Н. Л. Гольдман, Определение правой части в квазилинейном параболическом уравнении с финальным наблюдением,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 366–374

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 366–374

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ФИНАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

© 2005 г. Н. Л. Гольдман

Современные потребности моделирования и управления процессами в теплофизике и механике сплошной среды приводят к необходимости рассматривать квазилинейные модели таких процессов. При отыскании характеристик этих моделей возникают обратные задачи для квазилинейных параболических уравнений, постановки которых зависят от искомой характеристики и от вида дополнительной информации о процессе. Такие обратные задачи в отличие от обратных задач для линейных параболических уравнений еще недостаточно изучены.

Данная работа продолжает исследование [1] обратных задач с финальным переопределением для квазилинейных параболических уравнений общего вида с неизвестной правой частью, связанных с нахождением тепловых источников по заданному в конечный момент времени распределению температуры. Основное внимание уделено постановкам таких задач и единственности их решения в классах Гёльдера в случае граничных условий первого рода. Исследование проблемы единственности основано на изучении свойств соответствующих сопряженных задач для линейных параболических уравнений и использует единственность решения первой краевой задачи с обратным направлением времени для этих уравнений. Предлагаемый подход позволяет получить достаточные условия единственности для квазилинейного параболического оператора общего вида с коэффициентами, зависящими от (x,t,u). Это расширяет класс обратных задач с финальным переопределением, обладающих свойством единственности (ср., например, с [2–4]).

Рассмотрен также вопрос устойчивости приближенного решения в пространствах Гёльдера для этого класса некорректных задач на основе регуляризирующего метода квазирешений.

1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ФИНАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

Пусть квазилинейная краевая задача состоит в определении функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q}=\{0\le x\le l,\ \ 0\le t\le T\}$ из условий

$$c(x,t,u)u_t - Lu = p_0(x,t)f(x)+p_1(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u|_{x=0}=v_0(t),\quad u|_{x=l}=v_1(t),\quad 0<t\le T, \tag{2}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{3}$$

где $Lu\equiv(a(x,t,u)u_x)_x-b(x,t,u)u_x-d(x,t,u)$ – равномерно эллиптический оператор, $a\ge a_{\min}>0$, b, $c\ge c_{\min}>0$, d, f, p_i, v_i $(i=0,1)$, φ – известные функции, $a_{\min}$, $c_{\min}=\mathrm{const}>0$.

Допустим, что функция $f(x)$ в правой части уравнения (1) неизвестна, но в конечный момент времени $t=T$ задана дополнительная информация о решении краевой задачи (1)–(3):

$$u|_{t=T}=g(x),\quad 0\le x\le l, \tag{4}$$

где $g(x)$ – известная при $x\ge0$ функция, $T>0$ – заданный момент времени. Тогда возникает обратная задача с финальным переопределением: найти функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q}$ и $f(x)$ при $0\le x\le l$, удовлетворяющие условиям (1)–(4), в которых входные данные $a>0$, b, $c>0$, d, p_i, v_i $(i=0,1)$, φ и g предполагаются заданными.

Сформулируем требования к входным данным обратной задачи (1)–(4), используя стандартные обозначения классов функций из [5, с. 16].

1. При $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| < \infty$ функции a, a_x, a_u, b, c, d равномерно ограничены, $a \geq a_{\min} > 0$, $c \geq c_{\min} > 0$.

2. При $(x,t,u) \in \overline{D} = \overline{Q} \times [-M_0, M_0]$ $(M_0 \geq \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}} |u|)$ функции a и c принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$, b, d, a_x и a_u принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2,1}(\overline{D})$, $0 < \lambda < 1$.

3. Функции $p_i(x,t)$ принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, $|p_0(x,t)| \geq p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$, $v_i(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T]$ $(i = 0,1)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$ принадлежат $H^{2+\lambda}[0,l]$, $v_0(t)|_{t=0} = \varphi|_{x=0}$, $v_1(t)|_{t=0} = \varphi|_{x=l}$.

Эти требования обеспечивают существование и единственность решения краевой задачи (1)–(3) $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(x) \in H^{\lambda}[0,l]$ в правой части уравнения (1), удовлетворяющей условиям согласования [5, с. 645]:

$$\begin{aligned} &c(x,0,\varphi)v_{0t} - L\varphi|_{x=0,t=0} = p_0(x,0)f(x) + p_1(x,0)|_{x=0}, \\ &c(x,0,\varphi)v_{1t} - L\varphi|_{x=l,t=0} = p_0(x,0)f(x) + p_1(x,0)|_{x=l}. \end{aligned} \tag{5}$$

В соответствии с этим дадим следующее

Определение 1. Решением обратной задачи (1)–(4) в классах Гёльдера назовем пару функций $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$:

$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f^0(x) \in H^{\lambda}[0,l], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих соотношениям (1)–(5) в обычном смысле.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ В КЛАССАХ ГЁЛЬДЕРА

2.1. Рассматриваемая задача не может иметь двух различных решений в смысле определения 1. Это устанавливает следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены требования 1–3 и, кроме того, производные b_x и c_t непрерывны при $(x,t,u) \in \overline{D}$. Тогда в случае существования решения обратной задачи (1)–(5) $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ в классах Гёльдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda}[0,l]$ оно определяется однозначно.*

Доказательство. Допустим, что $\{u_1^0, f_1^0\}$ и $\{u_2^0, f_2^0\}$ – два решения обратной задачи (1)–(5). Функции u_1^0 и u_2^0 можно рассматривать как решения краевой задачи (1)–(3), соответствующие функциям f_1^0 и f_2^0 в правой части уравнения (1). Следовательно, для них справедливы оценки в классе Гёльдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [5, с. 645]. Пусть $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$, $\Delta f = f_2^0 - f_1^0$. В силу (5) $\Delta f|_{x=0,\ x=l} = 0$, кроме того, из (1)–(4) следует, что

$$c(x,t,u_1^0)\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u = p_0(x,t)\Delta f(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$

$$\Delta u|_{x=0} = 0, \quad \Delta u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{7}$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad \Delta u|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \tag{8}$$

где $\mathcal{L}\Delta u \equiv (a(x,t,u_1^0)\Delta u_x)_x - \mathcal{A}_1\Delta u_x - \mathcal{A}_2\Delta u$ – линейный оператор,

$$\mathcal{A}_1 = b(x,t,u_1^0) - a_u(x,t,u_1^0)u_{2x}^0,$$

вид $\mathcal{A}_2$, зависящий от производных u_{2x}^0, u_{2xx}^0, u_{2t}^0 и от значений функций a_u, a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u и d_u, приведен в [1]. Все коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ непрерывны как функции (x,t) в силу свойств 1–3 входных данных и принадлежности u_1^0 и u_2^0 классу функций $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$.

Утверждение, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0 \leq x \leq l$, опирается на следующие свойства краевой задачи, сопряженной с (6)–(8).

Лемма 1. *Пусть* $\psi(x,t)$ *– решение сопряженной задачи*

$$(c(x,t,u_1^0)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \le t < T, \tag{9}$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \le t < T, \tag{10}$$

$$\psi|_{t=T} = \eta(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{11}$$

где $\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x,t,u_1^0)\psi_x)_x + (\mathcal{A}_1\psi)_x - \mathcal{A}_2\psi$, $\eta(x)$ *– произвольная функция из* $C^2[0,l]$, $\eta|_{x=0,x=l} = 0$. *Тогда*

$$\int_0^T\int_0^l \psi(x,t)p_0(x,t)\Delta f(x)\,dx\,dt = 0 \quad \forall\eta \in C^2[0,l], \quad \eta|_{x=0,x=l} = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что все коэффициенты в уравнении (9), рассматриваемые как функции (x,t), непрерывны в $\overline{Q}$ в силу свойств функций a, b, c, d и оценок в $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ для $u_1^0(x,t)$ и $u_2^0(x,t)$. Следовательно, задача (9)–(11), являясь линейной краевой задачей относительно функции $\psi(x,t)$, разрешима в классе $\psi(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ [5, с. 364].

Рассмотрим выражение

$$I = \int_0^T\int_0^l \psi\{c\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u\}\,dx\,dt + \int_0^T\int_0^l \Delta u\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\}\,dx\,dt. \tag{13}$$

С одной стороны, в силу (6) и (9) имеем

$$I = \int_0^T\int_0^l \psi(x,t)p_0(x,t)\Delta f(x)\,dx\,dt. \tag{14}$$

С другой стороны, проводя в (13) интегрирование по частям с учетом соотношений (6)–(8) и (9)–(11), получаем

$$I = \int_0^l [c\psi\Delta u]_{t=0}^{t=T}\,dx \mp \int_0^T\int_0^l \Delta u(c\psi)_t\,dx\,dt - \int_0^T [\psi a\Delta u_x]_{x=0}^{x=l}\,dt + \int_0^T\int_0^l a\psi_x\Delta u_x\,dx\,dt +$$

$$+ \int_0^T [\psi\mathcal{A}_1\Delta u]_{x=0}^{x=l}\,dt \mp \int_0^T\int_0^l \Delta u(\mathcal{A}_1\psi)_x\,dx\,dt \mp \int_0^T\int_0^l \Delta u\mathcal{A}_2\psi\,dx\,dt +$$

$$+ \int_0^T [\Delta u a\psi_x]_{x=0}^{x=l}\,dt - \int_0^T\int_0^l a\psi_x\Delta u_x\,dx\,dt = 0.$$

Отсюда и из (14) следует утверждение (12). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Предположим, что при любой функции* $\eta(x) \in C^2[0,l]$, $\eta|_{x=0,x=l} = 0$, *соответствующее решение* $\psi(x,t)$ *сопряженной задачи (9)–(11) удовлетворяет при любом* $\bar{t} \in [0,T]$ *соотношению*

$$\int_0^l \psi(x,t)|_{t=\bar{t}}\, w(x)\,dx = 0 \tag{15}$$

для некоторой непрерывной функции $w(x)$, $w|_{x=0,x=l} = 0$. *Тогда* $w(x) = 0$ *при* $0 \le x \le l$, *т.е. множество значений* $\{\psi(x,t)|_{t=\bar t}\}$, *получаемое при пробегании функцией* $\eta(x)$ *соответствующего множества из* $C^2[0,l]$, *является всюду плотным.*

Доказательство. При $\bar t = T$ плотность множества $\{\psi(x,T)\}$ очевидным образом следует из (11) и произвольности функции $\eta(x)$. При $0 \le \bar t < T$ рассмотрим в области $\overline{Q}_{\bar t} = \{0 \le x \le l, \bar t \le t \le T\}$ краевую задачу (сопряженную с (9)–(11), ср. с (6)–(8))

$$c(x,t,u_1^0)z_t - \mathcal{L}z = 0, \quad 0 < x < l, \quad \bar t < t \le T, \tag{16}$$

$$z|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=l} = 0, \quad \bar t < t \le T, \tag{17}$$

$$z|_{t=\bar t} = \theta(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{18}$$

$$\mathcal{L}z \equiv (a(x,t,u_1^0)z_x)_x - \mathcal{A}_1 z_x - \mathcal{A}_2 z, \quad \theta(x) = (c(x,t,u_1^0)|_{t=\bar t})^{-1} w(x).$$

Коэффициенты уравнения (16), рассматриваемые как функции (x,t), непрерывны в силу требований гладкости входных данных 1–3 и принадлежности u_1^0 и u_2^0 классу функций $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$. Это позволяет заключить, что краевая задача (16)–(18), линейная относительно $z(x,t)$, имеет решение $z(x,t) \in C(\overline{Q}_{\bar t}) \cap C^{2,1}(Q_{\bar t})$ [5, с. 364]. Покажем, что оно удовлетворяет дополнительному условию $z|_{t=T} = 0$.

Рассмотрим выражение

$$II = \int\limits_{\bar t}^{T}\int\limits_0^l z\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\}\,dx\,dt + \int\limits_{\bar t}^{T}\int\limits_0^l \psi\{cz_t - \mathcal{L}z\}\,dx\,dt.$$

С одной стороны, в силу однородности уравнений (9) и (16) имеем $II = 0$, а с другой – интегрирование по частям с учетом соотношений (9)–(11) и (16)–(18) дает

$$II = \int\limits_0^l [c\psi z]_{t=\bar t}^{t=T}\,dx \mp \int\limits_{\bar t}^{T}\int\limits_0^l \psi c z_t\,dx\,dt + \int\limits_{\bar t}^{T}[za\psi_x]_{x=0}^{x=l}\,dt - \int\limits_{\bar t}^{T}\int\limits_0^l a\psi_x z_x\,dx\,dt + \int\limits_{\bar t}^{T}[\psi\mathcal{A}_1 z]_{x=0}^{x=l}\,dt \mp$$

$$\mp \int\limits_{\bar t}^{T}\int\limits_0^l \mathcal{A}_1\psi z_x\,dx\,dt \mp \int\limits_{\bar t}^{T}\int\limits_0^l \mathcal{A}_2\psi z\,dx\,dt - \int\limits_{\bar t}^{T}[\psi a z_x]_{x=0}^{x=l}\,dt + \int\limits_{\bar t}^{T}\int\limits_0^l a\psi_x z_x\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^l (cz)|_{t=T}\,\eta(x)\,dx - \int\limits_0^l (c\psi)|_{t=\bar t}\,\theta(x)\,dx.$$

Но по предположению функция $w(x) = c(x,t,u_1^0)|_{t=\bar t}\,\theta(x)$ удовлетворяет при любом значении $\bar t \in [0,T]$ соотношению (15). Следовательно,

$$\int\limits_0^l z(x,T)c(x,t,u_1^0)|_{t=T}\,\eta(x)\,dx = 0.$$

Отсюда в силу произвольности функции $\eta(x)$ $(\eta(x) \in C^2[0,l],\ \eta|_{x=0,x=l} = 0)$ и неравенства $c(x,t,u) \ge c_{\min} > 0$ вытекает, что $z|_{t=T} = 0$.

Вопрос о плотности множества $\{\psi(x,t)|_{t=\bar t}\}$ свелся таким образом к вопросу о единственности решения краевой задачи для $z(x,t)$ с обратным направлением времени, а именно: следует ли из (16), (17) и условия $z|_{t=T} = 0$, что $z(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_{\bar t}$, а тем самым, что и $\theta(x) = 0$, $w(x) = 0$. Но все коэффициенты уравнения (16) как функции (x,t) удовлетворяют в силу своей непрерывности и равномерной ограниченности в $\overline{Q}_{\bar t}$ (см. выше) тем требованиям регулярности, при которых первая краевая задача для линейных параболических уравнений с обратным направлением времени имеет единственное решение в классе гладких функций (см. [6, с. 215]). Следовательно, из (16)–(18) и условия $z|_{t=T}=0$ действительно вытекает, что $z(x,t)\equiv 0$ в $\overline{Q}_{\bar t}$, $w(x)=0$. Лемма 2 доказана.

Леммы 1, 2 уже позволяют заключить, что обратная задача (1)–(4) не может иметь более одного решения $\{u^0,f^0\}$ в смысле определения 1. Действительно, применяя в интегральном соотношении (12) теорему о среднем по переменной t, получаем равенство

$$\int\limits_0^l T\psi(x,t)|_{t=\bar t}\,p_0(x,t)|_{t=\bar t}\,\Delta f(x)\,dx=0,\quad 0\le\bar t\le T, \tag{19}$$

справедливое при любой функции $\eta(x)\in C^2[0,l]$, $\eta|_{x=0,x=l}=0$, в сопряженной задаче (9)–(11). Но так как множество $\{\psi(x,t)|_{t=\bar t}\}$ обладает свойством плотности (лемма 2), то равенство (19) означает, что $p_0(x,t)|_{t=\bar t}\,\Delta f(x)=0$ при $0\le x\le l$, $0\le\bar t\le T$. По предположению (см. требование 3 к входным данным) $|p_0(x,t)|\ge p_0>0$ при $(x,t)\in\overline{Q}$. Следовательно, $\Delta f(x)=0$ при $0\le x\le l$. Тогда из соотношений (6)–(8), которые представляют собой линейную краевую задачу относительно Δu, вытекает в силу единственности решения такой краевой задачи [5, с. 364], что $\Delta u\equiv 0$ в $\overline{Q}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой и в том случае, когда неравенство $|p_0(x,t)|\ge p_0>0$ имеет место в некоторой области $Q'=\{0\le x\le l,\ 0\le t<t_1\}\subset\overline{Q}$, вне которой $p_0(x,t)=0$.

2.2. Если функция f в правой части уравнения (1) ищется в виде $f(x,t)$, а не $f(x)$, то такая обратная задача с финальным переопределением не обладает, вообще говоря, свойством единственности. Это подтверждается следующим примером.

Пример 1. Функции

$$u_1(x,t)=x(x-1)(1+t\exp(-t))+t,\quad f_1(x,t)=(x(x-1)(1-t)-2t)\exp(-t)+t-1,$$

$$u_2(x,t)=x(x-1)(1+t\exp(-t^2))+t,\quad f_2(x,t)=(x(x-1)(1-2t^2)-2t)\exp(-t^2)+t-1$$

удовлетворяют в области $\overline{Q}=\{0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1\}$ следующей обратной задаче:

$$u_t-u_{xx}=f(x,t),\quad (x,t)\in Q,$$

$$u|_{x=0}=t,\quad u|_{x=1}=t,\quad 0<t\le 1,\quad u|_{t=0}=x(x-1),\quad 0\le x\le 1,$$

с финальным переопределением при $t=1$

$$u|_{t=1}=x(x-1)(1+e^{-1})+1,\quad 0\le x\le 1,$$

т.е. для этой задачи единственность решения не имеет места.

2.3. Остановимся кратко на достаточных условиях единственности, которые вытекают из проведенного исследования в том случае, когда обратная задача состоит в нахождении функций $u(x,t)$ в области $\overline{Q}$ и $f(x)$ при $0\le x\le l$, удовлетворяющих линейному параболическому уравнению

$$c(x,t)u_t-Lu=p_0(x,t)f(x)+p_1(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{20}$$
$$Lu\equiv(a(x,t)u_x)_x-b(x,t)u_x-d(x,t)u,$$

условиям (2), (3) и финальному наблюдению (4). Соответствующая этой обратной задаче теорема единственности принимает следующий вид.

Теорема 2. *Пусть входные данные краевой задачи (20), (2), (3) удовлетворяют требованиям гладкости и согласования*

$$a,a_x,b,c,d\in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}),\quad p_i\in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}),\quad 0<\lambda<1,\quad i=0,1,$$

$$v_i \in H^{1+\lambda/2}[0,T], \quad \varphi \in H^{2+\lambda}[0,l], \quad v_0(t)|_{t=0} = \varphi|_{x=0}, \quad v_1(t)|_{t=0} = \varphi|_{x=l},$$

обеспечивающим существование и единственность $u(x,t)$ в $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(x) \in H^{\lambda}[0,l]$ в правой части уравнения (20), такой, что

$$\begin{aligned} c(x,0)v_{0t} - L\varphi|_{x=0,t=0} &= p_0(x,0)f(x) + p_1(x,0)|_{x=0}, \\ c(x,0)v_{1t} - L\varphi|_{x=l,t=0} &= p_0(x,0)f(x) + p_1(x,0)|_{x=l}. \end{aligned} \tag{21}$$

Пусть, кроме того, производные b_x и c_t непрерывны в $\overline{Q}$, функция $g(x) \in H^{2+\lambda}[0,l]$, $|p_0(x,t)| \geq p_0 > 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$. Тогда в случае существования решения $\{u^0(x,t), f^0(x)\}$ обратной задачи, удовлетворяющего соотношениям (20), (2)–(4) и (21), оно единственно в классе функций $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \times H^{\lambda}[0,l]$.

Доказательство повторяет с соответствующими упрощениями доказательство теоремы 1, при этом учитывается соотношение (12) для решения $\psi(x,t)$ сопряженной задачи, имеющей в данном случае вид

$$(c(x,t)\psi)_t + (a(x,t)\psi_x)_x + (b(x,t)\psi)_x - d(x,t)\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T,$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T,$$

$$\psi|_{t=T} = \eta(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad \eta \in C^2[0,l], \quad \eta|_{x=0,x=l} = 0,$$

и плотность множества $\{\psi(x,t)|_{t=\bar{t}}\}$ $(0 \leq \bar{t} \leq T)$ при пробегании функцией $\eta(x)$ соответствующего множества в $C^2[0,l]$. Вывод последнего утверждения основан (как и в лемме 2) на теореме единственности для первой краевой задачи с обратным направлением времени для линейных параболических уравнений.

Теорема 2 остается в силе и в том случае, когда неравенство $|p_0(x,t)| \geq p_0 > 0$ выполняется в некоторой области $Q' \subset \overline{Q}$, вне которой $p_0(x,t) = 0$ (см. замечание 1).

3. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

3.1. Обратные задачи с финальным переопределением для параболических уравнений с неизвестной правой частью являются некорректно поставленными. Их решение в случае существования не обладает устойчивостью относительно погрешностей входных данных. Это демонстрирует следующий

Пример 2. Функции $u^0(x,t) = x(t+x-1)$, $f^0(x) = x-2$ являются решением обратной задачи в области $\overline{Q} = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq T\}$:

$$u_t - u_{xx} = f(x), \quad (x,t) \in Q, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = t, \quad 0 < t \leq T, \quad u|_{t=0} = x(x-1), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

с финальным наблюдением

$$u|_{t=T} = g(x), \quad g(x) = x(T+x-1), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Пусть вместо функции $g(x)$ задано ее приближение

$$g_n(x) = g(x) + \delta_n(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

с погрешностью $\delta_n(x) = n^{-1}Tx(x-1)$, где $n > 0$ – любое целое, при $n \to \infty$ $\delta_n(x) \to 0$ в равномерной метрике. Решением обратной задачи с финальным наблюдением $g_n(x)$ является пара функций

$$u_n = u^0 + \Delta_n u, \quad \Delta_n u = n^{-1}tx(x-1)\exp n^2(T-t),$$

$$f_n = f^0 + \Delta_n f, \quad \Delta_n f = n^{-1}\{x(x-1)(1-n^2t) - 2t\}\exp n^2(T-t).$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ $\Delta_n u \to \infty$, $\Delta_n f \to \infty$ в метрике $C(\overline{Q})$.

Для построения приближенных решений, устойчивых к погрешностям входных данных этого класса обратных задач, необходимо применять регуляризирующие методы. Однако в случае квазилинейных параболических уравнений возникает проблема обоснования применимости известных принципов регуляризации, так как область применения некоторых из них (например, метода квазиобращения [7] и методов сведения исходной задачи к интегральному уравнению) включает в себя только линейные параболические уравнения.

3.2. Дадим обоснование применимости вариационного метода квазирешений [8] для устойчивого приближенного решения обратной задачи (1)–(4). Ее операторное представление имеет вид

$$Af = g, \quad f \in F \subset L_2[0,l], \quad g \in G \subset L_2[0,l], \tag{22}$$

где $A : F \to G$ – нелинейный оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $f \in F$ решение краевой задачи (1)–(3) $u|_{t=T}$ в конечный момент времени $t = T$. Точным решением уравнения (22) является такой элемент $f^0 \in F$, для которого $u|_{t=T}$ совпадает с заданным элементом $g \in G$.

Предположим, что входные данные обратной задачи (1)–(4) удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда возможность определения оператора A для любого $f \in F$ и принадлежность $Af \in G$ обеспечиваются выбором F и G в виде (см. (5))

$$F = \{f(x) \in W_2^{3/2}[0,l],\ c(x,0,\varphi)v_{it} - L\varphi|_{x=0,x=l,t=0} = p_0(x,0)f(x) + p_1(x,0)|_{x=0,x=l}\}, \tag{23}$$

$$F \subset H^\lambda[0,l], \quad G = \{\omega(x) \in H^{2+\lambda}[0,l]\}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Вариационный подход к постановке обратной задачи (1)–(4) основан на том, что решение операторного уравнения (22) эквивалентно минимизации в F функционала: $\inf\limits_{f\in F} J_g(f)$, $J_g(f) = \|Af - g\|_{L_2[0,l]}$. Для регуляризации этой некорректной вариационной задачи воспользуемся методом квазирешений на системе расширяющихся компактных в $H^\lambda[0,l]$ $(0 < \lambda < 1)$ множеств F_R, где $F_R = \{f \in F,\ \|f\|_{W_2^{3/2}[0,l]} \le R\}$, $R = \mathrm{const} > 0$.

Определение 2. Квазирешением уравнения (22) на множестве F_R назовем множество $F_R^* = \{f_R \in F_R,\ J_g(f_R) = \inf\limits_{f\in F_R} J_g(f)\}$.

Корректность задачи минимизации функционала $J_g(f)$ на F_R при любом фиксированном $R > 0$ и возможность построения квазирешения F_R^* (непустота F_R^*) следуют из теоремы Вейерштрасса в силу компактности в $H^\lambda[0,l]$ $(0 < \lambda < 1)$ множества F_R и следующего свойства функционала $J_g(f)$.

Теорема 3. *При выполнении входными данными требований теоремы 1 функционал $J_g(f)$ является непрерывным в $H^\lambda[0,l]$ на множестве F_R и слабо непрерывным в $W_2^{3/2}[0,l]$ на множествах F_R и F.*

Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующих утверждений в [9, с. 64], и основано на оценках принципа максимума для краевой задачи вида (6)–(8), в которой $\Delta f = f^n - f$, $\{f^n\} \subset F_R$ – произвольная последовательность, сходящаяся в $H^\lambda[0,l]$ к некоторой функции $f \in F_R$, и где $\Delta u = u^n - u$, $u^n(x,t)$ и $u(x,t)$ – решения квазилинейной краевой задачи (1)–(3), соответствующие функциям $f^n(x)$ и $f(x)$ в правой части уравнения (1).

3.3. Допустим, что операторное уравнение (22) при данном g имеет точное решение $f^0 \in F$, т.е. $g \in AF$, где $AF \subseteq G$ – образ множества F в G. Тогда в случае принадлежности f^0 некоторому компакту $F_{\overline{R}}$ (т.е. если $\inf\limits_{f\in F_{\overline{R}}} J_g(f) = 0$) квазирешение $F_{\overline{R}}^*$ на этом компакте состоит из единственного элемента f^0 в силу единственности точного решения обратной задачи (1)–(4) (теорема 1). Таким образом, исходная задача сведена к вариационной задаче $\inf\limits_{f\in F_{\overline{R}}} J_g(f)$, для которой выполнены все условия корректности в смысле А.Н. Тихонова.

Если же $f^0 \notin F_{\overline{R}}$, то любой элемент из множества квазирешений F_R^* $(\overline{R} < R < R^0 = \|f^0\|_{W_2^{3/2}[0,l]})$ сходится в $W_2^{3/2}[0,l]$ к f^0 при $R \to R^0$. Это утверждение формулируется в следующей теореме с использованием понятия α-сходимости множеств.

Теорема 4. *Пусть входные данные обратной задачи (1)–(4) удовлетворяют условиям теоремы 1 и, кроме того, при* $(x,t,u) \in \overline{D}$ *производные* a_{xu}, a_{uu}, b_u, c_u, d_u *непрерывны в смысле Гёльдера по* x, t, u *с показателями* λ, $\lambda/2$, λ *соответственно,* $0<\lambda<1$. *Тогда квазирешение* F_R^*, *определенное для любого* R, $0<R<R^0=\|f^0\|_{W_2^{3/2}[0,l]}$, α*-сходится к точному решению* f^0 *операторного уравнения (22) при* $R \to R^0$:

$$F_R^* \xrightarrow{\alpha} f^0(W_2^{3/2}[0,l]). \tag{24}$$

При этом для $R \to R^0$

$$U_R^* \xrightarrow{\alpha} u^0(H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})), \tag{25}$$

где $U_R^*=\{u_R(x,t)\}$ – *множество решений квазилинейной краевой задачи (1)–(3), соответствующее множеству* F_R^* *функций* $f_R(x)$ *в правой части уравнения (1),* $\{u^0(x,t),f^0(x)\}$ – *точное решение обратной задачи (1)–(4) в смысле определения 1.*

Доказательство утверждений (24), (25) аналогично доказательству соответствующих утверждений в [9, с. 65–68]. Оно основано, в частности, на оценках устойчивости в классах Гёльдера краевой задачи (1)–(3)

$$|\Delta u|_Q^{2+\lambda,1+\lambda/2} \le K|\Delta f|_{[0,l]}^{\lambda}, \quad 0<\lambda<1, \quad K=\mathrm{const}>0,$$

вытекающих из [5, с. 364] и соотношений вида (6)–(8), в которых $\Delta u=u_R-u^0$, $\Delta f=f_R-f^0$. Как следствие теоремы 4, любой элемент из множества квазирешений $f_R \in F_R^*$ и соответствующее ему решение краевой задачи (1)–(3) являются приближениями в соответствующих классах к решению $\{u^0,f^0\}$ обратной задачи с финальным переопределением.

3.4. Рассмотрим вопрос устойчивости метода квазирешений при приближенном задании оператора A, множества F и правой части g в операторном представлении (22) обратной задачи.

Пусть функции a_h, b_h, c_h, d_h, φ_h, v_{ih}, p_{ih} $(i=0,\ 1)$ и g_δ – достаточно гладкие приближения входных данных, определяющие, в частности, оператор L_h (ср. с (1)) и множество F_h (ср. с (23)):

$$L_h u \equiv (a_h(x,t,u)u_x)_x - b_h(x,t,u)u_x - d_h(x,t,u),$$

$$F_h=\{f_h(x)\in W_2^{3/2}[0,l],\ c_h(x,0,\varphi_h)v_{iht} - L_h\varphi_h|_{x=0,x=l,t=0} = p_{0h}(x,0)f_h(x)+p_{1h}(x,0)|_{x=0,x=l}\}.$$

Тогда вариационная постановка обратной задачи принимает вид

$$\inf_{f_h\in F_{hR}} J_{g_\delta}^h(f_h), \quad J_{g_\delta}^h(f_h)=\|A_hf_h-g_\delta\|_{L_2[0,l]},$$

где A_h – нелинейный оператор, ставящий в соответствие каждому элементу множества $F_{hR}=$ $=\{f_h(x)\in F_h,\ \|f_h\|_{W_2^{3/2}[0,l]}\le R\}$ решение в конечный момент времени $u_h|_{t=T}$ краевой задачи (1)–(3) с приближенно заданными входными данными. Имеет место

Теорема 5. *Пусть гладкие приближения входных данных обратной задачи (1)–(4) удовлетворяют условиям теоремы 4 и сходятся при* $h\to 0$ *равномерно в области своего определения к соответствующим точным входным данным:*

$$a_h \to a(H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})), \quad a_{hx},a_{hu},b_h,c_h,d_h \to a_x,a_u,b,c,d(H^{\lambda,\lambda/2,\lambda}(\overline{D})),$$

$$p_{ih}\to p_i(H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})), \quad v_{ih}\to v_i(H^{1+\lambda/2}[0,T]), \quad \varphi_h\to\varphi(H^{2+\lambda}(0,l])$$

и пусть $g_\delta \to g(L_2[0,l])$ *при* $\delta\to 0$. *Тогда квазирешение* $F_{\delta hR}^*$ *на компакте* F_{hR}, *определяемое как*

$$F_{\delta hR}^*=\{f_{\delta hR}\in F_{hR},\ J_{g_\delta}^h(f_{\delta hR})=\inf_{f_h\in F_{hR}} J_{g_\delta}^h(f_h)\},$$

при любом $R \geq R^0 = \|f^0\|_{W_2^{3/2}[0,l]}$ α *-сходится к точному решению* f^0 *операторного уравнения (22) при* $(h,\delta) \to 0:$ $F^*_{\delta hR} \overset{\alpha}{\to} f^0(H^\lambda[0,l])$. *При этом для* $(h,\delta) \to 0$

$$U^*_{\delta hR} \overset{\alpha}{\to} u^0(H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})),$$

где $\{U^*_{\delta hR}\}$ *– множество решений краевой задачи (1)–(3) с приближенными входными данными, получаемое при пробегании функцией* $f(x)$ *в правой части уравнения (1) множества* $F^*_{\delta hR}$, $\{u^0(x,t),\ f^0(x)\}$ *– решение обратной задачи (1)–(4) в смысле определения 1.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующих утверждений в [9, с. 93–100], см. также [1].

Замечание 2. Если не предполагать существования решения операторного уравнения (22) (что естественно в обратных задачах проектирования и управления), то, как и в [9, с. 70], можно ввести понятие обобщенного квазирешения уравнения (22) на компакте F_R

$$F_{\delta R}(\tilde{g}) = \{f \in F_R,\ J_{\tilde{g}}(f) \leq 2\delta\},$$

использующее лишь информацию о $\tilde{g}$, δ, $J^*_{\tilde{g}}$, где $\tilde{g} \in G$ – приближенное значение правой части операторного уравнения (22), заданное с точностью $\delta > 0$, $\|g - \tilde{g}\|_{L_2[0,l]} \leq \delta$, и где

$$J^*_{\tilde{g}} = \inf_{f \in F} J_{\tilde{g}}(f), \quad 0 \leq J^*_{\tilde{g}} \leq \delta \quad \forall \tilde{g} \in G, \quad g \in \overline{AF}$$

– мера состоятельности модели (22). Очевидно, что если точное решение $f^0 \in F$ существует, то при любом $R \geq R^0 = \|f^0\|_{W_2^{3/2}[0,l]}$ оно принадлежит $F_{\delta R}(\tilde{g})$. Обобщенное квазирешение также обладает устойчивостью относительно погрешностей в задании A, F, g (схема доказательства аналогична приведенной в [9, с. 100–103]).

Замечание 3. Все представленные результаты допускают обобщение для многомерной постановки обратной задачи с финальным переопределением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдман Н.Л.* // Вычислит. методы и программирование. 2003. Т. 4. С. 155–166.
2. *Клибанов М.В.* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 533–536.
3. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, 1999.
4. *Камынин В.Л.* // Обратные и некорректно поставленные задачи. М., 2001. С. 36.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
7. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М., 1970.
8. *Иванов В.К.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1971. Т. 112. С. 232–240.
9. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М., 1999.

Научно-исследовательский вычислительный центр
при Московском государственном университете
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
29.10.2003 г.