при $t \in [t_0, +\infty)$ для любой фиксированной $u(t) \in C[t_0, +\infty)$ со значениями в H, и линейный оператор $(A(t)u)'_t : H \to H$ является ограниченным на H при фиксированных $u \in H$ и $t \in [t_0, +\infty)$, производная $(A(t)u(t))'_u$ непрерывна по t на $[t_0, +\infty)$ при любой $u(t) \in C[t_0, +\infty)$, и $(A(t)u)'_u$ непрерывно зависит от $u \in H$ при любом $t \in [t_0, +\infty)$;

$$\|A(t)u - Au\| \leq h(t)g(\|u\|) \quad \forall u \in H, \tag{16}$$

причем функция $g(s)$, определенная при $s \geq 0$, неотрицательна и переводит всякое ограниченное множество в ограниченное, функции $\delta(t)$ и $h(t)$, входящие в (15) и (16) соответственно, являются бесконечно малыми при $t \to +\infty$.

Отметим, что полная производная по t от $A(t)u(t)$ для любой функции $u(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ определяется равенством

$$(A(t)u(t))'_t = (A(t)u(t))'_u u'(t) + A'(t)u(t), \tag{17}$$

при этом в наших предположениях слагаемые, стоящие в правой части (17), непрерывны при $t \in [t_0, +\infty)$.

Далее при исследовании разрешимости регуляризованных задач будем использовать вспомогательные леммы.

Лемма 1. *В наших предположениях функция*

$$\xi(t, u(t)) = A(A(t) + \alpha(t)E)^{-1}u(t)$$

непрерывна по t при всех $t \geq t_0$ для всякой функции $u(t) \in C[t_0, +\infty)$ со значениями в H и непрерывна по u на H при фиксированном t.

Доказательство. Зафиксируем $u(t) \in C[t_0, +\infty)$ и при $t_1, t_2 \in [t_0, +\infty)$ определим элементы $\xi_i = \xi(t_i, u(t_i))$, т. е. $(A(t_i) + \alpha(t_i)E)^{-1} = \xi_i$. Следовательно, $A(t_i)\xi_i + \alpha(t_i)\xi_i = u(t_i)$ при $i = 1, 2$. Отсюда имеем

$$(A(t_1)\xi_1 - A(t_2)\xi_2,\, \xi_1 - \xi_2) + (\alpha(t_1)\xi_1 - \alpha(t_2)\xi_2,\, \xi_1 - \xi_2) = (u(t_1) - u(t_2),\, \xi_1 - \xi_2)$$

или

$$(A(t_2)\xi_1 - A(t_2)\xi_2,\, \xi_1 - \xi_2) + \alpha(t_2)\|\xi_1 - \xi_2\|^2 = (A(t_2)\xi_1 - A(t_1)\xi_1,\, \xi_1 - \xi_2) + \\ + [\alpha(t_2) - \alpha(t_1)](\xi_1,\, \xi_1 - \xi_2) + (u(t_1) - u(t_2),\, \xi_1 - \xi_2).$$

В силу монотонности оператора $A(t_2)$ получаем неравенство

$$\|\xi_1 - \xi_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t_2)}(\|A(t_2)\xi_1 - A(t_1)\xi_1\| + |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|\,\|\xi_1\| + \|u(t_1) - u(t_2)\|). \tag{18}$$

Значит, свойство непрерывности $A(t)$ по t, непрерывность $\alpha(t)$ и $u(t)$ обеспечивают непрерывность $\xi(t, u(t))$ по t.

Теперь при фиксированном $t \geq t_0$ и заданных u_1 и u_2 из H построим элементы $\widetilde{\xi} = (A(t) + \alpha(t)E)^{-1}u$, т. е. $A(t)\widetilde{\xi}_i + \alpha(t)\widetilde{\xi}_i = u_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, справедливо равенство

$$(A(t)\widetilde{\xi}_1 - A(t)\widetilde{\xi}_2,\, \widetilde{\xi}_1 - \widetilde{\xi}_2) + \alpha(t)\|\xi_1 - \xi_2\|^2 = (u_1 - u_2,\, \widetilde{\xi}_1 - \widetilde{\xi}_2),$$

из которого согласно монотонности оператора $A(t)$ имеем

$$\|\widetilde{\xi}_1 - \widetilde{\xi}_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t)}\|u_1 - u_2\|. \tag{19}$$

Таким образом, непрерывность $\xi(t, u)$ и по u при фиксированном $t \in [t_0, +\infty)$ доказана. □

Лемма 2. *Пусть*

$$\chi(t, u(t), w(t)) = [(A(t)u(t))'_u + \alpha(t)E]^{-1}w(t),$$

где $u(t)$ и $w(t)$ — произвольные непрерывные на $[t_0, +\infty)$ функции со значениями в H. Тогда в наших предположениях $\chi(t, u(t), w(t))$ непрерывна по t и непрерывна по u при фиксированных t и $w(t)$.

Доказательство. Выберем функции $u(t)$, $w(t)$ из $C[t_0, +\infty)$ и значения t_1, t_2 из $[t_0, +\infty)$. Пусть $\chi(t_i, u(t_i), w(t_i)) = \chi_i$, т. е.

$$[(A(t_i)u(t_i))'_u + \alpha(t_i)E]^{-1}w(t_i) = \chi_i \quad \text{или} \quad (A(t_i)u(t_i))'_u\chi_i + \alpha(t_i)\chi_i = w(t_i), \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, верно равенство

$$((A(t_2)u(t_2))'_u\chi_1 - (A(t_2)u(t_2))'_u\chi_2,\, \chi_1 - \chi_2) + \alpha(t_2)\|\chi_1 - \chi_2\|^2 = \\ = ([(A(t_2)u(t_2))'_u - (A(t_1)u(t_1))'_u]\chi_1,\, \chi_1 - \chi_2) + [\alpha(t_2) - \alpha(t_1)](\chi_1,\, \chi_1 - \chi_2) = (w(t_1) - w(t_2), \chi_1 - \chi_2).$$

Теперь положительность линейного оператора $(A(t_2)u(t_2))'_u$ (см. [8]) приводит к оценке

$$\|\chi_1 - \chi_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t_2)}[\|(A(t_2)u(t_2))'_u - (A(t_1)u(t_1))'_u\|\,\|\chi_1\| + \\ + |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|\,\|\chi_1\| + \|w(t_1) - w(t_2)\|]. \tag{20}$$

Отсюда с учетом положительность функции $\alpha(t)$ и непрерывности $\alpha(t)$, $w(t)$, $u(t)$, $(A(t)u(t))'_u$ на $[t_0, +\infty)$ имеем непрерывность $\chi(t, u(t), w(t))$ по t.

Пусть теперь при фиксированном $t \geq t_0$ и фиксированных элементах $w = w(t)$, u_1, u_2 из H верны равенства

$$[(A(t)u_i)'_{u_i} + \alpha(t)E]^{-1}w = z_i, \quad \text{т.е.} \quad (A(t)u_i)'_{u_i}z_i + \alpha(t)z_i = w, \quad i = 1, 2.$$

Тогда имеем

$$((A(t)u_1)'_{u_1}z_1 - (A(t)u_1)'_{u_1}z_2,\, z_2 - z_1) + \alpha(t)\|z_1 - z_2\|^+ \\ + ([(A(t)u_1)'_{u_1} - (A(t)(u_2)'_{u_2}]z_2,\, z_1 - z_2) = 0.$$

Отсюда, приняв во внимание положительность оператора $(A(t)u_1)'_{u_1}$, получаем

$$\|z_1 - z_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t)}\|(A(t)u_1)'_{u_1} - (A(t)u_2)'_{u_2}\|\,\|z_2\|. \tag{21}$$

В силу предполагаемой (см. условие (ii)) непрерывности $(A(t)u)'_u$ по u при любом фиксированном $t \geq t_0$ лемма доказана. □

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что утверждения лемм 1 и 2 верны и для невозмущенного оператора A. При этом в оценках (18)–(21) следует учесть равенство $A(t)u = Au$ при любых $t \in [t_0, +\infty)$ и любых $u \in H$. Поскольку $A(t)$ — монотонный оператор, а $(A(t)u(t))'_u$ — положительный, то отображения $(A(t) + \alpha(t)E)^{-1}$ и $[(A(t)u(t))'_u + \alpha(t)E]^{-1}$ существуют (например, [7]).

Уравнение (5) перепишем в эквивалентной форме

$$A'(x(t))x'(t) = -\gamma(t)[Ax(t) - f].$$

В это уравнение входят два оператора A и $A'(x)$. В наших условиях нелинейный оператор A является лишь монотонным, а линейный оператор $A'(x)$ лишь положительным, поэтому регуляризацию будем проводить по каждому из указанных операторов.

2. Случай невозмущеного оператора

В этом разделе будем считать, что в (1) приближенно задан только элемент f, а оператор A невозмущен. Регуляризованный непрерывный аналог метода Ньютона в данном случае построим в форме следующей задачи Коши:

$$A'(v(t))v'(t) + \alpha(t)v'(t) - f'(t) + \gamma(t)[Av(t) + \alpha(t)v(t) - f(t)] = 0, \tag{22}$$

$$v(t_0) = v_0 \in H. \tag{23}$$

Исследуем вопрос об однозначной разрешимости этой задачи. Для этого перепишем (22) в эквивалентном виде

$$\frac{du(t)}{dt} = -\gamma(t)u(t) + \alpha'(t)v(t), \tag{24}$$

где

$$u(t) = Av(t) + \alpha(t)v(t) - f(t). \tag{25}$$

Поскольку

$$v(t) = (A + \alpha(t)E)^{-1}(u(t) + f(t)), \tag{26}$$

то от (24) придем к уравнению

$$\frac{du(t)}{dt} = -\gamma(t)u(t) + \alpha'(t)(A + \alpha(t)E)^{-1}(u(t) + f(t)). \tag{27}$$

Пусть

$$F(t, u) = -\gamma(t)u + \alpha'(t)(A + \alpha(t)E)^{-1}(u + f(t)). \tag{28}$$

Так как $\gamma(t)$, $\alpha'(t)$ и $f(t)$ непрерывны при $t \geq t_0$, то, приняв во внимание лемму 1 и замечание 1, делаем вывод о непрерывности оператора $F(t,u)$ по t на $[t_0,+\infty)$ при любом фиксированном u из H.

Предположив, что для некоторых положительных чисел γ_0 и λ_0 справедливы неравенства

$$\gamma(t) \leq \gamma_0 \quad \forall t \geq t_0, \tag{29}$$

$$\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(t)} \leq \lambda_0 \quad \forall t \geq t_0, \tag{30}$$

и, учитывая оценку (19) (см. замечание 1) делаем вывод о справедливости условия Липшица для оператора $F(t,u)$ по u с постоянной $\gamma_0+\lambda_0$. Следовательно, согласно ([16], с. 399–401) уравнение (27) при любом начальном условии $u(t_0)=u_0 \in H$ имеет единственное решение $u(t)$ класса $C^1[t_0,+\infty)$. Значит, в силу (26) однозначно определяется элемент $v(t)$ при всех $t \geq t_0$, причем существует производная $v'(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$u'(t) - A'(v(t))v'(t) + \alpha(t)v'(t) + \alpha'(t)v(t) - f'(t) \quad \forall t \geq t_0,$$

т. е.

$$v'(t) = [A'(v(t)) + \alpha(t)E]^{-1}(u'(t) - \alpha'(t)v(t) + f'(t)). \tag{31}$$

Поскольку $u'(t)$, $\alpha'(t)$, $v(t)$, $f'(t)$ — непрерывные на $[t_0,+\infty)$ функции, то согласно лемме 2 (см. также замечание 1) заключаем, что $v'(t)$ непрерывна на $[t_0,+\infty)$ (см. [2], гл. XVII, § 4). Следовательно, построенная задача Коши (22), (23) однозначно разрешима в классе функций $C^1[t_0,+\infty)$.

Установим достаточные условия сильной сходимости непрерывного метода (22), (23) к нормальному решению x^* уравнения (1).

Сделаем следующее предположение: пусть существует число $\rho > 0$ такое, что

$$(Az - f,\, z) \geq 0 \quad \text{при} \quad \|z\| \geq \rho. \tag{32}$$

Используя (32) и (15), приходим к следующим соотношениям:

$$(Az + \alpha(t)z - f(t), z) = (Az - f,\, z) + \alpha(t)\|z\|^2 + (f - f(t), z) \geq$$
$$\geq \alpha(t)\|z\|\left[\|z\| - \frac{\delta(t)}{\alpha(t)}\right], \quad \|z\| \geq \rho.$$

Отсюда, предположив ограниченность функции $\delta(t)/\alpha(t)$ на $[t_0,+\infty)$, делаем вывод о существовании числа $\rho_0 \geq 0$ такого, что

$$(Az + \alpha(t)z - f(t), z) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0,+\infty), \quad \|z\| \geq \rho_0, \quad z \in H. \tag{33}$$

Умножив (24) скалярно на $u(t)$, получаем

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, u(t)\right) + \gamma(t)\|u(t)\|^2 = \alpha'(t)(v(t), u(t)). \tag{34}$$

Пусть $\|v(t)\| \geq \rho_0$ при некотором $t \in [t_0,+\infty)$, тогда в силу (25) и (33) справедливо неравенство $(v(t), \mu(t)) \geq 0$. Поскольку функция $\alpha(t)$ является по предположению убывающей, то с учетом равенства $(u'(t), u(t)) = \|u(t)\| d\|u(t)\|/dt$ при выбранном t от (34) приходим к неравенству

$$\frac{d\|u(t)\|}{dt} + \gamma(t)\|u(t)\| \leq 0. \tag{35}$$

Таким образом, при $t \in [t_0, +\infty)$, для которых $\|v(t)\| \geq \rho_0$, установлено неравенство (35). Пусть теперь $\|v(t)\| < \rho_0$ для некоторого $t \in [t_0, +\infty)$, тогда из (34) получаем неравенство

$$\frac{d\|u(t)\|}{dt} + \gamma(t)\|u(t)\| < \alpha'(t)\rho_0. \tag{36}$$

Поскольку (36) вытекает из (35), то (36) верно при всех $t \geq t_0$. Теперь, используя лемму из ([11], с. 264), от (36) приходим к оценке

$$\|u(t)\| \leq a_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\right) - \rho_0 \int_{t_0}^{t} \alpha'(\theta) \exp\left(-\int_{\theta}^{t} \gamma(s)ds\right) d\theta, \tag{37}$$

где положительная постоянная a_0 удовлетворяет неравенству $\|Av_0 + \alpha(t)v_0 - f(t)\| \leq a_0$, v_0 — элемент из начального условия (23). Теперь из (12) и (25), приняв во внимание монотонность оператора A, имеем

$$\alpha(t)\|v(t) - x_\alpha(t)\|^2 \leq (f(t) - f,\, v(t) - x_\alpha(t)) + (u(t), v(t) - x_\alpha(t)).$$

Отсюда в силу предположения (15) получаем оценку

$$\|v(t) - x_\alpha(t)\| \leq \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} + \frac{\|u(t)\|}{\alpha(t)},$$

которая с учетом (37) принимает вид

$$\|v(t) - x_\alpha(t)\| \leq a_1 \left[\frac{\delta(t)}{\alpha(t)} + \frac{\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\right)}{\alpha(t)} - \frac{\int\limits_{t_0}^{t} \alpha'(\theta) \exp\left(\int\limits_{\theta}^{t} \gamma(s)ds\right) d\theta}{\alpha(t)} \right],$$

где $a_1 = \max\{1, a_0, \rho_0\}$. Всюду далее a_k — положительные постоянные. Применив к последнему слагаемого правой части последнего неравенства правило Лопиталя, установим, что выполнение условий

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} = 0, \tag{38}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\right)}{\alpha(t)} = 0, \tag{39}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha'(t) + \alpha(t)\gamma(t)} = 0 \tag{40}$$

обеспечивает справедливость предельного равенства

$$\lim_{t \to +\infty} \|v(t) - x_\alpha(t)\| = 0,$$

что совместно с (13) приводит к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ — монотонный дифференцируемый по Фреше оператор, причем производная $A'(u)$ непрерывна по u на H и является ограниченным оператором на H для всех $u \in H$, $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ — положительные функции, причем $\alpha(t) \in C^1[t_0, +\infty)$, $\gamma(t) \in C[t_0, +\infty)$, $\alpha(t)$ убывает, и выполнены условия* (14), (29), (30), (39), (40). *Предположим, что уравнение* (1) *имеет непустое множество решений, справедливо равенство* (32), *правая часть* (1) *задана приближенно, и*

для ее приближений $f(t)$ при $t \geq t_0 \geq 0$ выполнены предположения (i) *и* (38). *Тогда задача Коши* (22), (23) *имеет единственное решение класса $C^1[t_0, +\infty)$, которое при $t \to +\infty$ сильно сходится к нормальному решению уравнения* (1).

Замечание 2. Класс функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$, удовлетворяющих условиям (14), (29), (30), (39), (40) непуст. Например, функции $\gamma(t) = t^{-\gamma}$, $\alpha(t) = t^{-\alpha}$ при $t_0 > 0$, $\gamma \in [0, 1)$ и любом $\alpha > 0$ удовлетворяет указанным условиям, при этом $\lambda_0 = \alpha/t_0$. Если $\delta(t) = t^{-\delta}$, $\delta > \alpha$, то имеет место и условие (38) теоремы 1. Заметим, что из (39) и (14) вытекает свойство (9) функции $\gamma(t)$.

3. Случай возмущенного оператора

Теперь в предположениях теоремы 1, считая выполненными условия (ii), построим регуляризованный непрерывный аналог метода Ньютона с возмущенным оператором A в следующей форме:

$$(A(t)w(t))'_w w'(t) + \alpha(t)w'(t) - f'(t) + \gamma(t)[A(t)w(t) + \alpha(t)w(t) - f(t)] = 0, \tag{41}$$

$$w(t_0) = w_0 \in H. \tag{42}$$

Поскольку справедливо равенство (17), то (41) можно переписать в виде

$$\frac{d\widetilde{u}(t)}{dt} + \gamma(t)\widetilde{u}(t) = A'(t)w(t) + \alpha'(t)w(t), \tag{43}$$

где

$$\widetilde{u}(t) = A(t)w(t) + \alpha(t)w(t) - f(t). \tag{44}$$

Значит,

$$w(t) = (A(t) + \alpha(t)E)^{-1}(\widetilde{u}(t) + f(t)). \tag{45}$$

Теперь (43) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d\widetilde{u}(t)}{dt} = -\gamma(t)\widetilde{u}(t) + (A'(t) + \alpha'(t)E)(A(t) + \alpha(t)E)^{-1}(\widetilde{u}(t) + f(t)). \tag{46}$$

Пусть

$$\widetilde{F}(t, \widetilde{u}) = -\gamma(t)\widetilde{u} + (A'(t) + \alpha'(t)E)(A(t) + \alpha(t)E)^{-1}(\widetilde{u} + f(t)).$$

По сравнению с (28) здесь появилось качественно новое слагаемое $\Phi(t, \widetilde{u}) = A'(t)(A(t) + \alpha(t)E)^{-1}(\widetilde{u} + f(t))$. В наших условиях (см. предположения (i) и (ii)) лемма 1 гарантирует непрерывность $\Phi(t, \widetilde{u})$ по t на $[t_0, +\infty)$.

Сделаем дополнительное предположение: пусть справедливо неравенство

$$\|A'(t)u_1 - A'(t)u_2\| \leq \widetilde{L}(t)\|u_1 - u_2\|, \quad \widetilde{L}(t) > 0 \quad \forall u_1, u_2 \in H, \quad \forall t \geq t_0, \tag{47}$$

причем

$$\frac{\widetilde{L}(t)}{\alpha(t)} \leq L_0 \quad \forall t \geq t_0, \quad L_0 > 0. \tag{48}$$

Теперь, приняв во внимание (19), (47), (48), имеем

$$\|A'(t)(A(t) + \alpha(t)E)^{-1}(v_1 + f(t)) - A'(t)(A(t) + \alpha(t)E)^{-1}(v_2 + f(t))\| \leq$$
$$\leq \frac{\widetilde{L}(t)}{\alpha(t)}\|v_1 - v_2\| \leq L_0\|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in H, \quad \forall t \geq t_0.$$

Следовательно, при выполнении (29), (30), (47), (48) оператор $\widetilde{F}(t, \widetilde{u})$ удовлетворяет по $\widetilde{u}$ условию Липшица с постоянной $\gamma_0 + \lambda_0 + L_0$ (см. доказательство теоремы 1). Таким

образом, разрешимость дифференциального уравнения (43) (или (46)) в классе функций $\widetilde{u}(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ при любом начальном условии установлена [16].

Поскольку $w(t)$ определяется по формуле (45), то непрерывность $w(t)$ на $[t_0, +\infty)$ следует теперь из леммы 1. Используя (44) и (17), подобно (31) получаем

$$w'(t) = [(A(t)w(t))'_w + \alpha(t)E]^{-1}(\widetilde{u}\,'(t) - (A'(t) + \alpha'(t)E)w(t) + f'(t)).$$

Так как $\widetilde{u}\,'(t)$, $\alpha'(t)$, $f'(t)$, $w(t)$ непрерывны на $[t_0, +\infty)$ и имеют место предположения (ii), то по лемме 2 заключаем $w(t) \in C^1[t_0, +\infty)$.

Исследуем поведение $w(t)$ при $t \to +\infty$.

Поскольку верны неравенства (15), (16) и (32), то справедлива цепочка соотношений

$$(A(t)z + \alpha(t)z - f(t), z) = (A(t)z - Az,\, z) + (Az - f,\, z) + (f - f(t), z) + \alpha(t)\|z\|^2 \geq$$
$$\geq \alpha(t)\|z\|\left[\|z\| - \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} - \frac{h(t)}{\alpha(t)}g(\|z\|)\right], \quad \|z\| \geq \rho, \quad z \in H. \quad (49)$$

Предположим, что наряду с (38) имеет место предельное равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{h(t)}{\alpha(t)} = 0, \quad (50)$$

и функция $g(s)/s$ ограничена при $s \to +\infty$. Тогда из (49) следует существование положительной постоянной $\widetilde{\rho}_0$ такой, что

$$(A(t)z + \alpha(t)z - f(t), z) \geq 0 \ \text{ при } \ \|z\| \geq \widetilde{\rho}_0, \quad z \in H. \quad (51)$$

Умножив (43) скалярно на $\widetilde{u}(t)$, приходим к равенству

$$\left(\frac{d\widetilde{u}(t)}{dt}, \widetilde{u}(t)\right) + \gamma(t)\|\widetilde{u}(t)\|^2 = (A'(t)w(t), \widetilde{u}(t)) + \alpha'(t)(w(t), \widetilde{u}(t)). \quad (52)$$

Используя (51), теми же рассуждениями, что и при выводе (36), от (52) приходим к неравенству

$$\frac{d\|\widetilde{u}(t)\|}{dt} + \gamma(t)\|\widetilde{u}(t)\| \leq \|A'(t)w(t)\| - \alpha'(t)\widetilde{\rho}_0. \quad (53)$$

Чтобы оценить первое слагаемое в правой части (53), сделаем еще одно предположение: пусть верно неравенство

$$\|A'(t)z\| \leq h_1(t)q(\|z\|) \ \ \forall z \in H, \ \ \forall t \geq t_0, \quad (54)$$

где функции $h_1(t)$ и $q(s)$ соответственно тех же классов, что $h(t)$ и $g(s)$ в условии (16).

Теперь от (53) приходим к неравенству

$$\frac{d\|\widetilde{u}(t)\|}{dt} \leq -\gamma(t)\|\widetilde{u}(t)\| + h_1(t)q(\|w(t)\|) - \widetilde{\rho}_0\alpha'(t).$$

Предположив ограниченность решения $w(t)$ задачи (41), (42) на $[t_0, +\infty)$, из последнего неравенства имеем

$$\frac{d\|\widetilde{u}(t)\|}{dt} \leq -\gamma(t)\|\widetilde{u}(t)\| + a_2[h_1(t) - \alpha'(t)]. \quad (55)$$

Теперь по лемме из [11] запишем оценку

$$\|\widetilde{u}(t)\| \leq a_3\left[\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\gamma(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t}[h_1(\theta) - \alpha'(\theta)]\exp\left(-\int_{\theta}^{t}\gamma(s)ds\right)d\theta\right]. \quad (56)$$

Далее, вычитая из (44) равенство (12) и умножая скалярно на $w(t) - x_\alpha(t)$, получаем

$$(A(t)w(t) - A(t)x_\alpha(t), w(t) - x_\alpha(t)) + \alpha(t)\|w(t) - x_\alpha(t)\|^2 = \\ = (Ax_\alpha(t) - A(t)x_\alpha(t), w(t) - x_\alpha(t)) + (f(t) - f + \widetilde{u}(t), w(t) - x_\alpha(t)).$$

Монотонность оператора $A(t)$, условия (15), (16) и ограниченность $\|x_\alpha(t)\|$ на $[t_0, +\infty)$ позволяют из последнего равенства вывести оценку

$$\|w(t) - x_\alpha(t)\| \le a_4 \frac{\delta(t) + h(t)}{\alpha(t)} + \frac{\|\widetilde{u}(t)\|}{\alpha(t)} \quad \forall t \ge t_0.$$

Таким образом, с учетом (56) окончательно имеем

$$\|w(t) - x_\alpha(t)\| \le a_5 \Bigg[\frac{\delta(t) + h(t)}{\alpha(t)} + \frac{1}{\alpha(t)} \exp\Bigg(-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds \Bigg) + \\ + \frac{1}{\alpha(t)} \int_{t_0}^{t} [h_1(\theta) - \alpha'(\theta)] \exp\Bigg(-\int_{\theta}^{t} \gamma(s)ds \Bigg) d\theta \Bigg].$$

Применив правило Лопиталя к последнему слагаемому из правой части последнего неравенства, заключаем, что сходимость $\|w(t) - x_\alpha(t)\|$ к нулю при $t \to +\infty$ имеет место, если к уже имеющимся условиям на параметрические функции добавить условие

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{h_1(t)}{\alpha'(t) + \alpha(t)\gamma(t)} = 0. \tag{57}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 *оператор* A *возмущен и выполнены условия* (ii), *причем функция* $g(s)$ *в* (16) *такова, что величина* $g(s)/s$ *ограничена при* $s \to +\infty$. *Предположим, что имеют место условия* (47), (48). *Тогда задача Коши* (41), (42) *имеет единственное решение* $w(t) \in C^1[t_0, +\infty)$. *Если* $\|w(t)\|$ *ограничена на* $[t_0, +\infty)$ *и справедливы условия* (50), (54), (57), *то* $w(t)$ *при* $t \to +\infty$ *сходится по норме пространства* H *к нормальному решению уравнения* (1).

Замечание 3. По сравнению с теоремой 1 в теореме 2 появились еще три параметрические функции $h(t)$, $h_1(t)$, $\widetilde{L}(t)$. Если $h(t) = t^{-h}$, $h_1(t) = t^{-h_1}$, $\widetilde{L}(t) = t^{-\widetilde{L}}$, то вместе с функциями $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ из замечания 2 они будут удовлетворять условиям теоремы 2 при $\gamma \in [0, 1)$, $\alpha > 0$, $\delta > \alpha$, $h > \alpha$, $h_1 > \alpha + \gamma$, $\widetilde{L} \ge \alpha$.

Так как в наших условиях линейные операторы $A'(w)$ и $(A(t)w)'_w$ положительны, то уравнения (22) и (41) можно разрешить относительно производных искомых решений и записать эти уравнения в форме (3):

$$\begin{aligned} v'(t) &= -[A'(v(t)) + \alpha(t)E]^{-1}(\gamma(t)[Av(t) + \alpha(t)v(t) - f(t)] + f'(t)), \\ w'(t) &= -[(A(t)w(t))'_w + \alpha(t)E]^{-1}(\gamma(t)[A(t)w(t) + \alpha(t)w(t) - f(t)] + f'(t)). \end{aligned} \tag{58}$$

В работе [17] изучался регуляризованный непрерывный аналог метода Ньютона

$$(A(t)\widetilde{u}(t) + \alpha(t)\widetilde{u}(t))'_t + A(t)\widetilde{u}(t) + \alpha(t)\widetilde{u}(t) = f(t), \tag{59}$$

т. е.

$$(A(t)\widetilde{u}(t))'_{\widetilde{u}}\widetilde{u}(t) + \alpha(t)\widetilde{u}\,'(t) + \alpha(t)\widetilde{u}\,'(t) + A(t)\widetilde{u}(t) + [\alpha(t) + \alpha'(t)]\widetilde{u}(t) + A'(t)\widetilde{u}(t) = f(t). \tag{60}$$

Отметим, что процесс доказательства сходимости $\widetilde{u}(t)$ к x^* при $t \to +\infty$ упрощается по сравнению с доказательством теоремы 2. В то же время отсутствие в уравнении (59) производной $f'(t)$ приводит к дополнительным требованиям на функции $\alpha(t)$ и $\delta(t)$, а появление в (60) члена $\alpha'(t)\widetilde{u}(t)$ приводит к уменьшению параметра регуляризации по оператору, поскольку $\alpha'(t) < 0$. Кроме того, слагаемое $A'(t)\widetilde{u}(t)$ не улучшает скорость сходимости метода и требует дополнительных вычислений при решении (60) по сравнению с (41). В то же время сходимость метода (41) установлена при дополнительном свойстве функции $g(s)$ из (16), дополнительных свойствах (47), (48), (54), (57) приближений $A(t)$ оператора A и (что наиболее существенно) при условии ограниченности решения задачи (41), (42) на $[t_0, +\infty)$. В связи с последним ограничением отметим следующие факты.

Если неравенство (54) заменить на

$$\|A'(t)z\| \le h_1(t) \quad \forall z \in H, \quad \forall t \ge t_0,$$

то требование ограниченности $\|w(t)\|$ на $[t_0, +\infty)$ в условиях теоремы 2 становится излишним.

Кроме того, при справедливости неравенства

$$(((A(t)w(t))'_w + \alpha(t)E)^{-1}(\gamma(t)[A(t)w(t) + \alpha(t)w(t) - f(t)] + f'(t)), w(t)) \ge 0$$

при $\|w(t)\| \ge R_0 > 0$ можно установить ограниченность $\|w(t)\|$ на $[t_0, +\infty)$. Действительно, предположив противное, в силу (58) получаем, что при достаточно больших t скалярное произведение $(w'(t), w(t)) \le 0$ или $d\|w(t)\|/dt \le 0$. Тем самым приходим к противоречию с предположением.

Пусть при $\|w(t)\| \ge r_0 > 0$ имеет место неравенство

$$(A'(t)w(t) + \alpha'(t)w(t), \widetilde{u}(t)) \le 0 \quad \forall t \ge t_0. \tag{61}$$

Тогда при $\|w(t)\| \ge r_0$ из (52) выводим неравенство (35) для $\widetilde{u}(t)$, а при $\|w(t)\| < r_0$ имеем оценку вида (55). Следовательно, при выполнении (61) неравенство (55) справедливо при всех $t \ge t_0$ без предположения ограниченности $w(t)$ на $[t_0, +\infty)$.

Пример. Рассмотрим оператор, возникающий в динамике скалярной плотности дислокаций

$$Az(x) = \begin{cases} z(x)/[b_1 + b_2 z(x)], & z(x) \ge 0; \\ 0, & z(x) < 0, \end{cases}$$

где b_1 и b_2 — положительные постоянные, $x \in [a, b]$. Поскольку $|Az| \le |z|/b_1$, то $A : H \to H$, где $H = L^2[a, b]$ ([1], пример 5.1).

Исследуем знак выражения $(Az(x) - Av(x))(z(x) - v(x)) = \Lambda(z(x), v(x))$. Если $z(x) \le 0$, $v(x) \le 0$, то $Az(x) = Av(x) = 0$ и $\Lambda(z(x), v(x)) = 0$. При $z(x) > 0$ и $v(x) \le 0$ имеем неравенство

$$\Lambda(z(x), v(x)) = \frac{z(x)}{b_1 + b_2 z(x)}[z(x) - v(x)] > 0.$$

Пусть теперь $z(x) > 0$, $v(x) > 0$, тогда

$$\Lambda(z(x), v(x)) = \left(\frac{z(x)}{b_1 + b_2 z(x)} - \frac{v(x)}{b_1 + b_2 v(x)}\right)(z(x) - v(x)) = \frac{b_1[z(x) - v(x)]^2}{[b_1 + b_2 z(x)][b_1 + b_2 v(x)]} \ge 0.$$

Следовательно, монотонность оператора $A : H \to H$ установлена, Отметим, что свойство (6) для данного оператора A установить не удается.

Пусть возмущенный оператор $A(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, определяется следующим образом:

$$A(t)z(x) = \begin{cases} z(x)/[b_1(t) + b_2(t)z(x)], & z(x) \geq 0; \\ 0, & z(x) < 0, \end{cases}$$

где функции $b_1(t)$, $b_2(t)$ положительны при всех $t \geq t_0$ и принадлежат $C^1[t_0, +\infty)$, причем

$$b_1(t) \geq d_i > 0, \quad |b_i - b_i(t)| \leq h(t), \quad i = 1, 2, \quad t \geq t_0, \quad h(t) \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty.$$

Монотонность оператора $A(t) : H \to H$ проверяется теми же рассуждениями, что и для оператора A. Далее, используя несложные преобразования, в силу определений операторов A и $A(t)$ при $z(x) > 0$ имеем неравенства

$$|Az(x) - A(t)z(x)| \leq \frac{|b_1 - b_1(t)|z(x) + |b_2 - b_2(t)|z^2(x)}{(b_1 + b_2 z(x))(b_1(t) + b_2(t)z(x))} \leq$$
$$\leq h(t)z(x)\left[\frac{1}{b_1 b_1(t)} + \frac{1}{b_1(t)b_2}\right] \leq h(t)\frac{b_1 + b_2}{d_1 b_1 b_2} z(x),$$

т. е. условие (16) выполнено при

$$g(s) = \frac{b_1 + b_2}{d_1 b_1 b_2} s.$$

Следовательно, функция $g(s)/s$ ограничена при $s \to +\infty$.

Запишем полную производную $A(t)\xi(t)$ по t (см. (17)):

$$(A(t)\xi(t))'_t = \frac{b_1(t)\xi'(t)}{[b_1(t) + b_2(t)\xi(t)]^2} - \frac{[b_1'(t) + b_2'(t)\xi(t)]\xi(t)}{[b_1(t) + b_2(t)\xi(t)]^2}.$$

Установим справедливость свойств (47), (48) и (54) для оператора $A'(t)$, определяемого равенством

$$A'(t)\eta = -\frac{[b_1'(t) + b_2'(t)\eta]\eta}{[b_1(t) + b_2(t)\eta]^2}, \quad \eta > 0. \tag{62}$$

Тогда при $u > 0$, $v > 0$ получаем неравенство

$$|A'(t)u - A'(t)v| \leq |u - v|\left\{\frac{b_1'(t)}{b_2^2(t)} + |b_2'(t)|b_1^2(t)\frac{u + v}{\eta(t, u, v)} + \right.$$
$$\left. + [2b_1(t)b_2(t)|b_2'(t)| + |b_1'(t)|b_2^2(t)]\frac{uv}{\eta(t, u, v)}\right\}, \tag{63}$$

где $\eta(t, u, v) = [b_1(t) + b_2(t)u]^2[b_1(t) + b_2(t)v]^2$.

Теперь, используя аппарат математического анализа, в наших условиях установим ограниченность функций

$$\frac{u + v}{\eta(t, u, v)}, \quad \frac{uv}{\eta(t, u, v)} \ \text{ при } \ t \in [t_0, +\infty), \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Этот факт и ограниченность функций $b_1(t)$ и $b_2(t)$ на $[t_0, +\infty)$ позволяют из (63) вывести неравенство

$$|A'(t)u - A'(t)v| \leq a_6|u - v|(|b_1'(t)| + |b_2'(t)|) \ \ \forall u, v > 0,$$

на основании которого доказывается свойство (47) при $\widetilde{L}(t) = a_6(|b_1'(t)| + |b_2'(t)|)$. Условие (48) теоремы 2 принимает вид

$$\frac{|b_1'(t)| + |b_2'(t)|}{\alpha(t)} \leq \widetilde{L}_0, \quad t \geq t_0, \quad \widetilde{L}_0 > 0.$$

Далее, из (62) можно получить например, оценку вида

$$|A'(t)\eta| \le \left(\frac{|b_1'(t)|}{b_1^2(t)} + \frac{|b_2'(t)|}{2b_1(t)b_2(t)}\right)|\eta| \le \left(\frac{|b_1'(t)|}{d_1^2} + \frac{|b_2'(t)|}{2d_1d_2}\right)|\eta| \le$$
$$\le \widetilde{M}(|b_1'(t)| + |b_2'(t)|)|\eta|, \quad \eta > 0,$$

где $\widetilde{M}$ — положительная постоянная. Отсюда имеем неравенство

$$\|A'(t)\eta\| \le \widetilde{M}(|b_1'(t)| + |b_2'(t)|)\|\eta\|, \quad \eta > 0,$$

т. е. оператор $A(t)$ удовлетворяет условию (54) теоремы 2 с $h_1(t) = |b_1'(t)| + |b_2'(t)|$, $q(s) = \widetilde{M}s$. Поскольку функции $\widetilde{L}(t)$ и $h_1(t)$ должны быть бесконечно малыми при $t \to +\infty$ (см. (48) и (57)), то следует считать справедливыми следующие предельные равенства:

$$\lim_{t\to+\infty} b_1'(t) = \lim_{t\to+\infty} b_2'(t) = 0.$$

Все свойства приближений $A(t)$ оператора A установлены на положительных функциях. Справедливость их на неположительных функциях легко проверяется, так как

$$Az(x) = A(t)z(x) = A'(t)z(x) = 0 \ \text{ при } \ z(x) < 0.$$

Замечание 4. Условие (32) есть одно из достаточных условий разрешимости уравнения (1) с монотонным оператором ([1], с. 262; [6], с. 56; [7], с. 104). В статье разрешимость уравнения (1) не предполагается. Следовательно, требование (32) не является сильно ограничительным. Предположения, подобные (32), использовались и в других работах при исследовании методов регуляризации (например, [6], сс. 136, 138; [13]).

В примере, приведенном в данной статье, условие (32) имеет место при достаточно большом ρ, если $f(x) \le 1/b_2$, поскольку

$$Az(x) - f(x) = \frac{z(x)[1 - b_2f(x)] - b_1f(x)}{h_1 + b_2z(x)},$$

$b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $z(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$, $f(x)$ — некоторая фиксированная функция из $L^2[a, b]$.

Замечание 5. В монографии Ф.П. Васильева [11] сходимость непрерывного метода регуляризации установлена при отсутствии свойства монотонности приближенного оператора. Регуляризованный непрерывный аналог метода Ньютона, разрешенный относительно производной (58), включает линейный оператор $[(A(t)w(t))'_w + \alpha(t)E]^{-1}$ (при фиксированном $w(t)$), который для немонотонных $A(t)$ может не существовать. Свойство монотонности операторов $A(t)$ играет существенную роль и при доказательстве решения класса $C^1[t_0, +\infty)$ регуляризованной задачи (см. леммы 1 и 2). Предположение монотонности операторов $A(t)$ может привести к отсутствию некоторых свойств искомого решения у получаемых регуляризованных приближений к нему [14], [15].

При решении практических задач часто известны только единственные приближения $A^{\widetilde{h}}$ и $f^{\widetilde{\delta}}$ оператора A и элемента f соответственно, где $\widetilde{h}$ и $\widetilde{\delta}$ — достаточно малые числа. В такой постановке непрерывные методы строились в [18], [19]. Покажем применимость процесса (41), (42) в этом случае. Для этого для задачи (41), (42) определим некоторое правило останова [18], [19]. В данной ситуации построим приближения $A(t)$ и $h(t)$ при $t \ge t_0$, для которых выполены условия теоремы 2, причем $h(\overline{t}) = \widetilde{h}$, $\delta(\overline{t}) = \widetilde{\delta}$, $A(\overline{t}) = A^{\widetilde{h}}$, $f(\overline{t}) = f^{\widetilde{\delta}}$, $\overline{t} > t_0$. Приняв $\overline{t}$ за время останова в процессе решения регуляризованной задачи (41), (42),

согласно теореме 2 найдем по приближениям $A^{\widetilde{h}}$ и $f^{\widetilde{\delta}}$ некоторое приближение к нормальному решению уравнения (1). В приведенном в данной работе примере оператор $A^{\widetilde{h}}$ будет определяться постоянными $b_1^{\widetilde{h}}$ и $b_2^{\widetilde{h}}$, причем $|b_i - b_i^{\widetilde{h}}| \le \widetilde{h}$, $i = 1, 2$. Пусть $\widetilde{h} \le h(t)$ при всех $t \le \overline{t}$. Построим функции $b_i(t)$, удовлетворяющие неравенствам

$$b_i^{\widetilde{h}} + \widetilde{h} - h(t) \le b_i(t) \le b_i^{\widetilde{h}} - \widetilde{h} + h(t), \quad t_0 \le t \le \overline{t}.$$

При $t = \overline{t}$ отсюда следует, что $b_i(\overline{t}) = b_i^{\widetilde{h}}$. Кроме того, справедливы неравенства

$$b_i^{\widetilde{h}} - b_i + \widetilde{h} - h(t) \le b_i(t) - b_i \le b_i^{\widetilde{h}} - b_i - \widetilde{h} + h(t). \tag{64}$$

Поскольку $-\widetilde{h} \le b_i^{\widetilde{h}} - b_i \le \widetilde{h}$, то из (64) вытекает неравенство $|b_i - b_i(t)| \le h(t)$, $i = 1, 2$, $t \le \overline{t}$. Построение приближений $f(t)$ для правой части, зависящей от числовых параметров, проводится аналогично. Следовательно, класс задач в указанной постановке, для которых применим предложенный в статье метод непуст. Отметим, что сходимость непрерывного метода регуляризации в [18] установлена для невозмущенного монотонного оператора и известного приближения $f^{\widetilde{\delta}}$ при требованиях гладкости решения уравнения (12) и существования ограниченных на некотором шаре производных Фреше оператора A до второго порядка включительно. В работе [19] некоторый непрерывный метод первого порядка для уравнения (1) без предположения монотонности оперторов A и $A(t)$ построен на основе регуляризованной схемы Гаусса–Ньютона.

Литература

[1] Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений* (Наука, М., 1972).

[2] Канторович Л.В., Акилов Г. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1984).

[3] Гавурин М.К. *Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов*, Изв. вузов. Матем., № 5, 18–31 (1958).

[4] Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. *Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики*, Физика элементарных частиц и атомного ядра **4** (1), 127–166 (1973).

[5] Жидков Е.П., Козлова О.В. *Непрерывный аналог метода Ньютона в обратной задаче теории рассеяния при наличии собственных функций и значений*, Матем. моделирование **18** (2), 120–128 (2006).

[6] Alber Ya., Ryazantseva I. *Nonlinear ill-posed problems of monotone type* (Springer, Dordrecht, 2006).

[7] Рязанцева И.П. *Избранные главы теории операторов монотонного типа* (НГТУ, Нижний Новгород, 2008).

[8] Качуровский Р.И. *Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах*, УМН **23** (2), 121–168 (1968).

[9] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения* (Изд-во Моск. ун-та, М., 1989).

[10] Антипин А.С. *Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования*, Вопр. кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем (Научн. совет по комплексной проблеме “Кибернетика” АН СССР, М., 5–43 (1989)).

[11] Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач* (Наука, М., 1981).

[12] Рязанцева И.П. *О непрерывных методах первого порядка и их регуляризованных вариантах для смешанных вариационных неравенств*, Дифференц. уравнения **45** (7), 1020–1032 (2012).

[13] Рязанцева И.П. *Непрерывные методы первого порядка для монотонных включений в гильбертовом пространстве*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **53** (8), 1241–1248 (2013).

[14] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Регуляризованные алгоритмы и априорная информация* (Наука, М., 1983).

[15] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Численные методы решения некорректных задач* (Наука, М., 1990).

[16] Треногин В.А. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1988).

[17] Рязанцева И.П. *О некоторых методах непрерывной регуляризации для монотонных уравнений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **34** (1), 3–11 (1994).
[18] Ramm A.G. *Dynamical systems method for solving operator equations* (Elsevier, Amsterdam, 2007).
[19] Кокурин М.Ю. *Непрерывные методы устойчивой аппроксимации решений нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве на основе регуляризованной схемы Гаусса–Ньютона*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **44** (1), 8–17 (2004).

И.П. Рязанцева

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, д. 24, г. Нижний Новгород, 603155, Россия,

`e-mail:` lryazantseva@applmath.ru

I.P. Ryazantseva

Regularized continuous analog of the Newton method for monotone equations in the Hilbert space

Abstract. We construct regularized continuous analog of the Newton method in the Hilbert space for nonlinear equation with Frechét differentiable and monotone operator. We obtain sufficient conditions of its strong convergence to normal solution of the given equation under approximate assignment of an operator and right-hand of an equation.

Keywords: Hilbert space, monotone operator, Newton method, continuous method, convergence.

I.P. Ryazantseva

R.E. Alekseev Nizhny Novgorod Technical University,
24 Minina str., Nizhny Novgorod, 603155 Russia,

`e-mail:` lryazantseva@applmath.ru