В. Д. Жесткая, Устойчивость матричной конечно-разностной схемы при решении задачи о колебаниях упругих систем, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007, том 47, номер 1, 34–38

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2007, том 47, № 1, с. 34–38

УДК 519.624

УСТОЙЧИВОСТЬ МАТРИЧНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ СИСТЕМ

© 2007 г. **В. Д. Жесткая**

(681031 Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27, КнАГТУ)

e-mail: office@knastu.ru

Поступила в редакцию 25.05.2004 г.
Переработанный вариант 21.07.2006 г.

Исследуется устойчивость матричной конечно-разностной схемы, полученной с использованием центральных разностей при численном решении дифференциального уравнения колебаний упругой системы. Библ. 3.

Ключевые слова: метод конечных разностей, устойчивость, дифференциальные уравнения колебаний упругой среды.

Работа посвящена исследованию устойчивости матричной конечно-разностной схемы, полученной с использованием центральных разностей:

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\frac{\mathbf{u}_{r+1}-2\mathbf{u}_r+\mathbf{u}_{r-1}}{h^2}+\mathbf{C}\frac{\mathbf{u}_{r+1}-\mathbf{u}_{r-1}}{2h}+\mathbf{K}\mathbf{u}_r = \mathbf{P}_r, \quad r = 0, 1, \ldots, N-1,\\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0,\\ \mathbf{u}_{-1} = \mathbf{f}_{-1},\end{gathered} \tag{1}$$

для дифференциального уравнения

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}, \tag{2}$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{K}$ – вещественные симметричные квадратные матрицы порядка n, а $\mathbf{u}$ и $\mathbf{P}$ – векторы (матрицы-столбцы), являющиеся функциями времени t. В частности, такой вид имеют уравнения метода конечных элементов для колебаний упругих систем (см. [1]).

Доказательство устойчивости схемы (1) при $n = 1$ дано в [2], там же предложено получить его для $n = 2$. Для случая любого n доказательство устойчивости схемы (1) автору неизвестно.

Для доказательства первое уравнение в (1) приведем к виду

$$\left(\mathbf{M}+\frac{h}{2}\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_{r+1} = -(h^2\mathbf{K}-2\mathbf{M})\mathbf{u}_r-\left(\mathbf{M}-\frac{h}{2}\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_{r-1}+\mathbf{P}_rh^2. \tag{3}$$

С целью избежать громоздких формул проследим ход рассуждений на примере случая $n = 3$.

Найдем сначала матрицу, обратную к матрице, стоящей в левой части уравнения (3):

$$\left(\mathbf{M}+\frac{h}{2}\mathbf{C}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11}+\frac{h}{2}c_{11} & m_{12}+\frac{h}{2}c_{12} & m_{13}+\frac{h}{2}c_{13}\\ m_{21}+\frac{h}{2}c_{21} & m_{22}+\frac{h}{2}c_{22} & m_{23}+\frac{h}{2}c_{23}\\ m_{31}+\frac{h}{2}c_{31} & m_{32}+\frac{h}{2}c_{32} & m_{33}+\frac{h}{2}c_{33}\end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left(\begin{bmatrix}\mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13}\\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23}\\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33}\end{bmatrix}+\frac{h}{2}\begin{bmatrix}s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{bmatrix}+\frac{h^2}{4}\begin{bmatrix}t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & t_{22} & t_{23}\\ t_{31} & t_{32} & t_{33}\end{bmatrix}\right),$$

$$\Delta = \det\left(\mathbf{M} + \frac{h}{2}\mathbf{C}\right),$$

$$\mu_{11} = \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}, \quad \mu_{12} = -\begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \mu_{33} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$s_{11} = \begin{vmatrix} c_{22} & m_{23} \\ c_{32} & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{22} & c_{23} \\ m_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad s_{12} = -\begin{vmatrix} c_{12} & m_{13} \\ c_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{12} & c_{13} \\ m_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad s_{33} = \begin{vmatrix} c_{11} & m_{12} \\ c_{21} & m_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & c_{12} \\ m_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$t_{11} = \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad t_{12} = -\begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad t_{33} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Введем следующие обозначения: если **A** и **B** – некоторые матрицы, то $[A_iB_jB_k]$ – матрица, первый столбец которой есть i-й столбец матрицы **A**, второй и третий столбцы – соответственно, j-й и k-й столбцы матрицы **B**. Аналогично определяются матрицы $[B_iA_jB_k]$, $[B_iB_jA_k]$ и определители $|A_iB_jB_k|$, $|B_iA_jB_k|$, $|B_iB_jA_k|$.

С учетом этих обозначений получим

$$\Delta = |\mathbf{M}| + \frac{h}{2}(|C_1M_2M_3| + |M_1C_2M_3| + |M_1M_2C_3|) +$$

$$+\frac{h^2}{4}(|M_1C_2C_3| + |C_1M_2C_3| + |C_1C_2M_3|) + \frac{h^3}{8}|\mathbf{C}| = |\mathbf{M}| + ah + O(h^2), \tag{5}$$

$$a = \frac{1}{2}(|C_1M_2M_3| + |M_1C_2M_3| + |M_1M_2C_3|).$$

Для приведения исследуемой схемы к каноническому виду положим

$$\mathbf{y}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_{r-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда из (1) и (3) получим

$$\mathbf{y}_{r+1} = \mathbf{R}_h\mathbf{y}_r + h\rho_r$$
$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_{-1} \end{bmatrix}, \quad \rho_r = h\begin{bmatrix} \left(\mathbf{M} + \frac{h}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{P}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \tag{6}$$

оператор шага $\mathbf{R}_h$ имеет вид

$$\mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{M} + \frac{h}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}(h^2\mathbf{K} - 2\mathbf{M}) & -\left(\mathbf{M} + \frac{h}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}\left(\mathbf{M} - \frac{h}{2}\mathbf{C}\right) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Найдем произведения матриц, входящие в (7):

$$\left(\mathbf{M}+\frac{h}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}(h^2\mathbf{K}-2\mathbf{M}) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -2|\mathbf{M}|+hb_{11}+h^2p_{11}+O(h^3) & hb_{12}+h^2p_{12}+O(h^3) & hb_{13}+h^2p_{13}+O(h^3) \\ hb_{21}+h^2p_{21}+O(h^3) & -2|\mathbf{M}|+hb_{22}+h^2p_{22}+O(h^3) & hb_{23}+h^2p_{23}+O(h^3) \\ hb_{31}+h^2p_{31}+O(h^3) & hb_{32}+h^2p_{32}+O(h^3) & -2[\mathbf{M}]+hb_{33}+h^2p_{33}+O(h^3) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\left(\mathbf{M}+\frac{h}{2}\mathbf{C}\right)^{-1}\left(\mathbf{M}-\frac{h}{2}\mathbf{C}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} |\mathbf{M}|+hd_{11}+h^2q_{11}+O(h^3) & hd_{12}+h^2q_{12}+O(h^3) & hd_{13}+h^2q_{13}+O(h^3) \\ hd_{21}+h^2q_{21}+O(h^3) & |\mathbf{M}|+hd_{22}+h^2q_{22}+O(h^3) & hd_{23}+h^2q_{23}+O(h^3) \\ hd_{31}+h^2q_{31}+O(h^2) & hd_{32}+h^2q_{32}+O(h^2) & |\mathbf{M}|+hd_{33}+h^2q_{33}+O(h^3) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Здесь

$$b_{11} = -2a+|C_1M_2M_3|, \quad b_{1j} = |C_jM_2M_3|, \quad j = 2, 3,$$
$$b_{22} = -2a+|M_1C_2M_3|, \quad b_{2j} = |M_1C_jM_3|, \quad j = 1, 3,$$
$$b_{33} = -2a+|M_1M_2C_3|, \quad b_{3j} = |M_1M_2C_j|, \quad j = 1, 2,$$
$$p_{ij} = \sum_{r=1}^{3}\mu_{ir}k_{rj}-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{3}t_{ir}m_{rj}, \quad k_{rj}\text{ – элементы матрицы }\mathbf{K},$$
$$d_{11} = a-|C_1M_2M_3|, \quad d_{1j} = -|C_jM_2M_3|, \quad j = 2, 3,$$
$$d_{22} = a-|M_1C_2M_3|, \quad d_{2j} = -|M_1C_jM_3|, \quad j = 1, 3,$$
$$d_{33} = a-|M_1M_2C_3|, \quad d_{3j} = -|M_1M_2C_j|, \quad j = 1, 2,$$
$$q_{ij} = \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{3}t_{ir}m_{rj}-\sum_{r=1}^{3}s_{ir}c_{rj}.$$

Заметим, что

$$b_{ii}+d_{ii}+a = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{и} \quad b_{ij}+d_{ij} = 0 \quad (i\ne j, \quad i, j = 1, 2, 3).$$

Подставив (8) и (9) в (7), получим

$$\mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$A_{ii} = \frac{1}{\Delta}(2|\mathbf{M}|-hb_{ii}+O(h^2)), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$A_{ij} = -\frac{1}{\Delta}(hb_{ij}+O(h^2)), \quad i\ne j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$A_{i,\,i+3} = -\frac{1}{\Delta}(|\mathbf{M}| + hd_{ii} + O(h^2)), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$A_{i,\,j+3} = -\frac{1}{\Delta}(hd_{ij} + O(h^2)), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Нормы $u^{(h)}$ и $f^{(h)}$ в выражении $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ (см. [2]) определим равенствами

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max(|u_r^{(i)}|), \quad \text{где } u_r^{(i)} \text{ есть } i\text{-й элемент } \mathbf{u}_r, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\|f^{(h)}\|_{F_h} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{P}_r \\ \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_{-1} \end{matrix} \right\| = \max(|f_0^{(i)}|, |f_{-1}^{(i)}|, |P_r^{(i)}|), \quad i = 1, 2, 3,$$

а норму в пространстве Y_h – в виде

$$\|\mathbf{y}\|_{Y_h} = \max\left(|y_1|, |y_2|, |y_3|, \frac{|y_1 - y_4|}{h}, \frac{|y_2 - y_5|}{h}, \frac{|y_3 - y_6|}{h}\right).$$

При сделанном выборе норм соблюдаются условия теоремы об устойчивости (см. [2, гл. 5]), согласно которой при их выполнении для устойчивости достаточно, чтобы нормы степеней оператора шага были равномерно ограничены по h, т.е. чтобы выполнялось условие

$$\|\mathbf{R}_h^k\|_Y \le C_3, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Если норма в пространстве Y задана формулой

$$\|\mathbf{y}\|_Y = \max(|y_1|, \ldots, |y_6|),$$

то

$$\|\mathbf{y}\|_{Y_h} = \|\mathbf{S}\mathbf{y}\|_Y, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h^{-1} & 0 & 0 & -h^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & h^{-1} & 0 & 0 & -h^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & h^{-1} & 0 & 0 & -h^{-1} \end{bmatrix}.$$

Норма $\|\mathbf{R}_h\|_{Y_h}$ может быть, с учетом (10), выражена формулой

$$\|\mathbf{R}_h\|_{Y_h} = \|\mathbf{S}\mathbf{R}_h\mathbf{S}^{-1}\|_Y.$$

Вычислим матрицу $\mathbf{S}\mathbf{R}_h\mathbf{S}^{-1}$. Произведя умножение, получим

$$\mathbf{S}\mathbf{R}_h\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{14} & A_{12} + A_{15} & A_{13} + A_{16} & -hA_{14} & -hA_{15} & -hA_{16} \\ A_{21} + A_{24} & A_{22} + A_{25} & A_{23} + A_{26} & -hA_{24} & -hA_{25} & -hA_{26} \\ A_{31} + A_{34} & A_{32} + A_{35} & A_{33} + A_{36} & -hA_{34} & -hA_{35} & -hA_{36} \\ \frac{1}{h}(A_{11} - 1 + A_{14}) & \frac{1}{h}(A_{12} + A_{15}) & \frac{1}{h}(A_{13} + A_{16}) & -A_{14} & -A_{15} & -A_{16} \\ \frac{1}{h}(A_{21} + A_{24}) & \frac{1}{h}(A_{22} - 1 + A_{25}) & \frac{1}{h}(A_{23} + A_{26}) & -A_{24} & -A_{25} & -A_{26} \\ \frac{1}{h}(A_{31} + A_{34}) & \frac{1}{h}(A_{32} + A_{35}) & \frac{1}{h}(A_{33} - 1 + A_{36}) & -A_{34} & -A_{35} & -A_{36} \end{bmatrix}.$$

После подстановки значений A_{ij} найдем, что

$$\mathbf{SR}_h\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{16} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{61} & \dots & B_{66} \end{bmatrix},$$

где элементы, стоящие на главной диагонали, имеют вид

$$B_{ii} = 1 + hv_{ii} + \frac{1}{\Delta}O(h^2), \quad \text{причем} \quad v_{11} = v_{22} = v_{33} = 0,$$

а остальные элементы – вид

$$B_{ij} = \frac{1}{\Delta}(hv_{ij} + O(h^2)).$$

Параметры v_{ii}, v_{ij}, входящие в формулы B_{ii}, B_{ij}, есть некоторые числовые величины, зависящие от значений элементов матриц **M**, **C**, **K**. К примеру, $v_{51} = -|M_1K_1M_3|$, $v_{44} = -|M_1C_2M_3|$, $v_{56} = -|M_1C_3M_3|$.

При выбранной в Y норме векторов норма матрицы $\mathbf{SR}_h\mathbf{S}^{-1}$ задается формулой

$$\|\mathbf{SR}_h\mathbf{S}^{-1}\| = \max\left(\sum_{i=1}^{6}|B_{1i}|, \sum_{i=1}^{6}|B_{2i}|, \sum_{i=1}^{6}|B_{3i}|, \sum_{i=1}^{6}|B_{4i}|, \sum_{i=1}^{6}|B_{5i}|, \sum_{i=1}^{6}|B_{6i}|\right).$$

Структура элементов B_{ij} $(i, j = 1, \dots, 6)$ дает возможность выбрать некоторую не зависящую от h постоянную C таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$1 + Ch \ge \max\left(\sum_{i=1}^{6}|B_{1i}|, \dots, \sum_{i=1}^{6.}|B_{6i}|\right).$$

Тогда

$$\|\mathbf{R}_h\|_{Y_h} = \|\mathbf{SR}_h\mathbf{S}^{-1}\|_Y \le 1 + Ch,$$

откуда следует неравенство для степеней оператора шага:

$$\|\mathbf{R}_h^k\|_{Y_h} \le \|\mathbf{R}_h\|_{Y_h}^k \le (1 + Ch)^N \le e^C, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

что и доказывает устойчивость исследуемой схемы (см. [2], [3]).

Все закономерности, обнаруженные в случае $n = 3$, очевидным образом переносятся и на $n > 3$. Так, например, при любом $n > 3$ выражение для a в формуле (5) примет вид

$$a = \frac{1}{2}(|C_1M_2\dots M_n| + |M_1C_2\dots M_n| + \dots + |M_1\dots M_{n-1}C_n|),$$

коэффициент b_{11} окажется равным $-2a + |C_1M_2\dots M_n|$, и т.д. Это позволяет утверждать, что устойчивость схемы (2) при $n > 3$ доказывается аналогично случаю $n = 3$, и сделать вывод о том, что (2) устойчива при любом n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977.
2. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
3. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.