1957 г. июль—август *т. XII, вып. 4 (76)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

О НЕПРЕРЫВНЫХ РАЗБИЕНИЯХ БИКОМПАКТОВ

В. И. Пономарев

1. В п. 2 этой работы доказывается следующий основной факт. Если дано непрерывное разбиение бикомпакта X, то множество всех компонент всех элементов разбиения также является непрерывным разбиением бикомпакта X. Эта теорема, известная для случая, когда X является компактом (см., например, [1], стр. 141—142), доказывалась в этом частном случае в существенном предположении, что в компакте X введена определенная метрика. Поэтому известные до сих пор доказательства на случай любых бикомпактов не переносятся. В даваемом в настоящей работе общем доказательстве применяется известная теорема М. Р. Шуры-Буры о компонентах бикомпактов (см., например, [2], стр. 97).

Из нашей теоремы сразу же следует, что всякое непрерывное отображение f бикомпакта X на бикомпакт Y разлагается в суперпозицию $f(x) = \varphi(\psi(x))$ двух отображений, из которых первое (т. е. ψ) является монотонным, а второе — нульмерным.

В п. 3 вводится новое понятие вполне непрерывного разбиения бикомпакта и доказывается, что непрерывное отображение бикомпакта (на бикомпакт) тогда и только тогда открыто, когда соответствующее этому отображению разбиение вполне непрерывно.

В п. 4 доказывается, что разбиение $X = \bigcup A$ бикомпакта на попарно непересекающиеся замкнутые множества тогда и только тогда вполне непрерывно, когда множество всех элементов A данного разбиения является замкнутым в пространстве всех замкнутых множеств бикомпакта X.

Общее понятие непрерывного разбиения было, как известно, введено и исследовано в 1925 г. П. С. Александровым в работах [3] и [4] [1]); аналогичное понятие в более специальных предположениях было тогда же введено американским математиком Моором [6].

2. Теорема 1. *Пусть $\{A\}$ есть непрерывное разбиение бикомпакта R. Каждый элемент разбиения $A \in \{A\}$ разбиваем на его компоненты. Полученное новое разбиение $\{k\}$ всего бикомпакта R непрерывно.*

---

[1]) Подробное изложение основных фактов теории непрерывных разбиений можно найти в [5], гл. 1, § 5 и гл. 2, § 2.

Доказательство. Компоненты элемента разбиения A_α мы будем обозначать через k_α. Пусть $A_\alpha \in \{A\}$, $k_\alpha \subseteq A_\alpha$ и окрестности Uk_α относительно R произвольны. Множество k_α содержится (по теореме М. Р. Шуры-Буры) в открыто-замкнутом (в A_α) множестве $H_\alpha \subseteq Uk_\alpha \cap A_\alpha$. Построим такое открытое (в R) множество $U_1 k_\alpha \subseteq Uk_\alpha$, что $U_1 k_\alpha \cap A_\alpha = H_\alpha$. Так как $U_1 k_\alpha \cap A_\alpha$ замкнуто в A_α, то $U_1 k_\alpha \cap A_\alpha = [U_1 k_\alpha] \cap A_\alpha$. Открытое в R множество $U_1 k_\alpha \cup (R \setminus [U_1 k_\alpha]) = VA_\alpha$ есть некоторая окрестность (в R) элемента разбиения A_α. Так как разбиение $\{A\}$ непрерывно, то существует отмеченная[1]) для разбиения $\{A\}$ окрестность $V_1 A_\alpha \subseteq VA_\alpha$.

Теорема будет доказана, как только мы убедимся в том, что открытое в R множество $V_1 A_\alpha \cap U_1 k_\alpha$ есть отмеченная (для разбиения $\{k\}$) окрестность Ok_α множества $k_\alpha \in \{k\}$, содержащаяся в Uk_α. Докажем последнее утверждение. Если некоторое $k \in \{k\}$, $k \subseteq A$, пересекается с Ok_α, то множество A пересекается с $V_1 A_\alpha$ и, следовательно, содержится в $V_1 A_\alpha$, а потому и подавно $k \subseteq V_1 A_\alpha \subseteq VA_\alpha = U_1 k_\alpha \cup (R \setminus [U_1 k_\alpha])$. Но так как k связано, $k \cap U_1 k_\alpha \neq \Lambda$, то $k \subset U_1 k_\alpha \subseteq Uk_\alpha$, что и требовалось доказать. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Всякое непрерывное отображение f бикомпакта X на бикомпакт Y может быть представлено в виде суперпозиции $f(x) = \varphi(\psi(x))$, где ψ есть монотонное отображение бикомпакта X на некоторый бикомпакт K, а φ есть нульмерное отображение бикомпакта K на Y.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{A\}$ есть непрерывное разбиение бикомпакта X, соответствующее непрерывному отображению f. Разбивая каждый элемент разбиения $\{A\}$ на компоненты, получим, как только что доказано, непрерывное разбиение $\{k\}$ всего бикомпакта X. Отображение ψ есть естественное отображение бикомпакта X на бикомпакт K, являющийся пространством разбиения для разбиения $\{A\}$, т. е. отображение, которое ставит в соответствие точке $x \in X$ элемент разбиения $\{k\}$, ее содержащий. Отображение φ ставит в соответствие каждой точке пространства K, т. е. каждому элементу разбиения $\{k\}$, элемент разбиения $\{A\}$, ее содержащий. Мы таким образом получим бикомпакт Y, который является пространством $Z\{A\}$ для разбиения $\{A\}$, причем для каждой точки $x \in X$ имеем $f(x) = \varphi(\psi(x))$. Отображение ψ монотонно, потому что прообраз всякой точки $(k) = \psi(x) \in K$ есть континуум $k \subseteq X$. Отображение φ бикомпакта K на бикомпакт Y нульмерно, так как прообраз в K точки $y \equiv (A)$ нульмерен, будучи множеством всех компонент бикомпакта A.

3. Во всем дальнейшем под *покрытием* какого-либо множества, лежащего в пространстве R, мы будем понимать открытое покрытие (т. е. покрытие, элементами которого являются открытые множества пространства R). Сумма множеств, являющихся элементами покрытия α, называется *телом* этого покрытия и обозначается через $\tilde{\alpha}$.

Определение. Разбиение $\{A\}$ бикомпакта R назовем *вполне непрерывным*, если каковы бы ни были элемент $A_0 \in \{A\}$ и его конечное открытое

[1]) Множество $E \subseteq R$ называется «*отмеченным*» (для данного разбиения), если оно является суммой некоторых элементов этого разбиения. Отмеченную окрестность $V_1 A_\alpha$ получаем, взяв сумму всех элементов разбиения, лежащих в VA_α.

покрытие $\alpha_0=(O_1, O_2, \ldots, O_s)$, существует такая окрестность UA_0 этого элемента A_0, что из $A\bigcap UA_0\neq\Lambda$ следует

а) $A\subset\widetilde{\alpha}_0$,

б) $A\bigcap O_i\neq\Lambda$ $(i=1, 2, \ldots, s)$.

Для дальнейшего нам будет необходима

Лемма. *Для того чтобы разбиение* $\{A\}$ *было вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы каковы бы ни были элемент разбиения* $A_0\in\{A\}$ *и его конечное покрытие* α_0, *сумма всех* $A\in\{A\}$, *которые содержатся в* $\widetilde{\alpha}_0$ *и пересекаются с каждым элементом покрытия* α_0, *открыта в пространстве* R.

Достаточность содержащегося в лемме условия очевидна. Докажем его необходимость. Пусть элемент разбиения $A_0\in\{A\}$ и его конечное открытое покрытие $\alpha_0=(Q_1, \ldots, O_s)$ произвольны. Обозначим через Γ сумму всех элементов разбиения, которые пересекаются с каждым элементом покрытия α_0 и лежат в $\widetilde{\alpha}_0$. Для любой точки $x\in\Gamma$ возьмем содержащий ее элемент разбиения A_x и такую окрестность UA_x, что из $A\bigcap UA_x$ следует а) $A\subset\widetilde{\alpha}_0$, б) $A\bigcap O_i\neq\Lambda$ $(i=1, \ldots, s)$. Тогда $UA_x\subseteq\Gamma$, т. е. множество Γ целиком состоит из внутренних точек.

Основным результатом этого пункта является

Теорема 3. *Для того чтобы разбиение* $\{A\}$ *бикомпакта* R *было вполне непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы оно порождалось открытым отображением* f *этого бикомпакта.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{A\}$ — вполне непрерывное разбиение бикомпакта R. Отображение, которое порождает это разбиение $\{A\}$, однозначно определено: это естественное непрерывное отображение f бикомпакта R на бикомпакт Z, где Z есть пространство разбиения $\{A\}$. Элементы разбиения $\{A\}$ суть точки пространства Z, открытые множества в Z суть образы отмеченных для $\{A\}$ открытых множеств пространства R при отображении f. Теперь докажем, что отображение f открыто. Для этого надо доказать, что, каковы бы ни были точка $x_0\in R$ и ее окрестность Ux_0, ее образ $f(Ux_0)$ есть открытое множество в Z. Но $f(Ux_0)$ есть множество всех элементов разбиения $\{A\}$, пересекающихся с Ux_0; это множество открыто в Z, если сумма Γ составляющих его элементов A открыта в R. Но множество Γ действительно открыто в R. В самом деле, пусть $A_0\subset\Gamma$ и α_0 — такое покрытие множества A_0, что $Ux_0=O_1\in\alpha_0$ (в качестве α_0 можно, например, взять покрытие, состоящее из множества $O_1=Ux_0$ и множества $O_2=R\setminus[U_1x_0]$, где U_1x_0 есть окрестность точки x_0, удовлетворяющая условию $[U_1x_0]\subset Ux_0$). Тогда сумма элементов разбиения $\{A\}$, которые содержатся в $\widetilde{\alpha}_0$ и пересекаются с каждым элементом покрытия α_0, есть (как следует из леммы) отмеченная окрестность элемента A_0 разбиения $\{A\}$, содержащаяся в Γ; таким образом, Γ открыто в R.

Достаточность. Пусть разбиение $\{A\}$ бикомпакта R порождается открытым отображением f на бикомпакт Y. Тогда $Y=Z$ есть бикомпакт и разбиение $\{A\}$ непрерывно. Докажем, что $\{A\}$ вполне непрерывно. Пусть $A_0\in\{A\}$ и его конечное покрытие α_0 произвольны: $\alpha_0=(U_1, U_2, \ldots, U_s)$. Так как разбиение $\{A\}$ непрерывно, то существует содержащаяся в $\widetilde{\alpha}_0$ отмеченная окрестность OA_0 множества A_0. Рассмотрим покрытие $\beta_0=(O_1, O_2, \ldots, O_s)$, где $O_1=OA_0\cap U_1$, $O_2=OA_0\cap U_2$, $\ldots$, $O_s=OA_0\cap U_s$, и множества

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s,$$

где Γ_i $(i=1, \ldots, s)$ есть сумма всех элементов разбиения, пересекающихся с O_i. При любом $i=1, \ldots, s$ множество $G_i\subset Z$, состоящее из всех $A\subseteq\Gamma_i$ (как образ открытого множества $O_i\subseteq X$ при открытом отображении f), открыто в Z, а это значит, что само Γ_i открыто в R. Открытое множество $\bigcap\limits_{i=1}^{s}\Gamma_i$ содержит множество A_0 и есть такая (отмеченная) окрестность O^*A_0 этого множества, что всякий элемент $A\subset O^*A_0$ пересекается с каждым элементом покрытия α_0 и содержится в $\widetilde{\alpha}_0$; таким образом, разбиение $\{A\}$ вполне непрерывно.

4. Обозначим множество всех непустых замкнутых множеств бикомпакта R через $F(R)$. В это множество вводится следующая топология: называют окрестностью точки $(\Phi_0)\in F(R)$ множество всех тех замкнутых множеств $\Phi\subseteq R$, которые принадлежат телу и пересекаются с каждым элементом некоторого фиксированного покрытия α множества Φ_0. Множество $F(R)$ с так определенной топологией оказывается бикомпактом[1]).

---

[1]) Эта теорема доказана многими авторами (см., например, [7], стр. 161). Приводим доказательство, принадлежащее В. М. Ивановой. Оно основано на понятии псевдобазиса топологического пространства и так называемой лемме Александера. Открытый псевдобазис пространства — это такая система открытых множеств, что, пополняя ее всеми конечными пересечениями, мы получим базу пространства. Аналогично, замкнутый псевдобазис есть система замкнутых множеств, пополняя которую конечными суммами, получим замкнутую базу пространства (т. е. систему замкнутых множеств, из которых уже одними пересечениями можно получить все замкнутые множества пространства). Лемма Александера гласит: если из всякого покрытия пространства R посредством элементов некоторого открытого псевдобазиса можно выделить конечное покрытие пространства R, то R бикомпактно (доказательство этого предложения дано, например, в [8], стр. 139). Очевидно, лемма Александера может быть сформулирована следующим образом: если всякая центрированная система множеств, являющихся элементами данного замкнутого псевдобазиса пространства R, имеет непустое пересечение, то пространство R бикомпактно. Основываясь на этом предложении, переходим к доказательству бикомпактности пространства $F(R)$ для любого бикомпакта R. Пусть Γ — произвольное непустое открытое множество в R. Обозначим через $D_1(\Gamma)$ множество всех таких $(F)\in F(R)$, что $F\subseteq\Gamma$, а через $D_2(\Gamma)$ — множество всех таких $(F)\in F(R)$, что $F\cap\Gamma\neq\Lambda$. Легко видеть, что множества $D_1(\Gamma)$ и $D_2(\Gamma)$ открыты в $F(R)$ и что эти множества, построенные для всевозможных открытых $\Gamma\subseteq R$, образуют псевдобазис пространства $F(R)$. Следовательно, всевозможные $F(R)\setminus D_1(\Gamma)=D_2(R\setminus\Gamma)$ и $F(R)\setminus D_2(\Gamma)=$ $=D_1(R\setminus\Gamma)$, т. е. всевозможные $D_2(F)$ и $D_1(F)$, где F пробегает совокупность всех замкнутых множеств пространства R, образуют замкнутый псевдобазис S пространства $F(R)$. Предположим теперь, что пространство $F(R)$ не бикомпактно, и возьмем наименьшее такое кардинальное число m, что существует центрированная система Σ множеств из псевдобазиса S, имеющая пустое пересечение. Эту систему можно упорядочить по типу ζ, равному наименьшему порядковому числу $\omega(m)$ мощности m: $\Sigma=\{B_\xi\}$, $\xi<\zeta$. Тогда $\bigcap\limits_{\xi<\zeta}B_\xi=\Lambda$, в то время как $\bigcap\limits_{\xi<\eta}B_\xi\neq\Lambda$ для любого $\eta<\zeta$. Приведем это утверждение к противоречию. Каждое B_ξ есть либо некоторое $D_1(F_\xi)$, либо некоторое $D_2(F_\xi)$. Полагая в первом случае $F'_\xi=F_\xi$, а во втором $F_\xi=R$, для любого $\xi<\zeta$ можем напи-

Основным результатом этого пункта является

Теорема 4. *Для того чтобы разбиение $\{A\}$ бикомпакта R было вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы множество элементов разбиения $\{A\} = \mathfrak{B}$, рассматриваемых как точки бикомпакта $F(R)$, было замкнуто в $F(R)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть множество $\mathfrak{B} = \{A\}$ элементов разбиения замкнуто в $F(R)$. Пусть $A_0 \in \{A\}$ и его конечное покрытие α_0 в пространстве R произвольны. Множество замкнутых множеств, содержащихся в $\widetilde{\alpha}_0$ и пересекающихся с каждым элементом покрытия α_0, образуют окрестность точки A_0 в $F(R)$, которую мы обозначим через OA_0. Теперь для каждого элемента разбиения $A \in \{A\}$, являющегося точкой замкнутого в $F(R)$ множества $\mathfrak{B} \setminus OA_0$, возьмем такое покрытие α_A (в пространстве R), чтобы тело этого покрытия не пересекалось с некоторой окрестностью $V_A A_0$ (в пространстве R) элемента разбиения A_0. Обозначим через Γ_A определенную покрытием α_A окрестность (в пространстве $F(R)$) точки $A \in \mathfrak{B} \setminus OA_0$. Эти Γ_A образуют покрытие $\gamma = \{\Gamma_A\}$ замкнутого множества $\mathfrak{B}_0 \setminus OA_0 \subset F(R)$; выделяем из него конечное покрытие $\Gamma_{A_1}, \Gamma_{A_2}, \ldots, \Gamma_{A_s}$ множества $\mathfrak{B}_0 \setminus OA_0$. Рассмотрим соответствующие покрытия $\alpha_{A_1}, \alpha_{A_2}, \ldots, \alpha_{A_s}$ и окрестности $V_{A_1}A_0, V_{A_2}A_0, \ldots, V_{A_s}A_0$ множества A_0 в R. Окрестность $VA_0 = V_{A_1}A_0 \cap V_{A_2}A_0 \cap \ldots \cap V_{A_s}A_0$ есть искомая окрестность элемента разбиения A_0 в R. В самом деле, каков бы ни был элемент разбиения, пересекающийся с VA_0, он не может лежать ни в одном из множеств $\widetilde{\alpha}_{A_1}, \widetilde{\alpha}_{A_2}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{A_s}$, так как $\widetilde{\alpha}_{A_1} \cap VA_0 = \Lambda, \ldots, \widetilde{\alpha}_{A_s} \cap VA_0 = \Lambda$; следовательно, A не может быть точкой ни одного из множеств $\Gamma_{A_1}, \Gamma_{A_2}, \ldots, \Gamma_{A_s}$. Так как $\Gamma_{A_1}, \Gamma_{A_2}, \ldots, \Gamma_{A_s}$ образуют покрытие множества $\mathfrak{B}_A \setminus OA_0$, то наш элемент разбиения A (как точка пространства $F(R)$) содержится в OA_0; другими словами, из того, что $A \cap VA_0 \neq \Lambda$ в R, следует, что A пересекается с каждым элементом покрытия α_0 и содержится $\widetilde{\alpha}_0$, что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть разбиение $R = \bigcup A$ вполне непрерывно. Нам надо доказать, что множество $\mathfrak{A} = \{A\}$ всех элементов этого разбиения замкнуто в $F(R)$, т. е. что оно в топологии, индуцированной пространством $F(R)$, является бикомпактом. Для этого надо доказать, что из всякого покрытия $\Omega = \{\omega^*\}$ множества $\mathfrak{A}$ в $F(R)$ можно выделить конечное покрытие этого множества. Не уменьшая общности ограничиваемся

сать $B_\xi = D_1(F_\xi) \cap D_2(F'_\xi)$. Так как система $\{B_\xi\}$ центрирована в $F(R)$, то $\{F_\xi\}$ центрирована в R и $\bigcap\limits_{\xi<\zeta} F_\xi = \Phi \neq \Lambda$. Возьмем произвольное $\theta < \zeta$ и рассмотрим систему $\{F_\xi\}_{\xi<\zeta} \cup (F'_\theta)$ (состоящую из всех F_ξ и еще из F'_θ). Докажем, что она тоже центрирована. Прежде всего для любых $\xi_1, \ldots, \xi_s < \zeta$ имеем $B_{\xi_1} \cap \ldots \cap B_{\xi_s} \cap B_\theta \neq \Lambda$. И подавно, $D_1(F_{\xi_1}) \cap \ldots \cap D_1(F_{\xi_s}) \cap D_2(F'_\theta) \neq \Lambda$. Но тогда существует такое $F \subseteq R$, которое пересекается с F'_θ и содержится во всех $F_{\xi_1}, \ldots, F_{\xi_s}$, значит, $\Lambda \neq F \cap F'_\theta \subseteq F_{\xi_1} \cap \ldots \cap F_{\xi_s} \cap F'_\theta$. Итак, система $\{F_\xi\}_{\xi<\zeta} \cup (F'_\theta)$ центрирована в R при любом $\theta < \zeta$. Но тогда $\Phi \cap F'_\theta \neq \Lambda$ при любом $\theta < \zeta$, следовательно, $(\Phi) \in \bigcap\limits_{\xi<\zeta} D_1(F_\xi) \cap \bigcap\limits_{\xi<\zeta} D_2(F'_\xi) = \bigcap\limits_{\xi<\zeta} B_\xi \neq \Lambda$. Полученное противоречие доказывает теорему.

покрытиями, элементы которых принадлежат базису пространства $F(R)$, примененному при его определении. Это значит, что каждое ω^* есть окрестность некоторого элемента A разбиения $\{A\}$, определенная некоторым конечным покрытием ω множества $A \subset R$ и состоящая из всех тех $F \in F(R)$, которые являются замкнутыми множествами, пересекающимися с каждым элементом покрытия ω и лежащими в теле $\tilde{\omega}$ этого покрытия. Так как разбиение $\{A\}$ вполне непрерывно, то сумма всех элементов разбиения, лежащих в $\tilde{\omega}$ и пересекающихся с каждым элементом ω, есть открытое множество σ в R. Перебирая все $\omega^* \in \Omega$, мы получим покрытие $\Sigma = \{\sigma\}$ бикомпакта R. Из этого бесконечного покрытия Σ мы выделим конечное покрытие $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$. Рассмотрим теперь соответствующие $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ и $\omega_1^*, \omega_2^*, \ldots, \omega_s^*$; докажем, что $\omega_1^*, \omega_2^*, \ldots, \omega_s^*$ покрывают всё $\mathfrak{A}$.

Действительно, пусть A — произвольный элемент разбиения $\{A\}$. Возьмем какую-нибудь точку $x \in A$: она содержится в некотором σ_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$; но тогда (так как σ_i — отмеченное множество) и все множество A содержится в этом σ_i, следовательно, по определению множества σ_i, множество A пересекается с каждым элементом покрытия ω_i и лежит в $\tilde{\omega}_i$, а это значит, что $(A) \in \omega_i^* \subseteq \neq F(R)$. Таким образом, из покрытия Ω множества $\mathfrak{A}$ мы выделили конечное покрытие, чем бикомпактность множества $\mathfrak{A}$ и замкнутость его в $F(R)$ доказаны. Доказана и вся теорема 4.

Поступило в редакцию 11 апреля 1957 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. T. Whyburn, Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 28 (1942).

[2] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 2-е изд., М., Гостехиздат, 1954.

[3] P. Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Proceed. Acad. Amsterdam 28 (1925), 97.

[4] P. Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Ann. **96** (1926), 555—571.

[5] P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I, Berlin, Springer, 1935.

[6] R. L. Moore, Concerning upper semicontinuous collections of continua, Trans. Amer. Math. Soc. **27** (1925), 416—428.

[7] E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 152—182.

[8] J. L. Kelley, General Topology, London—New York, 1955.