В. Л. Селиванов, О классификации счётных булевых термов, *Алгебра и логика*, 2005, том 44, номер 2, 173–197

Алгебра и логика, 44, № 2 (2005), 173—197

УДК 510.532

О КЛАССИФИКАЦИИ СЧЁТНЫХ БУЛЕВЫХ ТЕРМОВ

В. Л. СЕЛИВАНОВ

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $\{\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0}}_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ — борелевская иерархия подмножеств канторовского пространства 2^ω (здесь ω_1 — это первый несчётный ординал). Как обычно, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ — двойственный класс для класса $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, а $\mathbf{\Delta}^0_\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ — соответствующий самодвойственный класс. Класс всех борелевских множеств обозначим $\mathbf{B} = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.

Уровни иерархии Бореля, как и многие другие классы, изучаемые в дескриптивной теории множеств, можно определить посредством подходящих (вообще говоря, бесконечноместных) теоретико множественных операций. Определим естественный класс таких операций, называемых ω_1-*термами*, по индукции: константы 0, 1 и переменные v_k $(k < \omega)$ являются ω_1-термами; если t_i $(i < \omega)$ — ω_1-термы, то выражения $\bar{t}_0$, $t_0 \cup t_1$, $t_0 \cap t_1$, $\bigcup\limits_{i<\omega} t_i$ и $\bigcap\limits_{i<\omega} t_i$ также будут ω_1-термами.

Если $t = t(v_k)$ — ω_1-терм, обозначим через $t(\{A_k\})$ значение терма t, полученное при присваивании переменной v_k $(k < \omega)$ значения $A_k \subseteq 2^\omega$. Пусть $t(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ — множество всех значений $t(\{A_k\})$, где $A_k \in \mathbf{\Sigma}^0_1$ для любого $k < \omega$. Аналогичное обозначение $t(\mathcal{C})$ используется также для других типов термов t и классов множеств $\mathcal{C}$.

Как оказалось, классы вида $t(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ удобно характеризовать в терминах *сводимости Вэджа*, т. е. предпорядка $\leq_W$ на классе $P(2^\omega)$ всех подмножеств множества 2^ω, определяемого как

$$A \leq_W B \leftrightarrow A = f^{-1}(B)$$

для подходящей непрерывной функции $f : 2^\omega \to 2^\omega$. *Классом Вэджа* называется главный идеал вида $\{X \mid X \leq_W A\}$ для любого фиксированного множества $A \subseteq 2^\omega$. Класс Вэджа называется *борелевским*, если множество A является борелевским, и *несамодвойственным*, если $A \not\leq_W \bar{A}$, где $\overline{A} = 2^\omega \setminus A$ — это дополнение множества A.

ТЕОРЕМА 1.1 [1]**.** *Любое $\mathcal{C} \subseteq P(2^\omega)$ является несомодвойственным борелевским классом Вэджа тогда и только тогда, когда $\mathcal{C} = t(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ для некоторого ω_1-терма t.*

Эта теорема следует из результата, установленного в [2, 3].

В данной статье рассматривается проблема характеризации ω_1-термов t, удовлетворяющих равенству $\mathcal{C} = t(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, для данного борелевского класса Вэджа $\mathcal{C}$ (точная формулировка проблемы приводится в следующем разделе). Заметим, что в [1] аналогичные вопросы изучались для конечных булевых и типизированных булевых термов.

В. Вэдж и Д. Мартин показали (см. [3]), что структура $(\mathbf{B}; \leq_W)$ фундирована, а для любых $A, B \in \mathbf{B}$ выполняется $A \leq_W B$ или $\overline{B} \leq_W \leq_W A$ (структуры, обладающие этими двумя свойствами, называются *почти вполне упорядоченными*). В. Вэдж также вычислил соответствующий (большой) ординал ν. В [4, 5] установлено, что для любого несамодвойственного борелевского класса Вэджа $\mathcal{C}$ в точности один из классов $\mathcal{C}$, $co(\mathcal{C})$ имеет свойство отделимости [6]. Через $co(\mathcal{C}) = \{\overline{X} \mid X \in \mathcal{C}\}$ обозначается двойственный класс для $\mathcal{C}$.

Эти результаты позволяют определить *иерархию Вэджа* (борелевских множеств) как последовательность $\{\mathbf{\Sigma}_\alpha\}_{\alpha<\nu}$ всех несамодвойственных борелевских классов Вэджа, не имеющих свойства отделимости и удовлетворяющих для всех $\alpha < \beta < \nu$ строгому включению $\mathbf{\Sigma}_\alpha \subset \mathbf{\Delta}_\beta$. Как обычно, полагаем $\mathbf{\Pi}_\alpha = co(\mathbf{\Sigma}_\alpha)$ и $\mathbf{\Delta}_\alpha = \mathbf{\Sigma}_\alpha \cap \mathbf{\Pi}_\alpha$. Заметим, что

$$\mathbf{\Sigma}_\alpha \setminus \mathbf{\Pi}_\alpha,\ \mathbf{\Pi}_\alpha \setminus \mathbf{\Sigma}_\alpha,\ \mathbf{\Delta}_{\alpha+1} \setminus (\mathbf{\Sigma}_\alpha \cup \mathbf{\Pi}_\alpha),\ \text{где } \alpha < \nu, \text{ —}$$

это в точности классы эквивалентности, индуцированной предпорядком $\leq_W$ на $\mathbf{B}$ (они известны как *степени Вэджа*).

Заметим, что $\mathbf{\Sigma}_\alpha$ и $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ в большинстве случаев не совпадают. На самом деле справедливы, например, равенства $\mathbf{\Sigma}_{\omega_1} = \mathbf{\Sigma}^0_2$, $\mathbf{\Sigma}_{\omega_1^{\omega_1}} = \mathbf{\Sigma}^0_3$ и т. д.

Далее в этом параграфе приводятся некоторые известные факты о булевых термах. В §§ 2 и 3 определяются и изучаются борелевская и разностная иерархии в пространстве $P\omega$ всех подмножеств ω с топологией Скотта (заметим, что пространства $P\omega$ и 2^ω определены по сути на одном и том же множестве, но топологически различны). Результаты этих параграфов основываются на работах [7, 8]. В § 4 рассматривается сводимость Вэджа в пространстве $P\omega$. В § 5 приводится решение основной проблемы данной статьи для некоторых уровней иерархии Вэджа, в частности, для всех уровней разностной иерархии Хаусдорфа. В § 6 обсуждаются некоторые смежные факты и открытые проблемы.

Зафиксируем обозначения. Буквами α, β, γ обозначаются ординалы, буквами ξ, η, ζ — элементы 2^ω (точки), через σ, τ — конечные цепочки натуральных чисел, буквами A, B, X, Y, Z — подмножества 2^ω (точечные множества), буквами $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ — подмножества $P(2^\omega)$ (точечные классы), через f, g, h — функции на 2^ω (а также на некоторых других множествах).

Множество $\xi \subseteq \omega$ обычным образом отождествляется с последовательностью нулей и единиц: $\xi(n) = 1$ для $n \in \xi$ и $\xi(n) = 0$ в противном случае, $n < \omega$. Полагаем $[\xi, \eta] = \{\zeta \subseteq \omega \mid \xi \subseteq \zeta \subseteq \eta\}$ и $(\xi, \eta] = \{\zeta \subseteq \omega \mid \xi \subset \zeta \subseteq \eta\}$. Через Fin обозначается класс всех конечных подмножеств множества ω.

Пусть ω^* — множество всех конечных последовательностей (цепочек) натуральных чисел. Пустую цепочку обозначим через $\varnothing$, цепочку из n нулей — через 0^n, конкатенацию цепочек σ, τ — через $\sigma^\frown\tau$ или просто $\sigma\tau$, длину цепочки σ — через $lh(\sigma)$. Запись $\sigma \sqsubseteq \tau$ используется, когда цепочка σ является начальным сегментом цепочки τ. Введённые понятия применимы также к цепочкам из нулей и единиц, множество которых обозначим через 2^*. Для $\sigma \in 2^*$ и $\xi \in 2^\omega$ запись $\sigma \sqsubseteq \xi$ используется, когда σ является начальным сегментом функции ξ, рассматриваемой как бесконечная цепочка нулей и единиц.

Установим связь ω_1-термов с теоретико множественными операциями, которые были популярны в классической дескриптивной теории множеств. Напомним, что операции счётного объединения и пересечения, а также их итерации впервые рассмотрели Э. Борель и А. Лебег при исследовании борелевской иерархии. П. С. Александров и М. Я. Суслин ввели и изучили A-операцию, важную для исследования аналитических множеств. А. Н. Колмогоров и Ф. Хаусдорф независимо определили понятие позитивных аналитических (или δs-) операций, обобщающих все упомянутые выше операции. Ф. Хаусдорф определил разностные операции — вероятно, первые примеры систематически изучавшихся непозитивных операций.

Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон [9] определили ещё более общее понятие операции (следуя [3], будем называть её *ω-местной булевой*):

Любому $X \subseteq 2^\omega$ сопоставим бесконечный терм d_X от переменных v_k $(k < \omega)$ по правилу

$$d_X = d_X(v_k) = \bigcup_{\xi \in X} c_\xi, \text{ где } c_\xi = \left(\bigcap_{\xi(k)=1} v_k \right) \cap \left(\bigcap_{\xi(k)=0} \overline{v}_k \right).$$

Заметим, что c_ξ — бесконечные аналоги элементарных конъюнкций, а d_X — дизъюнктивных нормальных форм в логике высказываний.

Терм d_X обычным образом индуцирует ω-местную булеву операцию $d_X : P(2^\omega)^\omega \to P(2^\omega)$ на $P(2^\omega)$ (на самом деле на любой полной булевой алгебре). Два бесконечных булевых терма назовём *эквивалентными*, если они задают одну и ту же бесконечноместную операцию в любой полной булевой алгебре.

ТЕОРЕМА 1.2 [1]. *Любой ω_1-терм эквивалентен терму d_X для некоторого борелевского множества $X \subseteq 2^\omega$, и наоборот.*

Итак, ω-местные булевы операции d_X $(X \in \mathbf{B})$ дают каноническое представление для ω_1-термов. Согласно одной теореме Вэджа [2, 3], любой несамодвойственный борелевский класс Вэджа представим в виде $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ для подходящего X (из леммы 1.3(ii) легко следует, что такое X с необходимостью будет борелевским, см. теор. 5.1(i)). Попытаемся описать точечные классы типа

$$\{X \mid d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}_\alpha\} \text{ и } \{X \mid d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Sigma}_\alpha\}, \ \alpha < \nu.$$

Большинство результатов статьи формулируются только для вопросов первого типа (для случая включения). Ответ на вопросы второго типа (для случая равенства) является обычно легким следствием ответа на вопрос первого типа и включений уровней иерархии Вэджа (типичный пример — следствие 5.2).

Сформулируем некоторые очевидные и хорошо известные свойства введённых понятий.

ЛЕММА 1.3. *Имеют место следующие утверждения:*
(i) $\bigcup\limits_{\xi} c_\xi(\{A_i\}) = 2^\omega$ *и* $c_\xi(\{A_i\}) \cap c_\eta(\{A_i\}) = \varnothing$ *для* $\xi \neq \eta$;
(ii) $X = d_X(\{A_i\})$, *где* $A_i = \{\xi \subseteq \omega \mid i \in \xi\}$;
(iii) $d_{[\xi,\omega]}(\{A_i\}) = \bigcap\limits_{i\in\xi} A_i$;
(iv) *для любой последовательности* $\{A_i\}_{i\in\omega}$ *подмножеств множества* 2^ω *функция* $X \mapsto d_X(\{A_i\})$ *является эндоморфизмом полной булевой алгебры* $P(2^\omega)$.

Теорема 1.4 даёт решение проблемы данной статьи в случае, когда вместо класса $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ берётся класс $\boldsymbol{\Delta}^0_1$ всех открыто-замкнутых множеств. Насколько известно автору, доказательство ранее не было опубликовано, приведём его здесь для полноты изложения.

ТЕОРЕМА 1.4 [10]**.** *Для любого* $X \subseteq 2^\omega$ *справедливо* $d_X(\boldsymbol{\Delta}^0_1) = \{Y \mid Y \leq_W X\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что $Y \leq_W X$ влечёт $Y \in d_X(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$. Пусть $g : 2^\omega \to 2^\omega$ — непрерывная функция, удовлетворяющая равенству $Y = g^{-1}(X)$. Тогда

$$Y = g^{-1}(d_X(\{A_i\})) = d_X(\{g^{-1}(A_i)\}),$$

где A_i — множества из леммы 1.3(ii). Поскольку $A_i \in \boldsymbol{\Delta}^0_1$, получаем $Y \in d_X(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$.

Для проверки обратного включения возьмём произвольное $Y \in d_X(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$. Пусть V_i — $\boldsymbol{\Delta}^0_1$-множества со свойством $Y = d_X(\{V_i\})$. Поскольку V_i лежат в $\boldsymbol{\Delta}^0_1$ (т. е. являются конечными объединениями множеств вида $\{\xi \mid \sigma \sqsubseteq \xi\}$, $\sigma \in 2^*$), функция $f(\xi) = \{i \mid \xi \in V_i\}$ непрерывна. По определению $d_X(\{V_i\})$, включение $\xi \in Y$ верно тогда и только тогда, когда $f(\xi) \in X$. Итак, $Y \leq_W X$, что завершает доказательство.

Теорему 1.4 можно переформулировать как

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Отображение $X \mapsto d_X(\mathbf{\Delta}^0_1)$ является изоморфизмом структуры всех степеней Вэджа в 2^ω на структуру всех классов Вэджа с отношением включения.*

§ 2. Борелевская иерархия в $P\omega$

В этом параграфе исследуется борелевская иерархия в пространстве $P\omega$, образованном множеством 2^ω (отождествляемом с $P(\omega)$), и топологией Скотта. Ниже всегда предполагается, что пространство $P\omega$ снабжено топологией Скотта, а пространство 2^ω — канторовой топологией.

Напомним, что базисные открытые множества топологии Скотта — это множества вида $[\xi, \omega]$, где ξ — конечное подмножество ω. Множество $A \subseteq 2^\omega$ открыто в $P\omega$ тогда и только тогда, когда $(A; \subseteq)$ замкнуто вверх, а для любого $\xi \in A$ найдётся конечное множество $\eta \in A$ со свойством $\eta \subseteq \xi$. Функция $f : P\omega \to P\omega$ непрерывна тогда и только тогда, когда $\xi \subseteq \eta$ влечёт $f(\xi) \subseteq f(\eta)$ и $f\left(\bigcup\limits_i \xi_i\right) = \bigcup\limits_i f(\xi_i)$ для любой последовательности $\xi_0 \subseteq \xi_1 \subseteq \ldots$.

Базисные открытые множества топологии Кантора — это множества вида $\{\xi \mid \sigma \sqsubseteq \xi\}$, $\sigma \in 2^*$. Функция $f : 2^\omega \to 2^\omega$ непрерывна, если при любых $\xi \in 2^\omega$ и $n \in \omega$ значение $f(\xi)(n)$ определяется по некоторому конечному сегменту $\sigma \sqsubseteq \xi$, $\sigma \in 2^*$, последовательности ξ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Индукцией по α зададим последовательность $\{\mathcal{S}^0_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ точечных классов: $\mathcal{S}^0_0 = \{\varnothing\}$, $\mathcal{S}^0_1$ — класс всех открытых множеств, $\mathcal{S}^0_2$ — класс всех счётных объединений конечных булевых комбинаций $\mathcal{S}^0_1$-множеств и $\mathcal{S}^0_\alpha$ — класс всех счётных объединений множеств из $\bigcup\{co(\mathcal{S}^0_\beta) \mid \beta < \alpha\}$ для $\alpha > 2$.

Последовательность $\{\mathcal{S}^0_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ называется *борелевской иерархией* в $P\omega$, а классы $\mathcal{S}^0_\alpha$, $co(\mathcal{S}^0_\alpha)$ и $\tilde{\mathcal{S}}^0_\alpha = \mathcal{S}^0_\alpha \cap co(\mathcal{S}^0_\alpha)$ — *уровнями* борелевской иерархии. Нестандартные обозначения уровней борелевской иерархии в

$P\omega$ объясняются необходимостью отличать её от борелевской иерархии $\{\mathbf{\Sigma}^0_\alpha\}$ в канторовском пространстве 2^ω. Соотношения между введёнными уровнями оказываются вполне традиционными:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для всех $\alpha < \beta < \omega_1$ справедливо $\mathcal{S}^0_\alpha \subseteq \tilde{\mathcal{S}}^0_\beta$.*

Следующее предложение объясняет связь пространства $P\omega$ с рассматриваемой проблемой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. (i) *Для любого $\beta < \omega_1$ из $X \in \mathcal{S}^0_\beta$ вытекает $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\beta$.*

(ii) *Для любых $0 < \beta < \omega_1$ и ω_1-терма t из $X \in t(\mathcal{S}^0_\beta)$ вытекает $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq t(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Случай $\alpha = 0$ тривиален, поскольку $d_\varnothing(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \{\varnothing\}$. Пусть $\alpha = 1$, $X \in \mathcal{S}^0_1$. Тогда $X = \bigcup\limits_k X_k$ для некоторой последовательности $\{X_k\}_{k<\omega}$ базисных открытых множеств. Необходимо показать, что $d_X(\{A_i\}) \in \mathbf{\Sigma}^0_1$ для любой последовательности $\{A_i\}$ $\mathbf{\Sigma}^0_1$-множеств. По лемме 1.3(iv), $d_X(\{A_i\}) = \bigcup\limits_k d_{X_k}(\{A_i\})$, и достаточно показать, что $d_Y(\{A_i\}) \in \mathbf{\Sigma}^0_1$ для любого базисного открытого множества Y в топологии Скотта. Выберем $\xi \in \mathrm{Fin}$ так, чтобы $Y = [\xi, \omega]$. По лемме 1.3(iii), $d_Y(\{A_i\}) = \bigcap\limits_{i\in\xi} A_i$, значит, $d_Y(\{A_i\})$ является конечным пересечением $\mathbf{\Sigma}^0_1$-множеств, откуда $d_Y(\{A_i\}) \in \mathbf{\Sigma}^0_1$.

Пусть теперь $X \in \mathcal{S}^0_2$, тогда $X = \bigcup X_k$ для некоторой последовательности $\{X_k\}$ разностей $\mathcal{S}^0_1$-множеств, $X_k = Y_k \setminus Z_k$. В силу леммы 1.3(iv) достаточно показать, что $d_{X_k}(\{A_i\}) \in \mathbf{\Sigma}^0_2$ для любого k. По той же причине

$$d_{X_k}(\{A_i\}) = d_{Y_k}(\{A_i\}) \setminus d_{Z_k}(\{A_i\}) \in \mathbf{\Delta}^0_2 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2.$$

При $\alpha > 2$ доказательство проводится аналогично, с использованием индукции по α.

(ii) Пусть $X \in t(\mathcal{S}^0_\beta)$, тогда $X = t(\{X_k\})$ для некоторой последовательности $\{X_k\}$ $\mathcal{S}^0_\beta$-множеств. Необходимо показать, что $d_X(\{A_i\}) \in$ $\in t(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$ для любой последовательности $\{A_i\}$ $\mathbf{\Sigma}^0_1$-множеств. По лемме 1.3(iv) $d_X(\{A_i\}) = t(\{d_{X_k}(\{A_i\})\})$. По (i) $d_{X_k}(\{A_i\}) \in \mathbf{\Sigma}^0_\beta$ для любого $k < \omega$, поэтому $d_X(\{A_i\}) \in t(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$. Предложение доказано.

Теперь установим связь между борелевскими иерархиями в $P\omega$ и 2^ω.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. (i) *Для любого* $\alpha < \omega_1$ *справедливо* $\mathcal{S}^0_\alpha \subseteq \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subseteq \mathcal{S}^0_{1+\alpha}$;

(ii) $\bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{S}^0_n = \bigcup\limits_{n<\omega} \mathbf{\Sigma}^0_n$;

(iii) *для любого бесконечного ординала* $\alpha < \omega_1$ *справедливо* $\mathcal{S}^0_\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$;

(iv) *для любого* $0 < n < \omega$ *справедливо* $\mathcal{S}^0_n \not\subseteq \mathbf{\Pi}^0_n$ *и* $\mathbf{\Pi}^0_n \not\subseteq \mathcal{S}^0_{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Случай $\alpha = 0$ тривиален. Пусть $\alpha = 1$. Любое базисное открытое множество $[\eta, \omega]$ ($\eta \in \mathrm{Fin}$) в $P\omega$ лежит в $\mathbf{\Delta}^0_1$, поэтому $\mathcal{S}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_1$. Пусть теперь $A \in \mathbf{\Delta}^0_1$, тогда $A = \{\xi \mid \sigma \sqsubseteq \xi\}$ для некоторого $\sigma \in 2^*$. Значит, A является разностью двух $\mathcal{S}^0_1$-множеств, откуда $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathcal{S}^0_2$. При $\alpha > 1$ доказательство проводится по индукции.

(ii), (iii) Требуемые утверждения вытекают из п. (i).

(iv) Сначала построим множества $A_n \in \mathcal{S}^0_n \setminus \mathbf{\Pi}^0_n$. Пусть

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \{\xi \mid \exists x_1 \forall x_2 \ldots (\xi\langle x_1, \ldots, x_{2n}\rangle = 0)\}, \\ A_{2n+1} &= \{\xi \mid \exists x_1 \forall x_2 \ldots (\xi\langle x_1, \ldots, x_{2n+1}\rangle = 1)\}, \end{aligned}$$

где $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ — биективное канторовское кодирование n-ок натуральных чисел. Из [11, лемма 2.10] следует, что A_n является W-полным в $\mathbf{\Sigma}^0_n$, поэтому $A_n \notin \mathbf{\Pi}^0_n$. Остается показать, что $A_n \in \mathcal{S}^0_n$. Имеем $A_1 = \{\xi \mid \xi \neq \varnothing\}$;

$$\overline{A}_2 = \bigcap_{x_1} Y_{x_1}, \text{ где } Y_{x_1} = \{\xi \mid \exists x_2(\langle x_1, x_2\rangle \in \xi)\},$$

$$A_3 = \bigcup_{x_1} \bigcap_{x_2} Y_{x_1 x_2}, \text{ где } Y_{x_1 x_2} = \{\xi \mid \exists x_3(\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in \xi)\},$$

и т. д. Поскольку множества $A_1, Y_{x_1}, Y_{x_1 x_2}, \ldots$ лежат в $\mathcal{S}^0_1$, справедливо

$$A_1 \in \mathcal{S}^0_1, \ \overline{A}_2 \in co(\mathcal{S}^0_2), \ A_3 \in \mathcal{S}^0_3, \ \ldots,$$

т. е. $A_n \in \mathcal{S}^0_n$ для всех n.

Остаётся найти множества $B_n \in \mathbf{\Pi}^0_n \setminus \mathcal{S}^0_{n+1}$. Пусть

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\xi \mid \forall x_1(\xi(x_1) = 1)\}, \\ \overline{B}_2 &= \{\xi \mid \exists x_1 \forall x_2(\xi\langle x_1, x_2\rangle = 1)\}, \\ B_3 &= \{\xi \mid \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3(\xi\langle x_1, x_2, x_3\rangle = 1)\}, \end{aligned}$$

и т. д. Как и выше, $B_n \in \mathbf{\Pi}^0_n$ и остаётся проверить соотношение $B_n \notin \mathbb{S}^0_{n+1}$. По предложению 2.3(i) достаточно показать, что $d_{B_n}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Pi}^0_{n+1}$. Имеем

$$B_1 = \{\omega\},\ \overline{B}_2 = \bigcup_{x_1} Z_{x_1},\ B_3 = \bigcap_{x_1}\bigcup_{x_2} Z_{x_1 x_2},\ \ldots,$$

где

$$Z_{x_1} = \{\xi \mid \{x_1\} \times \omega \subseteq \xi\},\ Z_{x_1 x_2} = \{\xi \mid \{x_1\} \times \{x_2\} \times \omega \subseteq \xi\},\ \ldots$$

и

$$X_1 \times \ldots \times X_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

По лемме 1.3(iii),

$$\begin{array}{lcl} d_{B_1}(\{A_i\}) & = & \bigcap\limits_{x_1} A_{x_1}, \\ d_{Z_{x_1}}(\{A_i\}) & = & \bigcap\limits_{x_2} A_{\langle x_1, x_2\rangle}, \\ d_{Z_{x_1 x_2}}(\{A_i\}) & = & \bigcap\limits_{x_3} A_{\langle x_1, x_2, x_3\rangle},\ \ldots. \end{array}$$

По лемме 1.3(iv),

$$\begin{array}{lcl} d_{B_1}(\{A_i\}) & = & \bigcap\limits_{x_1} A_{x_1}, \\ d_{\overline{B}_2}(\{A_i\}) & = & \bigcup\limits_{x_1}\bigcap\limits_{x_2} A_{\langle x_1, x_2\rangle}, \\ d_{B_3}(\{A_i\}) & = & \bigcap\limits_{x_1}\bigcup\limits_{x_2}\bigcap\limits_{x_3} A_{\langle x_1, x_2, x_3\rangle},\ \ldots. \end{array}$$

Из определения классов $\mathbf{\Pi}^0_2, \mathbf{\Sigma}^0_3, \ldots$ вытекает, что

$$d_{B_1}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Pi}^0_2,\ d_{\overline{B}_2}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Sigma}^0_3,\ d_{B_3}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Pi}^0_4\ \ldots.$$

Итак, $d_{B_n}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Pi}^0_{n+1}$ для всех n. Это завершает доказательство предложения.

Напомним (используя альтернативную терминологию из [8]) некоторые понятия из [7], имеющие отношение к классу $\tilde{\mathbb{S}}^0_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Множество $A \subseteq 2^\omega$ называется (*слабо*) *аппроксимируемым*, если для любого $\xi \in A$ найдётся конечное множество $\eta \subseteq \xi$ с условием $[\eta, \xi] \subseteq A$ (соответственно, $[\eta, \xi] \cap \mathrm{Fin} \subseteq A$).

Полезное описание класса $\tilde{\mathbb{S}}^0_2$ (оно затем было обобщено в [8]) даёт

ТЕОРЕМА 2.6 [7]. *Равносильны следующие условия:*

$A \in \tilde{\mathcal{S}}^0_2$;

множества A *и* $\overline{A}$ *аппроксимируемы;*

множества A *и* $\overline{A}$ *слабо аппроксимируемы.*

Множество $A \subseteq 2^\omega$ называется *замкнутым относительно цепей конечных элементов* [7], если для любой возрастающей цепи $\eta_0 \subseteq \eta_1 \subseteq \ldots$ конечных множеств из A объединение $\bigcup\limits_i \eta_i$ принадлежит A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7 [7]. *Множество* $A \subseteq 2^\omega$ *слабо аппроксимируемо тогда и только тогда, когда* $\overline{A}$ *замкнуто относительно цепей конечных элементов.*

§ 3. Разностная иерархия в $P\omega$

В этом параграфе приводятся факты о разностной иерархии в $P\omega$, большинство из которых являются частными случаями результатов из [8].

Сначала напомним определение разностных операций Хаусдорфа. Ординал α называется *нечётным*, если $\alpha = 2\beta + 1$ для некоторого ординала β; ординалы, не являющиеся нечётными, называют *чётными*. Пусть $r(\alpha) = 0$, если ординал α чётный, $r(\alpha) = 1$ в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. (i) Для любого ординала α определим операцию D_α, сопоставляющую последовательности множеств вида $\{A_\beta\}_{\beta<\alpha}$ множество

$$D_\alpha(\{A_\beta\}_{\beta<\alpha}) = \bigcup \left\{ A_\beta \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma \,\middle|\, \beta < \alpha,\ r(\beta) \neq r(\alpha) \right\}.$$

(ii) Для любых ординала α и класса множеств $\mathcal{A}$ через $D_\alpha(\mathcal{A})$ обозначается класс всех множеств $D_\alpha(\{A_\beta\}_{\beta<\alpha})$, где $A_\beta \in \mathcal{A}$ при всех $\beta < \alpha$.

Если класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно счётных объединений (как, например, классы $\mathcal{S}^0_\alpha$), то класс $D_\alpha(\mathcal{A})$ совпадает с классом всех множеств $D_\alpha(\{A_\beta\}_{\beta<\alpha})$, где $A_\beta \in \mathcal{A}$ для всех $\beta < \alpha$, $A_\beta \subseteq A_\gamma$ для $\beta < \gamma < \alpha$.

Определим разностную иерархию Хаусдорфа в $P\omega$ (см. также [7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. (i) Для любого $0 < \beta < \omega_1$ последовательность $\{D_\alpha(\mathbb{S}^0_\beta)\}_{\alpha<\omega_1}$ называют *разностной иерархией над* $\mathbb{S}^0_\beta$.

(ii) Разностную иерархию над $\mathbb{S}^0_1$ называют просто *разностной иерархией* и обозначают $\{\mathbb{S}^{-1}_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$.

Как и в § 2, обозначим $\tilde{\mathbb{S}}^{-1}_\alpha = \mathbb{S}^{-1}_\alpha \cap co(\mathbb{S}^{-1}_\alpha)$. Для случая польских пространств хорошо известно (сразу вытекает из определений) следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. (i) *Для всех* $\alpha < \gamma < \omega_1$ *и* $0 < \beta < \omega_1$ *выполняется* $D_\alpha(\mathbb{S}^0_\beta) \cup co(D_\alpha(\mathbb{S}^0_\beta)) \subseteq D_\gamma(\mathbb{S}^0_\beta)$. *В частности,* $\mathbb{S}^{-1}_\alpha \subseteq \tilde{\mathbb{S}}^{-1}_\gamma$.

(ii) *Для любого* $0 < \beta < \omega_1$ *выполняется* $\bigcup\{D_\alpha(\mathbb{S}^0_\beta) \mid \alpha < \omega_1\} \subseteq \tilde{\mathbb{S}}^0_{\beta+1}$. *В частности,* $\bigcup\{\mathbb{S}^{-1}_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} \subseteq \tilde{\mathbb{S}}^0_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведённые выше результаты о разностной иерархии справедливы в произвольном топологическом пространстве. Результаты, приводимые далее, являются более специальными.

Следующее непосредственное следствие предложения 2.3 связывает разностную иерархию в $P\omega$ с рассматриваемой проблемой.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Для всех* $\alpha < \omega_1$ *и* $0 < \beta < \omega_1$ *из* $X \in D_\alpha(\mathbb{S}^0_\beta)$ *следует* $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq D_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$. *В частности,* $X \in \mathbb{S}^{-1}_\alpha$ *влечёт* $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha$.

Из предложения 2.4 сразу вытекает следующее соотношение между разностными иерархиями в 2^ω и $P\omega$. Через $\mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha$ ($\alpha < \omega_1$) обозначаются уровни разностной иерархии Хаусдорфа в канторовском пространстве. В [3] установлено, что иерархия Хаусдорфа является начальным сегментом иерархии Вэджа, т. е. $\mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha = \mathbf{\Sigma}_\alpha$ для любого $\alpha < \omega_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. (i) *Для всех* $\alpha < \omega_1$ *и* $0 < \beta < \omega_1$ *справедливо* $D_\alpha(\mathbb{S}^0_\beta) \subseteq D_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$. *В частности,* $\mathbb{S}^{-1}_\alpha \subseteq \mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha$.

(ii) *Для всех* $\alpha < \omega_1$ *и* $\omega \leqslant \beta < \omega_1$ *справедливо* $D_\alpha(\mathbb{S}^0_\beta) = D_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$.

Напомним характеризацию уровней разностной иерархии в терминах деревьев [8]. Пусть ω^* — множество всех цепочек натуральных чисел. Под *деревом* понимается любое непустое множество $T \subseteq \omega^*$, замкнутое вниз относительно $\sqsubseteq$. Для дерева T и цепочки $\tau \in T$ через $T(\tau)$ обозначается дерево $\{\sigma \mid \tau^\frown\sigma \in T\}$. *Путём* через дерево T называется функция $f : \omega \to \omega$ такая, что цепочка $(f(0), \dots, f(n-1))$ принадлежит T для любого

$n < \omega$. Максимальные элементы в $(T; \sqsubseteq)$ называют *листьями* дерева T. Множество всех листьев T обозначим $\mathrm{leaf}(T)$.

Дерево T называется *фундированным*, если частичный порядок $(T; \sqsupseteq)$ фундирован, т. е. нет пути через дерево T. Как и для любого фундированного частичного порядка, существует каноническая функция ранга rk_T из фундированного дерева T в ординалы, определяемая с помощью равенства

$$rk_T(\tau) = \sup\{rk_T(\sigma) + 1 \mid \sigma \in T \wedge \tau \sqsubset \sigma\}.$$

Ранг $rk(T)$ фундированного дерева T есть по определению ординал $rk_T(\varnothing)$. Хорошо известно, что ранг любого фундированного дерева счётен, а произвольный счётный ординал является рангом подходящего фундированного дерева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6 [8]. Пусть $A \subseteq P\omega$. *Альтернирующим деревом* для A называется монотонная функция $f : T \to \mathrm{Fin}$ из дерева T в класс конечных множеств такая, что $f(\sigma) \in A$ тогда и только тогда, когда $f(\sigma^\frown n) \notin A$ для любого $\sigma^\frown n \in T$. *Ранг* f — это ранг дерева T (при условии, что оно фундировано). Альтернирующее дерево f называется *1-альтернирующим* (*0-альтернирующим*), если $f(\varnothing) \in A$ (соответственно, $f(\varnothing) \notin A$).

В [8] установлен следующий простой факт: если $f : T \to \mathrm{Fin}$ — альтернирующее дерево для A ранга α, то для любых $\beta < \alpha$ и $k < 2$ найдётся k-альтернирующее дерево $g : S \to \mathrm{Fin}$ для A ранга β с условием $f(\varnothing) \leq g(\varnothing)$. Отсюда индукцией по α легко выводится следующая

ЛЕММА 3.7. *Пусть $f : T \to \mathrm{Fin}$ — k-альтернирующее дерево для A ранга α ($k < 2$, $\alpha < \omega_1$), S — дерево ранга α. Тогда существует k-альтернирующее дерево для A вида $g : S \to \mathrm{Fin}$.*

Значит, в определении 3.6 на самом деле существен только ранг альтернирующего дерева.

Альтернирующие деревья с разностной иерархией связывает

ТЕОРЕМА 3.8 [8]. *Для всех $\alpha < \omega_1$ и $A \subseteq P\omega$ включение $A \in \mathbb{S}_\alpha^{-1}$ верно тогда и только тогда, когда $A \in \tilde{\mathbb{S}}_2^0$ и нет 1-альтернирующего* *дерева для A ранга α.*

Из последней теоремы и леммы 3.7 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.9. *Пусть $\alpha < \omega_1$, T — дерево ранга α, $A \subseteq 2^\omega$. Включение $A \in \mathcal{S}^{-1}_\alpha$ верно тогда и только тогда, когда $A \in \tilde{\mathcal{S}}^0_2$ и нет 1-альтернирующего дерева для A вида $f : T \to \mathrm{Fin}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 3.7 и следствие 3.9 справедливы для произвольного φ-пространства [8].

Основные свойства разностной иерархии в $P\omega$ устанавливает

ТЕОРЕМА 3.10 [8]**.** *Для пространства $P\omega$ справедливо следующее*:

(i) $\bigcup\{\mathcal{S}^{-1}_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} = \tilde{\mathcal{S}}^0_2$;

(ii) *для любого $\alpha < \omega_1$ верно* $\bigcup\{\mathcal{S}^{-1}_\beta \cup co(\mathcal{S}^{-1}_\beta) \mid \beta < \alpha\} = \tilde{\mathcal{S}}^{-1}_\alpha$;

(iii) *для любого $\alpha < \omega_1$ верно* $\mathcal{S}^{-1}_\alpha \neq co(\mathcal{S}^{-1}_\alpha)$.

Если $A \in \mathcal{S}^{-1}_\alpha \setminus co(\mathcal{S}^{-1}_\alpha)$, то A назовём *собственным $\mathcal{S}^{-1}_\alpha$-множеством.* Рассмотрим вопрос, в каких случаях такие множества могут содержать $\varnothing$ или ω в качестве элементов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. (i) *Для любого $\alpha < \omega_1$, если A является собственным $\mathcal{S}^{-1}_\alpha$-множеством, то $\varnothing \notin A$.*

(ii) *Для любых $n < \omega$ и собственного $\mathcal{S}^{-1}_n$-множества A включение $\omega \in A$ верно тогда и только тогда, когда n нечётно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть A — собственное $\mathcal{S}^{-1}_\alpha$-множество, $\{A_\beta\}_{\beta<\alpha}$ — монотонная последовательность $\mathcal{S}^0_1$-множеств с условием $A = D_\alpha(\{A_\beta\})$. Предположим, что $\varnothing \in A$. Тогда $\varnothing \in A_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$, поэтому $A_\beta = 2^\omega$. Легко проверить, что $A \in co(\mathcal{S}^{-1}_{\beta+1}) \subseteq co(\mathcal{S}^{-1}_\alpha)$, противоречие.

(ii) Пусть $n = 2k+1$ нечётно, тогда $A = A_0 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup (A_{2k} \setminus A_{2k-1})$ для некоторых $\mathcal{S}^0_1$-множеств $A_0 \subseteq \ldots \subseteq A_{2k}$. Если $\omega \notin A_0$, то $A_0 = \varnothing$ и $A \in \mathcal{S}^{-1}_{2k}$, противоречие. Итак, $\omega \in A_0 \subseteq A$.

Пусть теперь $n = 2k + 2$ чётно (случай $n = 0$ тривиален, поскольку $\mathcal{S}^{-1}_0 = \{\varnothing\}$). Тогда $A = (A_1 \setminus A_0) \cup \ldots \cup (A_{2k+1} \setminus A_{2k})$ для подходящих $\mathcal{S}^0_1$-множеств $A_0 \subseteq \ldots \subseteq A_{2k+1}$. Необходимо показать, что $\omega \notin A$. Предположим противное, тогда $\omega \in (A_{2i+1} \setminus A_{2i})$ для некоторого $i \leqslant k$. Отсюда

$A_{2i} = \varnothing$ и $A \in co(\mathcal{S}^{-1}_n)$, это противоречие завершает доказательство предложения.

Предложение 3.11 оставляет открытым вопрос о том, может ли собственное $\mathcal{S}^{-1}_\alpha$-множество для ординала $\alpha \geqslant \omega$ содержать ω. Покажем, что в этом случае реализуются обе возможности. Сначала установим два вспомогательных факта.

Зафиксируем отображение $e : \omega^* \to \mathrm{Fin}$, являющееся изоморфным вложением из $(\omega^*; \sqcap, \varnothing)$ в $(\mathrm{Fin}; \cap, \varnothing)$. Здесь через $\sqcap$ обозначается операция инфимума в $(\omega^*; \sqsubseteq)$. Ясно, что такое отображение существует и является вложением $(\omega^*; \sqsubseteq)$ в $(\mathrm{Fin}; \subseteq)$, причём $e(\sigma)$ содержит в точности $lh(\sigma)$ элементов для любого $\sigma \in \omega^*$.

ЛЕММА 3.12. *Если $e(\sigma) \subset \xi \subseteq e(\tau_i)$ для любого $i < 2$, то $\tau_0(l) = \tau_1(l)$, где $l = lh(\sigma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $e(\sigma) \subset \xi \subseteq e(\tau_0) \cap e(\tau_1)$, получаем $\sigma \sqsubset \tau_0 \sqcap \tau_1$. Следовательно, $\tau_0(l) = \tau_1(l)$.

Произвольному дереву T поставим в соответствие множество $B(T) = \{\xi \mid \neg\exists \tau \in T \,|\, \xi \subseteq e(\tau)\}$.

ЛЕММА 3.13. *Для любого фундированного дерева T множество $B(T)$ лежит в $\mathcal{S}^0_1$, а множества $e(T)$ и $B(T)$ не пересекаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе утверждение очевидно, поэтому рассмотрим только первое. Множество $B(T)$ замкнуто вверх по включению, и остаётся проверить, что для любого $\xi \in B(T)$ найдётся конечное множество $\eta \subseteq \xi$ с условием $\eta \in B(T)$. Сначала проверим утверждение:

(a) для любого $\xi \in 2^\omega$ либо $\xi \not\subseteq \bigcup e(T)$, либо найдутся $\sqsubseteq$-несравнимые $\sigma, \tau \in \mathrm{leaf}(T)$ такие, что ξ пересекается с обоими множествами $e(\sigma), e(\tau)$.

Предположим противное: $\xi \subseteq \bigcup e(T)$ и $e(\tau) \cap \xi \neq \varnothing$ самое большее для одного $\tau \in \mathrm{leaf}(T)$. Можем предполагать, что $e(\tau) \cap \xi \neq \varnothing$ для единственного $\tau \in T$, поскольку в противном случае $\xi = \varnothing$ и существование η очевидно. Тогда $\xi \subseteq e(\tau)$, откуда $\xi \notin B(T)$, противоречие.

Пусть теперь η — конечное подмножество ξ, удовлетворяющее (a) (можно найти даже такое η с не более чем двумя элементами). Тогда $\eta \in$

$\in B(T)$, и лемма доказана.

Определим для любого бесконечного ординала $\alpha < \omega_1$ множества Y_α и Z_α следующим образом:

$$Y_\alpha = e(T^1_\alpha); \quad Z_\alpha = e(T^1_\alpha) \cup B(T_\alpha),$$

где T_α — фиксированное дерево ранга α, T^1_α — множество цепочек из T_α нечётной длины.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. *Для любого бесконечного ординала* $\alpha < < \omega_1$ *множества* Y_α *и* Z_α *являются собственными* $\mathcal{S}^{-1}_\alpha$*-множествами, удовлетворяющими* $\omega \notin Y_\alpha$, $\omega \in Z_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два последних утверждения тривиальны, поэтому проверим только, что множества являются собственными $\mathcal{S}^{-1}_\alpha$-множествами. Из фундированности T_α и леммы 3.13 следует, что $Y_\alpha, Z_\alpha \in \in \tilde{\mathcal{S}}^0_2$. Ограничение e на множество T_α является 0-альтернирующим деревом как для Y_α, так и для Z_α. По следствию 3.9, Y_α и Z_α не принадлежат $co(\mathcal{S}^{-1}_\alpha)$.

Остаётся показать, что Y_α и Z_α принадлежат $\mathcal{S}^{-1}_\alpha$, т. е. найти монотонные последовательности $\{A_\beta\}_{\beta<\alpha}$ и $\{C_\beta\}_{\beta<\alpha}$ такие, что $Y_\alpha = D_\alpha(\{A_\beta\})$ и $Z_\alpha = D_\alpha(\{C_\beta\})$. Предположим, что α чётно (случай нечётного ординала рассматривается аналогично). Если $\beta < \alpha$ нечётно, полагаем

$$A_\beta = B(T_\alpha) \cup \left(\bigcup \{[e(\tau), \omega] \mid \tau \in T^1_\alpha \wedge rk(\tau) \leqslant \beta\}\right),$$

в противном случае

$$A_\beta = B(T_\alpha) \cup \left(\bigcup \{(e(\tau), \omega] \mid \tau \in T^1_\alpha \wedge rk(\tau) \leqslant \beta + 1\}\right).$$

Легко проверить, что $\{A_\beta\}$ монотонна и

$$Y_\alpha = \bigcup \{A_{\beta+1} \setminus A_\beta \mid \beta < \alpha, \ \beta \text{ чётно}\} = D_\alpha(\{A_\beta\}),$$

что и требовалось.

Пусть $C_\varnothing = \varnothing$, $C_1 = B(T_\alpha)$ и $C_{2+\beta} = A_\beta \cup B(T_\alpha)$ для $\beta < \alpha$. Тогда последовательность $\{C_\beta\}$ имеет требуемые свойства (напомним, что α бесконечно). Предложение доказано.

§ 4. Сводимость Вэджа в $P\omega$

В этом параграфе устанавливаются некоторые факты о сводимости Вэджа $\leq_S$ в пространстве $P\omega$, определяемой следующим образом. Для $A, B \subseteq P\omega$ выражение $A \leq_S B$ означает, что $A = f^{-1}(B)$ для подходящей непрерывной функции $f : P\omega \to P\omega$. Справедлива следующая очевидная

ЛЕММА 4.1. *Для всех $\alpha, \beta < \omega_1$, $\beta > 0$ классы $\mathbb{S}^0_\alpha$, $D_\alpha(\mathbb{S}^0_\beta)$ (и даже класс $d_X(\mathbb{S}^0_\beta)$ для любого $X \subseteq 2^\omega$) замкнуты вниз относительно $\leq_S$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение сводимости Вэджа и лемма 4.1 применимы к любому топологическому пространству. Сосредоточим внимание на результатах, относящихся собственно к пространству $P\omega$. Следующий факт имеет отношение к слабо аппроксимируемым множествам из § 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Множество $\{\omega\}$ является $\leq_S$-наименьшим элементом в классе всех не слабо аппроксимируемых множеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\{\omega\}$ не является слабо аппроксимируемым. Остаётся показать, что $\{\omega\} \leq_S X$ для любого множества X, не являющегося слабо аппроксимируемым. По предложению 2.7 найдутся множество $\xi \in X$ и последовательность $\zeta_0 \subseteq \zeta_1 \subseteq \dots$ конечных множеств из $\overline{X}$ такие, что $\bigcup\limits_n \zeta_n = \xi$. Определим функцию $f : P\omega \to P\omega$ как

$$f(\eta) = \bigcup\{\zeta_n \mid \forall x < n (x \in \eta)\}.$$

Тогда f непрерывна, $f(\eta) = \xi \in X$ для $\eta = \omega$, $f(\eta) = \zeta_n \notin X$ для $\eta \neq \omega$, где n — наименьший элемент в $\omega \setminus \eta$. Поэтому $\{\omega\} \leq_S X$, что завершает доказательство.

Теперь получим некоторую информацию об S-степенях в классе $\tilde{\mathbb{S}}^0_2$. В формулировке используются обозначения и множества Y_α, Z_α из предложения 3.14.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. (i) *Для любого $n < \omega$ любое $\mathbb{S}^{-1}_n$-множество S-сводится к любому множеству из $\tilde{\mathbb{S}}^0_2 \setminus co(\mathbb{S}^{-1}_n)$.*

(ii) *Для любых бесконечного ординала $\alpha < \omega_1$ и $X \in \tilde{\mathbb{S}}^0_2 \setminus co(\mathbb{S}^{-1}_\alpha)$ из $\omega \notin X$ следует $Y_\alpha \leq_S X$, а из $\omega \in X$ следует $Z_\alpha \leq_S X$.*

(iii) *Для всех бесконечных ординалов* $\alpha, \beta < \omega_1$ *множества* Y_α *и* Z_β S*-несравнимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $A \in \mathcal{S}_n^{-1}$, $B \in \tilde{\mathcal{S}}_2^0 \setminus co(\mathcal{S}_n^{-1})$. Рассмотрим только случай, когда $n = 2k + 2$ чётно (оставшийся случай рассматривается аналогично). Пусть $A_0 \subseteq \ldots \subseteq A_{2k+1}$ — $\mathcal{S}_1^0$-множества, удовлетворяющие равенству $A = (A_1 \setminus A_0) \cup \ldots \cup (A_{2k+1} \setminus A_{2k})$. По теореме 3.8 найдётся 0-альтернирующее дерево для B ранга n. Поэтому найдутся конечные множества $\eta_0 \supseteq \ldots \supseteq \eta_n$ такие, что $\eta_{2i} \notin B$ и $\eta_{2i+1} \in B$ для всех $i \leqslant k$.

Определим функцию $f : P\omega \to P\omega$ следующим образом. Если $\xi \notin A_{2k+1}$, то $f(\xi) = \eta_{2k+2}$, в противном случае полагаем $f(\xi) = \eta_i$, где i — наименьшее число со свойством $\xi \in A_i$. Тогда f непрерывна и $A = f^{-1}(B)$, откуда $A \leq_S B$.

(ii) Проверим, что $\omega \notin X$ влечет $Y_\alpha \leq_S X$ (второе утверждение проверяется аналогично). По следствию 3.9 найдется 0-альтернирующее дерево $h : T_\alpha \to \mathrm{Fin}$ для X.

Определим функцию $f : P\omega \to P\omega$ следующим образом. Если $\xi \in B(T_\alpha)$, полагаем $f(\xi) = \omega$. Предположим, что $\xi \notin B(T_\alpha)$, т. е. $\xi \subseteq e(\tau)$ для некоторого $\tau \in T_\alpha$. Если $e(n) \not\subseteq \xi$ для всех $n \in T_\alpha$, $n < \omega$, полагаем $f(\xi) = h(\varnothing)$. Пусть $e(n) \subseteq \xi$ для некоторого $n \in T_\alpha$, σ — элемент T_α^1 максимальной длины, удовлетворяющий $e(\sigma) \subseteq \xi$. Поскольку $\xi \notin B(T_\alpha)$, цепочка σ определена однозначно. Если $\xi = e(\sigma)$, полагаем $f(\xi) = h(\sigma)$. Наконец, пусть $e(\sigma) \subset \xi$. По лемме 3.13 найдётся единственное $n < \omega$ с условием $\sigma^\frown n \sqsubseteq \tau$. Полагаем $f(\xi) = h(\sigma^\frown n)$.

Ясно, что f непрерывна и $Y_\alpha = f^{-1}(X)$, поэтому $Y_\alpha \leq_S X$.

(iii) Проверим, что $Y_\alpha \not\leq_S Z_\beta$ (соотношение $Z_\beta \not\leq_S Y_\alpha$ проверяется аналогично). Пусть, напротив, $Y_\alpha = f^{-1}(Z_\beta)$ для некоторой непрерывной функции f на $P\omega$. Поскольку $\omega \notin Y_\alpha$, имеем $f(\omega) \notin Z_\beta$. Из того, что $B(T_\beta) \subseteq Z_\beta$, следует $f(\omega) \notin B(T_\beta)$, т. е. $f(\omega) \subseteq e(\tau)$ для некоторого $\tau \in T_\beta$.

Последовательность $(e(\varnothing), \ldots, e(\tau))$ является 0-альтернирующей цепью для Z_β длины $lh(\tau)$. Поскольку $\alpha \geqslant \omega$, найдётся $\sigma \in T_\alpha$ с условием $lh(\sigma) > lh(\tau)$. Последовательность $(e(\varnothing), \ldots, e(\sigma))$ является 0-альтернирующей цепью для Y_α длины $lh(\sigma)$. Монотонность f влечёт, что последовательность $(f(e(\varnothing)),\dots,f(e(\sigma)))$ является 0-альтернирующей цепью для Z_β с условием $f(e(\sigma))\subseteq f(\omega)\subseteq e(\tau)$. Поскольку $e(\tau)$ имеет точно $lh(\tau)$ элементов, получаем противоречие. Предложение доказано.

Отсюда сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.4. (i) *Для любого $n<\omega$ класс собственных $\mathbb{S}_n^{-1}$-множеств образует S-степень.*

(ii) *Для любого бесконечного ординала $\alpha<\omega_1$ класс собственных $\mathbb{S}_\alpha^{-1}$-множеств содержит две несравнимые S-степени.*

До этого множество Y_α определялось только для бесконечных счётных ординалов α. Продолжим эту последовательность на натуральные числа, выбирая в качестве Y_n $(n<\omega)$ любое фиксированное собственное $\mathbb{S}_n^{-1}$-множество. Из предложений 4.3 и 3.14 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.5. (i) *Для любого $n<\omega$ верно $Y_n<_S Y_{n+1}$ и $Y_n<_S$ $<_S\overline{Y}_{n+1}$.*

(ii) *Для всех $n<\omega$ и $\omega\leqslant\alpha<\omega_1$ верно $Y_n<_S Y_\alpha$, $Y_n<_S\overline{Y}_\alpha$, $Y_n<_S Z_\alpha$ и $Y_n<_S\overline{Z}_\alpha$.*

(iii) *Для всех бесконечных ординалов $\alpha<\beta<\omega_1$ верно $Y_\alpha<_S Y_\beta$, $Y_\alpha<_S\overline{Z}_\beta$, $Z_\alpha<_S\overline{Y}_\beta$ и $Z_\alpha<_S Z_\beta$.*

ЗАМЕЧАНИЯ. В этом параграфе приведены только факты об отношении $\leq_S$, касающиеся основной темы данной статьи. Структура $(P(P\omega);\leq_S)$ имеет и другие интересные свойства. Например, из теоремы о неподвижной точке для пространства $P\omega$ следует, что $A\not\leq_S\overline{A}$ для любого A. Следствие 4.5(iii) показывает, что существуют четыре попарно несравнимых множества (например, множества $Y_\alpha,\overline{Y}_\alpha,Z_\alpha,\overline{Z}_\alpha$ для бесконечного $\alpha<\omega_1$). В §6 будет показано, что любой класс из леммы 4.1 содержит S-полное множество, поэтому классы из следствия 4.4(ii) на самом деле содержат не менее трёх S-степеней.

§ 5. Основные результаты

Применим установленные в предыдущих параграфах факты к изучению основной проблемы данной статьи. Сначала рассмотрим её для некоторых точечных классов, связанных с высокими уровнями борелевской иерархии.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $\alpha < \omega_1$, $\omega \leqslant \beta < \omega_1$ и $X \subseteq 2^\omega$. Имеют место следующие утверждения:*

(i) $X \in \mathbf{B}$ *тогда и только тогда, когда* $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{B}$;

(ii) $X \in \mathbf{\Sigma}^0_\beta$ *тогда и только тогда, когда* $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\beta$;

(iii) $X \in \bigcup\limits_{k<\omega} \mathbf{\Sigma}^0_k$ *тогда и только тогда, когда* $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \bigcup\limits_{k<\omega} \mathbf{\Sigma}^0_k$;

(iv) *для любого ω_1-терма t соотношение $X \in t(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq t(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$; в частности, $X \in D_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$ тогда и только тогда, когда $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq D_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $X \in \mathbf{B}$. Тогда $X \in \mathbf{\Sigma}^0_\gamma$ для некоторого $\gamma \geqslant \omega$. По предложению 2.4, $X \in \mathcal{S}^0_\gamma$. По предложению 2.3(i), $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\gamma \subseteq \mathbf{B}$. Обратная импликация следует из соотношения $X \in d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, вытекающего из леммы 1.3(ii).

Остальные утверждения проверяются простыми рассуждениями (следует воспользоваться предлож. 2.3, 2.4, 3.4 и 3.5). Теорема доказана.

Из структуры иерархии Вэджа легко получить характеризации некоторых утверждений вида $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathcal{C}$ из рассмотренных выше утверждений вида $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathcal{C}$. Например, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Для всех $\alpha < \omega_1$ и $\omega \leqslant \beta < \omega_1$ включение $X \in D_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta) \setminus co(D_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta))$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо равенство $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) = D_\alpha(\mathbf{\Sigma}^0_\beta)$.*

Свяжем предпорядок $\leq_S$ из предыдущего параграфа с ω-местными булевыми операциями.

ТЕОРЕМА 5.3. *Для всех $X, Y \subseteq P\omega$ из $X \leq_S Y$ вытекает $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq d_Y(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f — непрерывная функция на $P\omega$ с условием $X = f^{-1}(Y)$. Требуется показать, что для любой последовательности $\{A_i\}$ $\mathbf{\Sigma}^0_1$-множеств найдётся последовательность $\{B_i\}$ $\mathbf{\Sigma}^0_1$-множеств такая, что $d_X(\{A_i\}) = d_Y(\{B_i\})$. Проверим, что последнее равенство вытекает из включений

$$c_\xi(\{A_i\}) \subseteq c_{f(\xi)}(\{B_i\}),\ \xi \in 2^\omega. \tag{1}$$

Включение $d_X(\{A_i\}) \subseteq d_Y(\{A_i\})$ следует из (1) очевидным образом. Для проверки обратного включения возьмём $\zeta \in d_Y(\{B_i\})$. Тогда $\zeta \in c_\eta(\{B_i\})$ для некоторого $\eta \in Y$. По лемме 1.3(i) включение $\zeta \in c_\xi(\{A_i\})$ выполняется для некоторого $\xi \in 2^\omega$. По (1), $\zeta \in c_{f(\xi)}(\{B_i\})$, откуда $c_{f(\xi)}(\{B_i\}) \cap$ $\cap\, c_\eta(\{B_i\}) \neq \varnothing$. По лемме 1.3(i), $f(\xi) = \eta \in Y$, поэтому $\xi \in X$ и $\zeta \in d_X(\{A_i\})$.

Определим последовательность $\{B_k\}$ точечных множеств следующим образом:

$$B_k = \{\zeta \mid \exists \eta \in \mathrm{Fin}(k \in f(\eta) \wedge \forall i \in \eta(\zeta \in A_i))\}.$$

Легко видеть, что $B_k \in \mathbf{\Sigma^0_1}$ для любого $k < \omega$. Для проверки соотношения (1) возьмём произвольное $\zeta \in c_\xi(\{A_i\})$, тогда

$$\forall i(\zeta \in A_i \leftrightarrow i \in \xi). \tag{2}$$

Достаточно показать, что $\zeta \in B_k \leftrightarrow k \in f(\xi)$ для любого $k \in \omega$. Если $\zeta \in$ $\in B_k$, то для некоторого конечного множества η имеем $k \in f(\eta)$ и $\forall i \in \eta(\zeta \in$ $\in A_i)$. Из последнего условия и из (2) следует $\eta \subseteq \xi$. Поэтому $f(\eta) \subseteq f(\xi)$ и $k \in f(\xi)$, что и требовалось.

Обратно, пусть $k \in f(\xi)$. Поскольку f непрерывна, $k \in f(\eta)$ для некоторого конечного множества $\eta \subseteq \xi$. Из (2) получаем $\forall i \in \eta(\zeta \in A_i)$. Итак, $\zeta \in B_k$, теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Структура несамодвойственных борелевских степеней Вэджа является гомоморфным образом структуры* $(\mathbf{B}; \leq_S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $X \in \mathbf{B}$ пусть $F(X)$ — полное по Вэджу множество в $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Согласно последней теореме $X \leq_S Y$ влечёт $F(X) \leq_W F(Y)$. По теореме Вэджа, упомянутой в § 1, для любого несамодвойственного борелевского множества Z найдётся X с условием $Z \equiv_W F(X)$. По теореме 5.1(i) верно $X \in \mathbf{B}$, следствие доказано.

Теперь дадим решение основной проблемы этой статьи для одного низкого уровня борелевской иерархии.

ТЕОРЕМА 5.5. *Для любого* $X \subseteq P\omega$ *включение* $X \in \tilde{\mathcal{S}}^0_2$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Delta}^0_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из предложения 2.3(i).

Достаточность. Пусть $X \notin \tilde{\mathcal{S}}^0_2$; надо показать, что $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \nsubseteq \mathbf{\Delta}^0_2$. По теореме 2.6 хотя бы одно из множеств $X, \overline{X}$ не является слабо аппроксимируемым. Достаточно рассмотреть случай, когда X не является слабо аппроксимируемым (второй случай двойствен к этому).

По предложению 4.2, $\{\omega\} \leq_S X$, по теореме 5.3 имеем $d_{\{\omega\}}(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Поскольку $d_{\{\omega\}} = c_\omega = \bigcap\limits_k v_k$, выполняется $d_{\{\omega\}}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Pi}^0_2$. Итак, $\mathbf{\Pi}^0_2 \subseteq d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, а следовательно, $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \nsubseteq \mathbf{\Delta}^0_2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. *Для любого* $X \subseteq P\omega$ *из* $X \notin \tilde{\mathcal{S}}^0_2$ *вытекает* $\mathbf{\Sigma}^0_2 \subseteq d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ *или* $\mathbf{\Pi}^0_2 \subseteq d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.

Наконец, рассмотрим основную проблему этой статьи для уровней $\mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha$ разностной иерархии Хаусдорфа в канторовском пространстве.

ТЕОРЕМА 5.7. *Для любого* $\alpha < \omega_1$ *включение* $X \in \mathcal{S}^{-1}_\alpha$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 3.4 достаточно показать, что $X \notin \mathcal{S}^{-1}_\alpha$ влечёт $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \nsubseteq \mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha$. Если $X \notin \tilde{\mathcal{S}}^0_2$, то, по следствию 5.6, $\mathbf{\Sigma}^0_2 \subseteq d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ или $\mathbf{\Pi}^0_2 \subseteq d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. В любом случае, $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \nsubseteq \mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha$.

Остаётся показать, что $X \in \tilde{\mathcal{S}}^0_2 \setminus \mathcal{S}^{-1}_\alpha$ влечёт $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \nsubseteq \mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha$ (далее верхний индекс -1 для простоты опускаем; это возможно, поскольку, как отмечалось выше, $\mathbf{\Sigma}^{-1}_\alpha = \mathbf{\Sigma}_\alpha$). Проверим эквивалентное двойственное утверждение о том, что $X \in \tilde{\mathcal{S}}^0_2 \setminus co(\mathcal{S}^{-1}_\alpha)$ влечёт $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \nsubseteq \mathbf{\Pi}_\alpha$. По теореме 5.3 и предложению 4.3 достаточно проверить, что $d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1) \nsubseteq \mathbf{\Pi}_\alpha$ для любого $\alpha < \omega$ и $d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1) \nsubseteq \mathbf{\Pi}_\alpha$, $d_{Z_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1) \nsubseteq \mathbf{\Pi}_\alpha$ для любого бесконечного $\alpha < \omega_1$. По предложению 3.14 и следствию 4.4 последние утверждения эквивалентны соответственно тому, что $d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Sigma}_\alpha$ для любого $\alpha < \omega$ и $d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = d_{Z_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Sigma}_\alpha$ для любого бесконечного $\alpha < \omega_1$.

Проверим последние равенства по индукции. При $\alpha = 0$ они очевидны, поскольку $d_\varnothing(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \{\varnothing\} = \mathbf{\Sigma}_0$.

Пусть $\alpha = n+1 < \omega$ и утверждение верно для n. Тогда по теореме 5.3 и по индукционному предположению

$$\mathbf{\Sigma}_n = d_{Y_n}(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1) \text{ и } \mathbf{\Pi}_n = d_{\overline{Y}_n}(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1).$$

Поэтому $\mathbf{\Sigma}_n \cup \mathbf{\Pi}_n \subseteq d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ и, следовательно, $\mathbf{\Sigma}_\alpha \subseteq d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ или $\mathbf{\Pi}_\alpha \subseteq$ $\subseteq d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. По следствию 3.4, $d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}_\alpha$, откуда $\mathbf{\Sigma}_\alpha = d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.

Пусть $\alpha = \omega$. По индукционному предположению, следствию 4.5 и теореме 5.3 имеем $\mathbf{\Sigma}_n \cup \mathbf{\Pi}_n \subseteq d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ для любого $n < \omega$. Тогда $\mathbf{\Sigma}_\alpha \subseteq$ $\subseteq d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ или $\mathbf{\Pi}_\alpha \subseteq d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, и применимо рассуждение из предыдущего абзаца. Это же рассуждение используется для множества Z_α.

Наконец, пусть $\alpha > \omega$. По индукции для любого бесконечного $\beta < \alpha$ справедливы равенства $\mathbf{\Sigma}_\beta = d_{Y_\beta}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ и $\mathbf{\Sigma}_\beta = d_{Z_\beta}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. По следствию 4.5 и теореме 5.3 для любого $\beta < \alpha$ имеем $\mathbf{\Sigma}_\beta \cup \mathbf{\Pi}_\beta \subseteq d_{Y_\alpha}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Опять можно повторить предыдущее рассуждение. Теорема доказана.

Напомним, что, согласно результату из [3] верно $\mathbf{\Sigma}_{\omega_1} = \mathbf{\Sigma}^0_2$. Из следствия 5.6 и теоремы 5.7 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.8. *Для любого $X \subseteq P\omega$, либо $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ совпадает с одним из классов $\mathbf{\Sigma}_\alpha, \mathbf{\Pi}_\alpha$ $(\alpha < \omega)$, либо имеет место хотя бы одно из включений $\mathbf{\Sigma}^0_2 \subseteq d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, $\mathbf{\Pi}^0_2 \subseteq d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$.*

§ 6. Заключительные замечания

Основная проблема этой статьи остаётся открытой для многих уровней иерархии Вэджа и даже иерархии Бореля. Из теорем 5.1 и 5.7 получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Пусть $\alpha = 1$ или $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$. Включение $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ верно в том и только том случае, когда $X \in \mathcal{S}^0_\alpha$.*

Для всех остальных уровней $\mathbf{\Sigma}^0_n$ иерархии Бореля, $2 \leqslant n < \omega$, проблема остаётся открытой, хотя справедливо

СЛЕДСТВИЕ 6.2. *Для любого $2 \leqslant n < \omega$ верно $\mathcal{S}^0_n \subseteq \{X \mid d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_n\} \subset \mathbf{\Sigma}^0_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\mathcal{S}^0_n \subseteq \{X \mid d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_n\}$ вытекает из предложения 2.3(i). Включение $\{X \mid d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_n\} \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_n$ вытекает из леммы 1.3(ii). Неравенство $\{X \mid d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_n\} \neq \mathbf{\Sigma}^0_n$ вытекает из предложения 2.4(iv), поскольку для множества B_n из доказательства этого предложения выполняются свойства $\overline{B}_n \in \mathbf{\Sigma}^0_n$ и $d_{\overline{B}_n}(\mathbf{\Sigma}^0_1) = \mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$. Это завершает доказательство.

Предположительно, следствие 6.1 справедливо также для уровней $\mathbf{\Sigma}^0_n$, $2 \leqslant n < \omega$. Если это действительно имеет место, можно надеяться получить полное решение проблемы для всех уровней иерархии Вэджа.

Выше основное внимание уделялось классам $d_X(\mathbf{\Sigma}^0_1)$, поскольку такие классы интенсивно изучались в классической дескриптивной теории множеств. Классы $d_X(\mathcal{C})$ для некоторых других естественных точечных классов $\mathcal{C}$ также могут представлять интерес. Примером является теорема 1.4. Дадим описание классов $d_X(\mathcal{S}^0_1)$, в некотором смысле аналогичное этой теореме.

ТЕОРЕМА 6.3. *Для любого $X \subseteq P\omega$ справедливо $d_X(\mathcal{S}^0_1) = \{Y \mid Y \leq_S X\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y \in d_X(\mathcal{S}^0_1)$; требуется показать, что $Y \leq_S X$. Для некоторой последовательности $\{A_i\}$ $\mathcal{S}^0_1$-множеств имеем $Y = d_X(\{A_i\})$. Определим функцию $f : P\omega \to P\omega$ как $f(\xi) = \{i \mid \xi \in A_i\}$. Тогда f непрерывна и $c_{f(\xi)}(\{A_i\}) = \{\xi\}$ для любого ξ. Из последнего соотношения следует $Y = f^{-1}(X)$, откуда $Y \leq_S X$.

Обратно, пусть $Y \leq_S X$, тогда $Y = f^{-1}(X)$ для некоторой непрерывной функции f на $P\omega$. По лемме 1.3(ii) имеем $X = d_X(\{A_i\})$, где $A_i = \{\xi \mid i \in \xi\}$. Тогда $Y = d_X(\{f^{-1}(A_i)\})$. Множества A_i лежат в $\mathcal{S}^0_1$, поэтому множества $f^{-1}(A_i)$ также лежат в $\mathcal{S}^0_1$. Отсюда $Y \in d_X(\mathcal{S}^0_1)$, что завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. *Предпорядки* $(\{d_X(\mathcal{S}^0_1) \mid X \subseteq P\omega\}; \subseteq)$ *и* $(P(P\omega); \leq_S)$ *эквивалентны.*

Последнее свойство и результаты § 4 (см. замеч. после следствия 4.5) показывают, что структура $(\{d_X(\mathcal{S}^0_1) \mid X \in 2^\omega\}; \subseteq)$ не является почти вполне упорядоченной. С другой стороны, из [1, теор. 6.5] следует, что структура $(\{d_X(\mathcal{S}^0_\alpha) \mid X \in 2^\omega\}; \subseteq)$ для любого $\alpha \geqslant 2$ почти вполне упорядочена.

Теорема 6.3 приводит к решению аналога основной проблемы статьи для уровней иерархий, рассмотренных в §§ 2 и 3. Например, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 6.5. *Для любого $\alpha < \omega$ включение $X \in \mathcal{S}^0_\alpha$ верно тогда и только тогда, когда $d_X(\mathcal{S}^0_1) \subseteq \mathcal{S}^0_\alpha$.*

Естественное свойство иерархий из §§ 2 и 3 устанавливает

СЛЕДСТВИЕ 6.6. *Для всех $\alpha, \beta < \omega$, $\beta > 0$, любой из классов $\mathcal{S}^0_\beta$, $D_\alpha(\mathcal{S}^0_\beta)$ имеет S-полное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой из указанных классов можно представить в виде $d_X(\mathcal{S}^0_1)$ для подходящего $X \subseteq 2^\omega$. По теореме 6.3 множество X является S-полным в $d_X(\mathcal{S}^0_1)$. Это завершает доказательство.

Например, простое вычисление показывает, что множество $\{\xi \mid \mu(\xi)$ нечётно$\}$ S-полно в $\mathcal{S}^{-1}_\omega$. Здесь через $\mu(\xi)$ обозначается наименьший элемент в ξ (при условии, что ξ не пусто).

ЛИТЕРАТУРА

1. *V. L. Selivanov*, Fine hierarchies and Boolean terms, J. Symb. Log., **60**, N 1 (1995), 289—317.
2. *W. Wadge*, Degrees of complexity of subsets of the Baire space, Notices Am. Math. Soc., A-714, 1972.
3. *W. Wadge*, Reducibility and determinateness in the Baire space, PhD thesis, Univ. California, Berkeley, 1984.
4. *R. van Wesep*, Wadge degrees and descriptive set theory, in: Cabal Semin., Proc. Caltech-UCLA Logic Semin. 1976–77 (Lec. Notes Math., **689**), 1978, 151—170.
5. *J. Steel*, Determinateness and the separation property, J. Symb. Log., **45**, N 1 (1981), 41—44.
6. *Y. N. Moschovakis*, Descriptive set theory, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1980.
7. *A. Tang*, Chain properties in $P\omega$, Theor. Comput. Sci., **9** (1979), 153—172.

8. *В. Л. Селиванов*, Разностная иерархия в φ-пространствах, Алгебра и логика, **43**, № 4 (2004), 425—444.
9. *L. V. Kantorovich, E. M. Livenson*, Memoir on the analytical operations and projective sets. I, Fund. Math., **18** (1932), 214—271.
10. *R. van Wesep*, Subsystems of second-order arithmetic, and descriptive set theory under the axiom of determinateness, PhD thesis, Univ. California, Berkeley, 1977.
11. *L. Staiger*, Hierarchies of recursive ω-languages, Elektron. Inf. Kybern., **22**, N 5/6 (1986), 219—241.

Поступило 15 октября 2003 г.

Адрес автора:

СЕЛИВАНОВ Виктор Львович, НГПУ, ул. Вилюйская, 28, г. Новосибирск, 630126, РОССИЯ. e-mail: vseliv@nspu.ru