V. I. Nikonov, The application of Lie algebras and groups to the solution of problems of partial stability of dynamical systems, *Zhurnal SVMO*, 2018, Volume 20, Number 3, 295–303

DOI: 10.15507/2079-6900.20.201803.295-303

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.295-303

УДК 517.9

Применение алгебр и групп Ли к решению задач частичной устойчивости динамических систем

© **В. И. Никонов**[1]

Аннотация. Статья посвящена анализу частичной устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием алгебр и групп Ли. Показывается, что существование у исследуемой системы группы преобразований, инвариантной относительно частичной устойчивости, позволяет упростить анализ частичной устойчивости исходной системы. Для этого необходимо, чтобы ассоциированный линейный дифференциальный оператор лежал в обертывающей алгебре Ли исходной системы, а оператор, определяемый однопараметрическую группу Ли был коммутативен с этим оператором. При этом, если найденная группа обладает инвариантностью относительно частичной устойчивости, то найденное преобразование приводит к декомпозиции исследуемой системы, а вопрос частичной устойчивости сводится к исследованию выделенной подсистемы. Нахождение искомого преобразования использует первые интегралы исходной системы. Приведены примеры, иллюстрирующие предлагаемый подход.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, алгебра Ли, группа Ли, частичная устойчивость, декомпозиция.

1. Введение

Как известно [1], основными направлениями исследования устойчивости относительно заданной части координат фазового вектора динамических систем являются:

– метод функций и вектор-функций Ляпунова [2];

– исследование на основе уравнений линейного приближения [3];

– метод нелинейных преобразований переменных [4]–[5].

В данной работе предлагается использование двух последних подходов.

Как отмечено в [6], фундаментальное открытие Ли состояло в том, что сложные нелинейные условия инвариантности системы относительно преобразований из группы в случае непрерывных групп можно заменить эквивалентными, но гораздо более простыми линейными условиями, отражающими «инфинитозимальную инвариантность» этой системы относительно образующих этой группы.

Именно этот момент послужил для автора данной работы мотивом к использованию алгебр и групп Ли к решению задач частичной устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений.

В работах [6]–[8] приводятся основы теории алгебр и групп Ли для решения задач декомпозиции и приводимости систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Данная статья посвящена применению этого подхода к задаче анализа частичной устойчивости нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений.

[1] **Никонов Владимир Иванович**, доцент кафедры алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7202-9679, nik_vl_@mail.ru

2. Основные понятия, определения и теоремы

Известно [7], что произвольное линейное отображение многообразия $\mathfrak{D}(G)$ функций $\mathfrak{D}$, заданных в области G, удовлетворяющее условию

$$X(fg) = X(f)g + fX(g), f, g \in \mathfrak{D}(G), \tag{2.1}$$

называется векторным полем.

Множество $\mathfrak{D}^1(G)$ векторных полей на многообразии $\mathfrak{D}(G)$ образует структуру линейного пространства и совместно с операцией умножения

$$[X, Y] = XY - YX, \tag{2.2}$$

которую принято называть скобкой Пуассона, становится алгеброй Ли. При этом произвольное поле X имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.3}$$

где $v_1(x), ..., v_n(x)$ – функции из многообразия $\mathfrak{D}(G)$.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2.4}$$

в области $\bar{G} = I \times G$, $I \subset R$, $G \subset R^n$ существования и единственности решения.

Если $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(G)$, то на траекториях решений системы (2.4) имеем

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = X(\varphi)dt,$$

где $X = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ – ассоциированный дифференциальный оператор системы (2.4) [7].

Поскольку правые части системы зависят от некоторых параметров – скаляров некоторого поля P, то получим бесконечную совокупность дифференциальных операторов $\sigma = \{X_1, X_2, ...\}$.

Обертывающей алгеброй Ли $\mathfrak{B}$ системы (2.4) называется алгебра дифференциальных операторов, образованная рекуррентной последовательностью множеств

$$\sigma^1 = \sigma \cup [\sigma, \sigma], \sigma^2 = \sigma^1 \cup [\sigma^1, \sigma^1], ..., \sigma^k = \sigma^{k-1} \cup [\sigma^{k-1}, \sigma^{k-1}],$$

$$[\sigma^i, \sigma^i] = Z, Z = [X, Y], X, Y \in \sigma^{i-1}.$$

Определение 2.1 [7] *Пусть $X \in \mathfrak{D}^1(G)$ – произвольный линейный дифференциальный оператор первого порядка, тогда рядом Ли называется ряд*

$$e^{sX(x)} f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} X^i(x) f(x), f \in \mathfrak{D}(G). \tag{2.5}$$

О п р е д е л е н и е 2.2 [7] *Система* (2.4) *называется приводимой (агрегируемой) в области* $G(\operatorname{loc} G)$, *если существует обратимая замена переменных*

$$z = \psi(x),\ x = \psi^{-1}(z), \quad \psi, \psi^{-1} \in \mathfrak{D}(G),$$

преобразующая исходную систему к совокупности g *последовательно интегрируемых подсистем*

$$\begin{aligned} &\frac{dz_{\nu_1}}{dt} = f_{\nu_1}(z_{\nu_1}), \\ &\frac{dz_{\nu_2}}{dt} = f_{\nu_2}(z_{\nu_1}, z_{\nu_2}), \\ &\dots \\ &\frac{dz_{\nu_g}}{dt} = f_{\nu_g}(z_{\nu_1}, z_{\nu_2}, ..., z_{\nu_g}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Т е о р е м а 2.1 [7] *Пусть ряд Ли* (2.5) *используется в качестве замены переменных*

$$x_1^{'} = e^{(s-s_0)X(x)}x_1,\ ...,\ x_n^{'} = e^{(s-s_0)X(x)}x_n. \tag{2.7}$$

Тогда преобразования (2.7) *являются точечными, т. е. для любой функции* $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(G)$ *имеет место тождество*

$$\varphi(e^{(s-s_0)X(x)}x_1, ..., e^{(s-s_0)X(x)}x_n) = e^{(s-s_0)X(x)}\varphi(x_1, ..., x_n). \tag{2.8}$$

Доказательство теоремы 2.1 содержится в [7].

Система (2.4) называется инвариантной относительно преобразования $x = \varphi(x')$ $(x' = \varphi^{-1}(x))$, определенного в области G, если в результате преобразования она остается неизменной, т. е. переходит в систему $\dfrac{dx'}{dt} = f(x')$.

Вопрос об инвариантных преобразованиях однопараметрических групп вида

$$x_j = e^{sX'(x')}x_i^{'},\ x_j^{'} = e^{-sX(x)}x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.9}$$

действующих локально в области G, рассматривается следующей теоремой.

Т е о р е м а 2.2 [7] *Для того чтобы уравнение* (2.4) *было инвариантно относительно однопараметрической группы* (2.9), *необходимо и достаточно, чтобы оператор* X *был коммутативен с ассоциированным оператором системы, т. е. выполнялось тождество* $[U, X] \equiv 0$.

Отметим, что знание преобразования (2.9) облегчает интегрирование исходной системы. При этом структура оператора X может быть существенно проще, чем U. Поэтому если уравнение $Xf = 0$ допускает некоторые решения $\Omega_1 = \{\psi_1(x), ..., \psi_m(x)\}$, то эти решения могут быть расширены с помощью ассоциированного оператора системой $\{U\psi_1(x), ..., U\psi_m(x)\}$. Таким образом, выбирая из объединения систем решений функционально независимую систему Ω_2 и применяя к ней подобную процедуру, придем на некотором шаге к непополняемой системе решений Ω. Такая совокупность интегралов называется полной относительно оператора U.

Т е о р е м а 2.3 [7] *Если имеется совокупность интегралов* $\Omega = \{\psi_1(x), ..., \psi_m(x)\}$, *полная относительно оператора* U, *то можно указать замену переменных* $x' = \psi(x), x = \psi^{-1}(x')$ *которая, по крайней мере локально в области* G, *приводит систему к квазитреугольному виду*

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_1, ..., x_m), \quad i = \overline{1, m}, \\ \frac{dx_j}{dt} &= F_j(x_1, ..., x_n), \quad j = \overline{m+1, n}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Т е о р е м а 2.4 [7] *Пусть обертывающая группа* $\mathfrak{G}$ *системы* (2.4) *транзитивна над* $\mathfrak{D}(G)$. *Система* (2.4) *приводима (агрегируема) тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий.*

1. Обертывающая алгебра $\mathfrak{B}$ *системы имеет цепочку идеалов*

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, ..., \mathfrak{B}_{g-1};$$

$$\mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B}_1 \supset ... \supset \mathfrak{B}_{g-1}; [\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_{j+p}] \supset \mathfrak{B}_{j-p}, p \geq 1,$$

в которой фактор-алгебры $\mathfrak{B}^{(j)} = \mathfrak{B}_{j-1}/\mathfrak{B}_j$ *имеют размерности* $\nu_j, \nu_1 + ... + \nu_g = n$.

2. Обертывающая группа $\mathfrak{G}$ *системы имеет* g *систем импримитивности* $\mathfrak{M}_j$, *определяемых функциями*

$$\mathfrak{M}_j = \{u_{1\nu_1}(x), ..., u_{\nu_1\nu_1}(x), ..., u_{1\nu_j}(x), ..., u_{\nu_j\nu_j}(x)\}, j = \overline{1, g},$$

таких, что для всех $T_X \in \mathfrak{G}$ *имеют место соотношения*

$$T_X u_{1\nu_j}(x) = \Phi_{X_1\nu j}(u_{1\nu_1}, ..., u_{\nu_1\nu_1}, ..., u_{1\nu_j}, ..., u_{\nu_j\nu_j});$$

$$T_X u_{\nu_j\nu_j}(x) = \Phi_{X_{\nu_j\nu_j}}(u_{1\nu_1}, ..., u_{\nu_1\nu_1}, ..., u_{1\nu_j}, ..., u_{\nu_j\nu_j}), j = \overline{1, g}.$$

3. Обертывающая группа $\mathfrak{G}$ *обладает кампозиционным рядом* $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{(1)}, ..., \mathfrak{G}^{(g-1)}, 1$, *составленным из нормальных делителей, и рядом фактор-групп* $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1, ..., \mathfrak{U}_{g-1}, \mathfrak{U}_g$, $\mathfrak{U}_j \equiv \equiv \mathfrak{G}^{(j)}/\mathfrak{G}^{(j+1)}, \dim \mathfrak{U}_j = \nu_j$, *причем* $\mathfrak{U}_j\mathfrak{U}_{j+p} \supset \mathfrak{U}_{j+p}, p \geq 1$.

Замена переменных

$$z_{1\nu_j} = u_{1\nu_j}(x), \; ..., z_{\nu_j\nu_j} = u_{\nu_j\nu_j}(x), \quad j = \overline{1, g},$$

преобразует систему (2.4) *к виду* (2.6).

Т е о р е м а 2.5 [7] *Для того чтобы переменные в преобразованной системе разделялись, необходимо и достаточно, чтобы существовали* $n - s$ *несвязных операторов* $X_{s+1}, ..., X_n$, *коммутативных с базисными операторами* $X_1, ..., X_s$:

$$[X_i, X_j] \equiv 0, i = \overline{1, s}, j = \overline{s+1, n}.$$

3. Достаточные условия устойчивости по части переменных

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \tag{3.1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_p) = (y, z), X(0) = 0, m > 0, p \geq 0, n = m + p$.

Предположим, что исследуется устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ относительно переменных $y_1, ..., y_m$.

Представим систему (3.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= Z(y, z), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $y \in R^m, z \in R^p, Y(0, 0) = 0, Z(0, 0) = 0$.

Т е о р е м а 3.1 *Если для системы* (3.1)–(3.2) *имеется совокупность интегралов* $\Omega = \{\psi_1(x), ..., \psi_m(x)\}$, *полная относительно оператора* U *и такая, что можно указать замену переменных* $x = \psi(x')$, $x' = \psi^{-1}(x)$ *сохраняющую частичную устойчивость по крайней мере локально в области* G, *то эта замена приводит систему к квазитреугольному виду:*

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_1, ..., x_k), \quad i = \overline{1, k}, \\ \frac{dx_j}{dt} &= F_j(x_1, ..., x_n), \quad j = \overline{k+1, n}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

а вопрос y *-устойчивости исходной системы сводится к вопросу устойчивости системы невозмущенного движения системы*

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, ..., x_k), \quad i = \overline{1, k}. \tag{3.4}$$

.

Доказательство данной теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2.3 [7]. Отличие состоит в том, что к преобразованию переменных предъявляются более жесткие требования. Преобразование должно сохранять свойство устойчивости относительно компонент $y_1, ..., y_m$ фазового вектора x.

Рассмотрим примеры анализа частичной устойчивости нелинейных автономных систем.

П р и м е р 3.1 *Для системы третьего порядка*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + z_1^2 z_2, \\ \dot{z}_1 = bz_1 + y_1 z_1, \\ \dot{z}_2 = cz_2 - 2y_1 z_2, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $a, b, c-$ *постоянные, ставится задача об исследовании устойчивости нулевого положения равновесия системы по отношению к переменной* y_1.

Ассоциированный линейный дифференциальный оператор системы (3.5) имеет вид

$$X = (ay_1 + z_1^2 z_2)\frac{\partial}{\partial y_1} + (bz_1 + y_1 z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (cz_2 - 2y_1 z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Очевидно, что оператор X представим в виде

$$X = y_1(a\frac{\partial}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2}) + z_1^2 z_2\frac{\partial}{\partial y_1} + bz_1\frac{\partial}{\partial z_1} + cz_2\frac{\partial}{\partial z_2} = X_1 + X_2,$$

где

$$X_1 = y_1(a\frac{\partial}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2}), X_2 = z_1^2 z_2\frac{\partial}{\partial y_1} + bz_1\frac{\partial}{\partial z_1} + cz_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Найдем обертывающую алгебру Ли исходной системы:

$$\sigma = \{X_1, X_2\}; [X_1, X_1] = 0,$$

$$[X_1, X_2] = X_3 = -z_1^2 z_2(a\frac{\partial}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2}), [X_1, X_3] = -aX_3, [X_2, X_3] = (2b+c)X_3;$$

$$\sigma_1 = \{X_1, X_2, X_3\}.$$

Отметим, что оператор X_3 является линейно связным с операторами X_1 и X_2, так как

$$X_3 = -\frac{z_1^2 z_2}{y_1}X_1.$$

Таким образом, таблица коммутирований обертывающей алгебры Ли исходной системы имеет вид

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	X_3	$-aX_3$
X_2	$-X_3$	0	$(2b+c)X_3$
X_3	aX_3	$-(2b+c)X_3$	0

Очевидно, что в обертывающей алгебре Ли имеется подалгебра $\mathfrak{B}_1 = \{X_3\}$, которая является двусторонним идеалом этой алгебры. Следовательно, согласно теореме 3.1, исходная система приводится к квазитреугольному виду.

Таким образом, система операторов $\{X_1, X_2\}$ является полной.

Чтобы понизить порядок системы на единицу, достаточно найти один первый интеграл и сформировать замену переменных, инвариантную относительно устойчивости относительно переменной y_1.

От уравнения $X_1\psi = 0$ приходим к системе

$$\frac{dy_1}{a} = \frac{dz_1}{z_1} = \frac{dz_2}{-2z_2}.$$

Откуда найдем один первый интеграл, не зависящий от переменной y_1 :

$$z_1^2 z_2 = C_1.$$

Следовательно, $\psi_1 = z_1^2 z_2$. При этом $X_2(\psi_1) = \psi_1$. Поэтому

$$X(\psi_1) = (2b+c)\psi_1.$$

Для нахождения второй функции для замены переменных найдем частное решение уравнения

$$X_1(v(z_1, z_2)) = y \Leftrightarrow z_1\frac{\partial v}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial v}{\partial z_2} = 1,$$

интегрируя которое, получим частное решение

$$\psi_2 = \frac{1}{z_1} + z_1^2 z_2.$$

Таким образом, искомая замена переменных, инвариантная относительно y-устойчивости, имеет вид

$$\overline{z}_1 = z_1^2 z_2,\ \overline{z}_2 = \frac{1}{z_1} + z_1^2 z_2. \tag{3.6}$$

Указанная замена является локально обратимой, т. к. якобиан системы имеет вид

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(z_1, z_2)} = 1.$$

Найдем вид ассоциированного оператора исходной системы в новых координатах:

$$\overline{X} = (ay_1 + \overline{z}_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + (2b + c)\overline{z}_1 \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} + ((2b + c)\overline{z}_1 - (b + y_1)(\overline{z}_2 - \overline{z}_1))\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}.$$

Тогда исходная система дифференциальных уравнений в новых координатах принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + \overline{z}_1, \\ \dot{\overline{z}}_1 = (2b + c)\overline{z}_1, \\ \dot{\overline{z}}_2 = ((2b + c)\overline{z}_1 - (b + y_1)(\overline{z}_2 - \overline{z}_1)). \end{cases} \tag{3.7}$$

Из этого следует, что вопрос y_1- устойчивости решается подсистемой

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + \overline{z}_1, \\ \dot{\overline{z}}_1 = (2b + c)\overline{z}_1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Тогда, учитывая преобразование (3.6), из устойчивости линейной системы (3.8) следует устойчивость нулевого решения нелинейной системы (3.5) относительно переменной y_1.

Пример 3.2 *Для системы четвертого порядка*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + y_2 z_1 z_2, \\ \dot{y}_2 = -2y_2, \\ \dot{z}_1 = 2z_1, \\ \dot{z}_2 = -z_2 \end{cases} \tag{3.9}$$

ставится задача об исследовании устойчивости положений равновесия систем по переменным y_1 *и* y_2.

Ассоциированный линейный дифференциальный оператор системы (3.9) имеет вид

$$X = (-y_1 + y_2 z_1 z_2)\frac{\partial}{\partial y_1} - 2y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Поскольку $X(y_2 z_1 z_2) = -y_2 z_1 z_2$, то можно ввести замену

$$\overline{z}_1 = y_2 z_1 z_2,\ \overline{z}_2 = z_2. \tag{3.10}$$

В новых координатах ассоциированный оператор принимает вид

$$\overline{X} = (-y_1 + \overline{z}_1)\frac{\partial}{\partial y_1} - 2y_2\frac{\partial}{\partial y_2} - \overline{z}_1\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} - \overline{z}_2\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}.$$

Тогда исходная система дифференциальных уравнений в новых координатах принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + \overline{z}_1, \\ \dot{y}_2 = -2y_2, \\ \dot{\overline{z}}_1 = -\overline{z}_1, \\ \dot{\overline{z}}_2 = -\overline{z}_2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Из этого следует, что вопрос y_1, y_2-устойчивости решается подсистемой

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + \overline{z}_1, \\ \dot{y}_2 = -2y_2, \\ \dot{\overline{z}}_1 = -\overline{z}_1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Тогда, учитывая преобразование (3.10), из устойчивости линейной системы (3.12) следует устойчивость нулевого решения нелинейной системы (3.9) по переменным y_1 и y_2.

Список литературы

1. В. И. Воротников, В. В. Румянцев, *Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения*, Научный мир, М., 2001, 320 с.

2. В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987, 253 с.

3. В. П. Прокопьев, "Об устойчивости относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня", *ПММ*, **39**:3 (1975), 422–426.

4. В. И. Воротников, *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных*, Наука, М., 1991, 288 с.

5. В. И. Воротников, "Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем", *ПММ*, **43**:3 (1979), 441–450.

6. П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ.*, Мир, М., 1989, 639 с.

7. Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин, *Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики*, Наукова думка, Киев, 1987, 270 с.

8. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978, 399 с.

Поступила 2.06.2018

MSC2010 34C20

The application of Lie algebras and groups to the solution of problems of partial stability of dynamical systems

© **V. I. Nikonov**[1]

Abstract. The article is devoted to the analysis of partial stability of nonlinear systems of ordinary differential equations using Lie algebras and groups. It is shown that the existence of a group of transformations invariant under partial stability in the system under study makes it possible to simplify the analysis of the partial stability of the initial system. For this it is necessary that the associated linear differential operator Lie in the enveloping Lie algebra of the original system, and the operator defined by the one-parameter Lie group is commutative with this operator. In this case, if the found group has invariance with respect to partial stability, then the resulting transformation performs to the decomposition of the system under study, and the partial stability problem reduces to the investigation of the selected subsystem. Finding the desired transformation uses the first integrals of the original system. Examples illustrating the proposed approach are given.

Key Words: nonlinear ordinary differential equations, Lie algebra, Lie groups, partial stability, decomposition

References

1. V. I. Vorotnikov, V. V. Rumyantsev, *Stability and control with respect to part of the coordinates of the phase vector of dynamical systems: theory, methods and applications*, Nauchnyy Mir, Moscow, 2001 (In Russ.), 320 p.

2. V. V. Rumyantsev, A. S. Oziraner, *Stability and stabilization of motion with respect to a part of the variables*, Nauka, Moscow, 1987 (In Russ.), 256 p.

3. V. P. Prokopyev, "[On stability with respect to some of the variables in the critical case of a single zero root.]", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39** (1975), 422-426 (In Russ.).

4. V. I. Vorotnikov, *Stability of dynamical systems with respect to a part of variables*, Nauka, Moscow, 1991 (In Russ.), 288 p.

5. V. I. Vorotnikov, "[On the stability of dynamical systems with respect to a part of variables]", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **43** (1979), 441-450 (In Russ.).

6. P. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Mir, Moscow, 1989 (In Russ.), 639 p.

7. U. A. Mitropolsky, A. K.Lopatin, *The group-theoretical approach in asymptotic methods of nonlinear mechanics*, Naukova dumka, Kiev, 1987 (In Ukr.), 270 p.

8. V. I. Ovsjannikov, *Group analysis of differential equations*, Nauka, Moscow, 1978 (In Russ.), 399 p.

Submitted 2.06.2018

[1] **Vladimir I. Nikonov**, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7202-9679, nik_vl_@mail.ru