O. I. Pavlov, Linearly ordered space whose square and higher powers cannot be condensed onto a normal space,
Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya, 2014, Issue 10, 68–73

УДК 515.122

О.И. Павлов[1]

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО, КВАДРАТ КОТОРОГО НЕ УПЛОТНЯЕТСЯ НА НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Одна из центральных задач в теории уплотнений топологических пространств состоит в описании топологических свойств, которые можно улучшить путем уплотнения (т. е. непрерывного взаимно однозначного отображения). Большинство известных контрпримеров в этой области касается не наследственных топологических свойств. В данной статье построено счетнокомпактное линейно упорядоченное (следовательно, монотонно нормальное, т. е. "очень сильно" наследственно нормальное) топологическое пространство, которое в квадрате и любой более высокой степени не уплотняется на нормальное пространство. Построенное пространство псевдокомпактно во всех степенях, что дополняет известный результат об уплотнениях непсевдокомпактных пространств.

Ключевые слова: уплотнение, нормальность, линейно упорядоченное пространство, псевдокомпактность, декартово произведение, монотонная нормальность, стоун-чеховская компактификация, плоскость Тихонова.

Введение

Уплотнением называется непрерывное взаимно однозначное отображение "на". Уплотнения часто встречаются и играют весьма важную роль в общей топологии. Например, известно, что любое непрерывное отображение является композицией факторного отображения и уплотнения. Широко используемая операция усиления топологии является обратной по отношению к уплотнению. Одна из самых общих задач, касающихся уплотнений, — описать такие классы пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ в каком-либо смысле лучше $\mathcal{A}$), что любое пространство из класса $\mathcal{A}$ уплотняется на некоторое пространство из класса $\mathcal{B}$. Важный частный случай — описать такие немультипликативные топологические свойства $\mathcal{P}$, что если X — любое пространство со свойством $\mathcal{P}$, то его квадрат (или более высокая степень) может быть уплотнен на пространство, обладающее свойством $\mathcal{P}$. Последняя задача была решена отрицательно для многих классов пространств. В [1] было показано, что для любого тихоновского пространства X и любого кардинала ν существует большее пространство $M(X)$, которое обладает многими свойствами, присущими X, и такое, что при любом уплотнении образ $f(M(X)^{\mu})$, $\mu \leqslant \nu$, содержит замкнутую

Павлов Олег Иванович (`matematika.atiso@gmail.com`), кафедра экономико-математического моделирования, Российский университет дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

копию пространства X^μ. Таким образом, если X^μ не обладает некоторым свойством $\mathcal{P}$, то им не обладает и $M(X)^\mu$ и, следовательно, образ $M(X)^\mu$ при любом уплотнении[2]. К сожалению, практически все свойства $\mathcal{P}$ (за исключением разреженности), на которые распространяется эта теорема, не являются наследственными. Из наследственных свойств можно упомянуть результаты Р.З. Бузяковой [3] (существует наследственно нормальное пространство, квадрат которого не уплотняется на нормальное пространство) и А.Н. Якивчика [4] (существует наследственно финально-компактное хаусдорфово нерегулярное пространство, квадрат которого не уплотняется на финально-компактное пространство). В данной статье описывается пример линейно упорядоченного топологического пространства (поэтому обладающего очень сильным наследственно нормальными свойством — монотонной нормальностью[3]), которое в квадрате и любой более высокой степени не уплотняется на нормальное пространство. Мы используем стандартные теоретико-множественные обозначения и терминологию [6].

1. Конструкция примера

Пусть τ обозначает регулярный несчетный кардинал. Для любого кардинала $\alpha < \omega_1$ положим $\Gamma_0 = \aleph_0$, $\Gamma_\alpha = \sum\limits_{\beta<\alpha} exp(\Gamma_\beta)$. Пусть $\mu = \Gamma_{\omega_1}$ и K обозначает степень $\{0,1\}^\mu$ с лексикографическим порядком. Тогда K — линейно упорядоченный компакт характера μ. Пусть $L \subset K$,

$$L = \{(l_0, \dots, l_\alpha, \dots) \in K : \exists \alpha < \mu, \forall \beta, \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow l_\beta = l_\gamma\}.$$

Другими словами, L содержит все элементы K, которые являются константами начиная с некоторого ординала (своего для каждого $x \in L$). L всюду плотно в K и содержит все скачки K, следовательно, само является линейно упорядоченным пространством. Дополнение к L в K в каждой точке имеет характер ω_1 (потому что $cf(\mu) = \omega_1$), значит, каждая щель L с обеих сторон имеет характер ω_1. Никакая точка $\beta L \setminus L$ и $K \setminus L$ не является предельной для счетного бесконечного подмножества βL или K, поэтому L является ω-ограниченным пространством (т. е. замыкание в L любого счетного подмножества является компактом), а $\beta L \setminus L$ и $K \setminus L$ являются P-пространствами (любое множество типа G_δ открыто). Из ω-ограниченности L следует псевдокомпактность L, поэтому стоун-чеховская компактификация βL также является линейно упорядоченным топологическим пространством, получающимся из L заклеиванием каждой щели двумя точками. Очевидно, $|K| = |\beta L| = 2^\mu$ и $|L| = \sum\limits_{\beta<\mu} 2^\beta = \mu$, следовательно, $|L| < |K \setminus L|$ и $|L| < |\beta L \setminus L|$.

Теорема. *При $\nu \geqslant 2$, L^ν не уплотняется на нормальное пространство.*

2. Доказательство теоремы

В общем случае при уплотнении тихоновского пространства X точки нароста стоун-чеховской компактификации могут "склеиваться"друг с другом или с точками X, но точки самого пространства X не могут склеиваться друг с другом. Доказательство теоремы разобьем на две части. Сначала докажем, что при

[2]Несколько более слабый результат был независимо получен Д.В. Малыхиным в [2].
[3]Пример Р.З. Бузяковой немонотонно нормален согласно [5, теорема 4.1].

уплотнении L^ν найдется точка нароста L^ν, у которой все координаты кроме одной принадлежат копиям L, и лишь одна координата принадлежит наросту копии L, и эта точка не склеивается ни с какой точкой L^ν.

Пусть $\mathbf{L} = \prod\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant\nu} L_\alpha$, где L_α обозначает α-ю копию L. Так как L — ω-ограниченное пространство, любая степень L также является ω-ограниченным (см. [7]), следовательно, псевдокомпактным пространством. Поэтому $\beta(\mathbf{L}) = \prod\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant\nu} \beta(L_\alpha)$ по теореме Гликсберга [8]. Введем дальнейшие обозначения. Для любой координаты $\alpha \leqslant \nu$ и любого индексного множества S, $\pi_\alpha(\cdot)$ и $\pi_S(\cdot)$ обозначают проекции $\beta\mathbf{L}$ на βL_α и $\prod\limits_{\alpha\in S}\beta(L_\alpha)$ соответственно. Зафиксируем точку

$$y^* \in \prod_{2\leqslant\alpha\leqslant\nu} L_\alpha.$$

Пусть f обозначает уплотнение пространства $\mathbf{L}$, а $\tilde{f}$ — его непрерывное продолжение на $\beta(\mathbf{L})$.

Лемма. *Мощность множества* $H \subseteq (\beta L_1 \setminus L_1) \times \{y^*\}$,

$$H = ((\beta L_1 \setminus L_1) \times \{y^*\}) \cap \left(\tilde{f}^{-1}\left(f(\mathbf{L})\right)\right)$$

не превосходит μ.

Эта лемма говорит о том, что при уплотнении f лишь малая часть нароста подпространства $L_1 \times \{y^*\}$ (являющегося копией пространства L) может склеиться с точками $\mathbf{L}$.

Доказательство леммы. Предположим противное, тогда H содержит множество Y мощности μ^+, которое мы занумеруем $Y = \{y_\delta \in H : \delta < \mu^+, y_{\delta'} \neq y_{\delta''}$ при $\delta' \neq \delta''\}$. Пусть $L^* = \beta L_1 \times \{y^*\}$, тогда $H \subset L^*$. Согласно определению множества H, для каждого $y \in Y$ существует такой (единственный) элемент $\mathbf{L}$, который мы обозначим $p(y)$, что $\tilde{f}(y) = f\left(p(y)\right)$. По определению множества H проекция этого множества, а следовательно и множества Y, на βL_1 является подмножеством нароста $\beta L_1 \setminus L_1$. С другой стороны, проекция множества $p(Y)$ на βL_1 является подмножеством L_1, поскольку $p(Y) \subset \mathbf{L}$. Следовательно, $\pi_1(Y) \cap \pi_1\left(p(Y)\right) = \emptyset$. Без ограничения общности можно считать, что $\pi_1(y) < \pi_1\left(p(y)\right)$ для каждого $y \in Y$. Так как $|Y| = \mu^+$, а $d(L^*) \leqslant \mu$ (L^* является компактификацией пространства $L_1 \times \{y^*\}$, имеющего мощность μ), найдутся точка $z^- \in \beta L_1$ и подмножество $Y' \subseteq Y$ мощности μ^+ такие, что $\pi_1(y') < z^- < \pi_1\left(p(y')\right)$ для каждого $y' \in Y'$. Без ограничения общности можно считать, что $Y' = Y$. Так как $\chi(z^-, L^*) < \mu < |Y|$, найдутся точка $z^+ \in \beta L_1$ и счетное бесконечное множество $Y'' \subset Y$ такие, что $z^- < z^+$ и

$$\pi_1(y'') < z^- < z^+ < \pi_1\left(p(y'')\right) \tag{1}$$

для каждого $y'' \in Y''$. В силу секвенциальной компактности любого линейно упорядоченного компакта, можно считать, что Y'' и $p(Y'')$ являются сходящимися последовательностями. Пусть z^* и z^{**} обозначают пределы последовательностей Y'' и $p(Y'')$ в L^* соответственно. Тогда $\pi_1(z^*) \leqslant z^- < z^+ \leqslant \pi_1(z^{**})$ по (1), следовательно, $z^* \neq z^{**}$. Обе точки z^*, z^{**} лежат в $L_1 \times \{y^*\} \subset \mathbf{L}$, так как $(\beta L_1 \setminus L_1) \times \{y^*\}$ является P-пространствам, и все точки множества Y были выбраны попарно различными. Но в силу непрерывности отображений f и $\tilde{f}$ и из определения множества H следует, что $f(z^*) = f(z^{**})$. Это противоречит тому факту, что f — уплотнение. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим множество $M = L^* \setminus H$. Другими словами,

$$M = ((\beta L_1 \setminus L_1) \times \{y^*\}) \setminus \left(\tilde{f}^{-1}(f(\mathbf{L}))\right),$$

т. е. M — множество тех точек нароста $L_1 \times \{y^*\}$, которые не заклеены точками $\mathbf{L}$. Множество M не пусто, так как $|L^*| = 2^\mu$, а $|H| \leqslant \mu$. Одним из канонических примеров тихоновского ненормального пространства является пространство $P = \{(x,y) \in ((\omega_1 + 1) \times \omega_1) \setminus \{(\omega_1, \omega_1)\} : x \geqslant y\}$ (см. [9] или [10]), напоминающее плоскость Тихонова. Оно не является нормальным, потому что содержит замкнутые неотделимые подмножества (оба гомеоморфны ω_1) — диагональ $A = \{(x,x) : x \in \omega_1\}$ и вертикальный луч $B = \{\omega_1\} \times \omega_1$. Оказывается, для каждой точки $x' \in M$ можно вложить βP в $\beta \mathbf{L}$ так, что P будет подмножеством $\mathbf{L}$, а x' — образом удаленной точки $(\omega_1, \omega_1) \in \beta P$. Тогда A и B окажутся непересекающимися замкнутыми и неотделимыми в $\mathbf{L}$, а их образы $f(A)$ и $f(B)$ — непересекающимися замкнутыми и неотделимыми в $f(\mathbf{L})$, что означает ненормальность $f(\mathbf{L})$.

Зафиксируем точку $x' \in M$, тогда $x' = (z', y^*)$, где $z' = \pi_1(x') \in \beta L_1 \setminus L_1$. Так как каждая точка $\beta L_1 \setminus L_1$ имеет в βL_1 характер ω_1, и L_1 всюду плотно в βL_1, по трансфинитной рекурсии можно построить последовательность элементов L_1, монотонно сходящуюся к z' по типу ω_1. Замыкание S этой последовательности в βL_1 опять будет подмножеством L_1, поскольку $\beta L_1 \setminus L_1$ — P-пространство. Легко видеть, что это замыкание гомеоморфно пространству ω_1, рассмотренному с обычной интервальной топологией. Пронумеруем элементы S (в порядке, соответствующему гомеоморфизму с ω_1): $S = \{s_\alpha \in L_1 : \alpha < \omega_1\}$.

Обозначим $y' = \pi_2(y^*)$; $y' \in L_2$, поэтому хотя бы один из односторонних характеров $\chi^+(y', L_2)$, $\chi^-(y', L_2)$ точки y' в L_2 равен ω_1. Аналогично рассуждению из предыдущего параграфа существует вложение $\omega_1 + 1$ в качестве замкнутого подмножества $T = \{t_\alpha \in L_2 : \alpha \leqslant \omega_1\}$ пространства L_2 (порядок нумерации соответствует гомеоморфизму с $\omega_1 + 1$).

Если $\nu > 2$, пусть y'' будет проекцией y^* на $\prod\limits_{3 \leqslant \alpha \leqslant \nu} L_\alpha$, тогда $x' = (z', y', y'')$. Множества $A' = \{(s_\alpha, t_\alpha, y'') : \alpha < \omega_1\}$ и $B' = S \times \{t_{\omega_1}\} \times \{y''\}$ являются непересекающимися копиями ω_1 в $\mathbf{L}$. Единственной предельной точкой этих множеств в $\beta \mathbf{L}$, не принадлежащей им, является x'. Но x' — точка нароста, поэтому A' и B' — замкнутые непересекающиеся подмножества $\mathbf{L}$, являющиеся функционально неотделимыми. Образы $f(A')$ и $f(B')$ также являются замкнутыми непересекающимися (пересечение замыканий этих множеств в $\beta f(\mathbf{L}) = \tilde{f}(\beta \mathbf{L})$, содержат только точку $\tilde{f}(x')$, которая не принадлежит образу $f(\mathbf{L})$ по определению множества M), и функционально неотделимыми. Это означает ненормальность $f(\mathbf{L})$. Если $\nu = 2$, аналогичное рассуждение справедливо для $A' = \{(s_\alpha, t_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ и $B' = S \times \{t_{\omega_1}\}$. Теорема доказана.

Замечание 1. В доказательстве теоремы существенно использовался тот факт, что пространство L является псевдокомпактным в любой степени. Это не случайно: в [1] доказано, что какая-то степень непсевдокомпактного пространства (неизмеримой мощности) обязательно уплотняется на нормальное пространство.

Замечание 2. Построение индексного множества можно было начинать с произвольного бесконечного кардинала Γ_0. При этом μ можно взять равным Γ_τ для любого несчетно конфинального кардинала τ.

Литература

[1] Pavlov O. Condensations of Cartesian products // Comment. Math. Univ. Carolin. 1999. Vol. 40. № 2 P. 355–365.

[2] Малыхин Д.В. Об уплотнениях топологических пространств и произведений // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: сборник научных трудов. Вып. 2. М.: Станкин, 1998. С. 27–33.

[3] Бузякова Р.З. Об уплотнении декартовых произведений на нормальные пространства // Вестник МГУ. 1996. Сер. 1. № 1. С. 17–19.

[4] Якивчик А.Н. Об уплотнениях произведения финально компактных пространств // Вестник МГУ. 1989. Сер. 1. № 4. С. 84–86.

[5] Heath R.W., Lutzer D.J., Zenor P.L. Monotonically normal spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 178. P. 481–493.

[6] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

[7] Stephenson R.M. // k-Compact and related spaces: Handbook of set-theoretic topology / ed. K. Kunen и J. Vaughan. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1984. P. 603–632.

[8] Glicksberg I. Stone-Cech compactifications of products // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 90. P. 369–382.

[9] Dieudonne J. Sur les espaces topologiques susceptibles d'etre munis d'une structure uniforme d'espace complet // C. R. Acad. Sci. Paris. 1939. Vol. 209. P. 666–668.

[10] Przymusinski T.S. // Products of normal spaces: Handbook of set-theoretic topology / ed. K. Kunen и J. Vaughan. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1984. P. 781–826.

References

[1] Pavlov O. Condensations of Cartesian products. *Comment. Math. Univ. Carolin*, 1999, V. 40, no. 2, pp. 355–365.

[2] Malykhin D.V. On condensations of topological spaces and products. *Fundamental'nyye fiziko-matematicheskiye problemy i modelirovaniye tekhniko-tekhnologicheskikh sistem. Sbornik nauchnykh trudov.* [*Fundamental physics and mathematics problems and modelling of technical and technological systems. Collection of scientific papers.* 1998, Vol. 2. M., "Stankin", pp. 27–33 [in Russian].

[3] Buzyakova R.Z. On condensations of Cartesian Products onto normal spaces. *Vestnik MGU* [*Vestnik of MSU*], 1996, Vol.51, no. 1, pp. 13-14 [in Russian].

[4] Yakivchik A.N. On tightenings of a product of finally compact spaces. *Vestnik MGU* [*Vestnik of MSU*], 1989, Vol. 44, no. 4, pp. 86-88 [in Russian].

[5] Heath R.W., Lutzer D.J., Zenor P.L. Monotonically normal spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1973, Vol. 178, pp. 481–493.

[6] Engelking R. General Topology. M., Mir, 1989 [in Russian].

[7] Stephenson R.M. // k-Compact and related spaces: Handbook of set-theoretic topology. K. Kunen и J. Vaughan (eds). Amsterdam, North-Holland Publishing, 1984, pp. 603–632.

[8] Glicksberg I. Stone-Cech compactifications of products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1959, Vol. 90, pp. 369–382.

[9] Dieudonne J. Sur les espaces topologiques susceptibles d'etre munis d'une structure uniforme d'espace complet. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1939, Vol. 209, pp. 666-668 [in French].

[10] Przymusinski T.S. Products of normal spaces: Handbook of set-theoretic topology. K. Kunen и J. Vaughan (eds.) Amsterdam, North-Holland Publishing, 1984, pp. 781–826.

O.I. Pavlov[4]

LINEARLY ORDERED SPACE WHOSE SQUARE AND HIGHER POWERS CANNOT BE CONDENSED ONTO A NORMAL SPACE

One of the central tasks in the theory of condensations is to describe topological properties that can be improved by condensation (i.e. a continuous one-to-one mapping). Most of the known counterexamples in the field deal with non-hereditary properties. We construct a countably compact linearly ordered (hence, monotonically normal, thus "very strongly" hereditarily normal) topological space whose square and higher powers cannot be condensed onto a normal space. The constructed space is necessarily pseudocompact in all the powers, which complements a known result on condensations of non-pseudocompact spaces.

Key words: condensation, normality, linearly ordered space, pseudocompact, Cartesian product, monotonically normal, Stone-Cech compactification, Tychonoff plank.

Статья поступила в редакцию 26/ V/2014.

The article received 26/ V/2014.

[4] *Pavlov Oleg Ivanovich* (`matematika.atiso@gmail.com`), Department of Economic and Mathematical Modelling, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 117198, Russian Federation.