M. A. Skvortsova, T. Yskak, Asymptotic behavior of solutions in one predator–prey model with delay,
Sibirsk. Mat. Zh., 2021, Volume 62, Number 2, 402–416

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 517.929.4

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ОДНОЙ МОДЕЛИ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА» С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М. А. Скворцова, Т. Ыскак

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв и учитывающая возрастную структуру популяции хищников. Изучаются асимптотические свойства решений данной системы. Установлены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности, и оценки областей притяжения асимптотически устойчивых положений равновесия. Результаты получены с использованием функционалов Ляпунова — Красовского.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.211

Ключевые слова: модель «хищник-жертва», уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, область притяжения, функционалы Ляпунова — Красовского.

§ 1. Введение

При описании многих биологических процессов часто используются дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (см., например, монографии [1–4] и имеющуюся там библиографию). В настоящее время имеется огромное количество моделей, при этом их число постоянно увеличивается. В основе многих моделей с запаздыванием, описывающих динамику популяций, лежит классическая модель «хищник-жертва», состоящая из двух обыкновенных дифференциальных уравнений и появившаяся независимо в работах Лотки [5] и Вольтерра [6]. Обзор результатов для моделей «хищник-жертва» с запаздыванием содержится, в частности, в [7, 8].

Настоящая работа посвящена исследованию одной модели «хищник-жертва», предложенной в [9] и учитывающей возрастную структуру популяции хищников. Модель описывается системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t)(r - ax(t) - bz(t)), \\ \frac{d}{dt}y(t) = kbx(t-\tau)z(t-\tau) - (D+\mu)y(t), \\ \frac{d}{dt}z(t) = Dy(t) - \nu z(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$ — численность популяции жертв, $y(t)$ — численность популяции незрелых хищников, $z(t)$ — численность популяции зрелых хищников. Все коэффициенты системы и параметр запаздывания τ предполагаются положительными

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075–15–2019–1613.

и имеют следующий смысл: $r > 0$ — коэффициент прироста популяции жертв, $a > 0$ — коэффициент, отвечающий за ограниченность ресурсов на территории, $b > 0$ — коэффициент взаимодействия жертв и зрелых хищников, $k > 0$ — коэффициент рождаемости хищников, $\tau > 0$ — срок беременности хищника, $D > 0$ — коэффициент взросления хищников, $\mu > 0$ — коэффициент смертности незрелых хищников, $\nu > 0$ — коэффициент смертности зрелых хищников.

Вместе с системой (1) рассмотрим начальные условия:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), \quad z(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ x(+0) = \varphi(0), \quad y(+0) = \eta, \quad z(+0) = \psi(0), \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0])$ — заданные непрерывные функции. Учитывая биологический смысл модели, естественно рассматривать начальную задачу с неотрицательными начальными условиями:

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \psi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad \eta \geq 0. \tag{3}$$

Как отмечено в [9], в этом случае решение определено при всех $t > 0$, при этом компоненты решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ будут неотрицательными и ограниченными сверху. Всюду далее предполагаем, что условие (3) выполнено.

Выпишем все положения равновесия системы (1) с неотрицательными компонентами, указанные в [9].

(1) Если выполнено условие $kbrD \leq a\nu(D + \mu)$, то в системе (1) имеются два положения равновесия: $(0, 0, 0)$ и $\left(\frac{r}{a}, 0, 0\right)$. Положение равновесия $(0, 0, 0)$ соответствует полному вымиранию популяций, положение равновесия $\left(\frac{r}{a}, 0, 0\right)$ соответствует выживанию только популяции жертв.

(2) Если выполнено условие $kbrD > a\nu(D + \mu)$, то в системе (1) имеются три положения равновесия: $(0, 0, 0)$, $\left(\frac{r}{a}, 0, 0\right)$ и (x_0, y_0, z_0), где

$$x_0 = \frac{\nu(D + \mu)}{kbD}, \quad y_0 = \frac{\nu(kbrD - a\nu(D + \mu))}{kb^2D^2}, \quad z_0 = \frac{(kbrD - a\nu(D + \mu))}{kb^2D}. \tag{4}$$

Положение равновесия (x_0, y_0, z_0) соответствует совместному сосуществованию популяций хищников и жертв.

В [9] изучались качественные свойства решений системы (1), в частности, получены первые результаты об асимптотической устойчивости положений равновесия. В [10] предложено обобщение модели (1), для которой также были получены результаты об асимптотической устойчивости. Приведем утверждения, вытекающие из результатов работ [9, 10].

(1) Положение равновесия $(0, 0, 0)$ системы (1) неустойчиво [9].

(2) Если

$$kbrD < a\nu(D + \mu), \tag{5}$$

то положение равновесия $\left(\frac{r}{a}, 0, 0\right)$ системы (1) асимптотически устойчиво, при этом все решения системы (1) с положительными компонентами стремятся при $t \to \infty$ к данному положению равновесия [9]. Если $kbrD > a\nu(D + \mu)$, то положение равновесия $\left(\frac{r}{a}, 0, 0\right)$ неустойчиво [9].

(3) Если

$$a\nu(D + \mu) < kbrD < 3a\nu(D + \mu), \tag{6}$$

то положение равновесия (x_0, y_0, z_0) системы (1) асимптотически устойчиво при любом запаздывании $\tau > 0$ [10]. Если $kbrD > 3a\nu(D + \mu)$, то условия асимптотической устойчивости данного положения равновесия зависят от параметра запаздывания τ [10].

Отметим, что наряду с исследованием устойчивости важным вопросом также является получение оценок, характеризующих скорость стабилизации решений на бесконечности, и нахождение областей притяжения положений равновесия, т. е. допустимых условий на начальные данные, при которых происходит стабилизация решений. Этот вопрос в [9, 10] не рассматривался.

Целью настоящей работы является нахождение областей притяжения асимптотически устойчивых положений равновесия системы (1) и получение оценок, характеризующих скорость сходимости решений к данным положениям равновесия.

Отметим, что для общих классов систем с запаздыванием при проведении исследований в данном направлении активно применяются функционалы Ляпунова — Красовского (см., например, [11–24]). Для определенных классов систем, возникающих в биологических моделях, оценки также могут быть получены с использованием М-матриц (см., например, [25, 26]).

В настоящей работе используются функционалы Ляпунова — Красовского, при этом все величины, отвечающие за скорости убывания и области притяжения, указаны в явном виде через коэффициенты системы (1). Оценки, характеризующие скорость сходимости решений с положительными компонентами к положению равновесия $\left(\frac{r}{a},0,0\right)$, получены в § 2 при условии (5). Оценки решений и оценки на область притяжения положения равновесия (x_0,y_0,z_0) получены в § 3 при условии (6). Вопрос о получении оценок решений и нахождении области притяжения положения равновесия (x_0,y_0,z_0) в случае, когда условие (6) нарушено, пока остается открытым.

Данная работа продолжает исследования [27–32] асимптотических свойств решений биологических моделей.

§ 2. Глобальные оценки скорости сходимости к положению равновесия $\left(\frac{r}{a},0,0\right)$

В данном параграфе будем предполагать, что выполнено условие (5). В этом случае у системы (1) существуют только два положения равновесия с неотрицательными компонентами $(0,0,0)$ и $\left(\frac{r}{a},0,0\right)$, причем второе положение равновесия $\left(\frac{r}{a},0,0\right)$ асимптотически устойчиво. Получим оценки, характеризующие скорость сходимости решений системы (1) к данному положению равновесия.

Приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $(x(t),y(t),z(t))^{\mathrm{T}}$ — *решение начальной задачи* (1), (2) *с неотрицательными начальными условиями* (3). *Тогда для первой компоненты решения* $x(t)$ *имеют место следующие утверждения:*

(1) *если* $\varphi(0)=0$, *то* $x(t)=0$ *при всех* $t>0$;

(2) *если* $\varphi(0)>0$, *то*

$$0<x(t)\le\frac{r}{a}+\left(\varphi(0)-\frac{r}{a}\right)e^{-rt},\quad t>0;\tag{7}$$

(3) *если* $0<\varphi(0)\le\frac{r}{a}$, *то*

$$0<x(t)\le\frac{r}{a},\quad t>0.\tag{8}$$

Доказательство. Заметим, что из первого уравнения системы (1) вытекает, что если $\varphi(0)=0$, то $x(t)=0$ при всех $t>0$, а если $\varphi(0)>0$, то $x(t)>0$

при всех $t > 0$. Далее, поскольку $z(t) \geq 0$, из данного уравнения следует неравенство

$$\frac{d}{dt}x(t) \leq x(t)(r - ax(t)),$$

откуда нетрудно установить (7). Если при этом $\varphi(0) \leq \frac{r}{a}$, то из (7) вытекает (8).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $(x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (1), (2) *с неотрицательными начальными условиями* (3). *Тогда при* $t \in [0, \tau]$ *для второй и третьей компонент решения* $y(t)$ *и* $z(t)$ *имеют место следующие оценки:*

$$y(t) \leq \left(\eta + \int\limits_{-\tau}^{0} kbe^{(D+\mu)(\tau+\xi)}\varphi(\xi)\psi(\xi)\,d\xi\right)e^{-(D+\mu)t}, \quad t \in [0, \tau], \tag{9}$$

$$z(t) \leq \psi(0)e^{-\nu t} + D\tau\left(\eta + \int\limits_{-\tau}^{0} kbe^{(D+\mu)(\tau+\xi)}\varphi(\xi)\psi(\xi)\,d\xi\right)e^{-\min\{\nu,(D+\mu)\}t}, \; t \in [0, \tau]. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $t \in [0, \tau]$. Из второго уравнения системы (1) вытекает представление для функции $y(t)$:

$$y(t) = \left(\eta + \int\limits_{0}^{t} kbe^{(D+\mu)s}\varphi(s-\tau)\psi(s-\tau)\,ds\right)e^{-(D+\mu)t}.$$

Проводя замену $s = \tau + \xi$ в интеграле и учитывая, что $t \leq \tau$, отсюда нетрудно получить (9).

Из третьего уравнения системы (1) вытекает представление для функции $z(t)$:

$$z(t) = \psi(0)e^{-\nu t} + \int\limits_{0}^{t} Dy(s)e^{-\nu(t-s)}\,ds.$$

Используя оценку (9), получим неравенство

$$z(t) \leq \psi(0)e^{-\nu t} + D\left(\eta + \int\limits_{-\tau}^{0} kbe^{(D+\mu)(\tau+\xi)}\varphi(\xi)\psi(\xi)\,d\xi\right)\int\limits_{0}^{t} e^{-(D+\mu)s}e^{-\nu(t-s)}\,ds.$$

Учитывая, что при $s \in [0, t]$ имеет место оценка

$$e^{-(D+\mu)s}e^{-\nu(t-s)} \leq e^{-\min\{\nu,(D+\mu)\}t},$$

и используя неравенство $t \leq \tau$, приходим к оценке (10).

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $(x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (1), (2) *с неотрицательными начальными условиями* (3). *Тогда при* $t \in [0, \tau]$ *для третьей компоненты решения* $z(t)$ *справедлива оценка*

$$z(t) \leq Z, \quad Z = \psi(0) + D\tau\left(\eta + \int\limits_{-\tau}^{0} kbe^{(D+\mu)(\tau+\xi)}\varphi(\xi)\psi(\xi)\,d\xi\right), \quad t \in [0, \tau]. \tag{11}$$

Получим оценки для $y(t)$ и $z(t)$ при $t \geq \tau$. Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$V(t,y,z) = hy^2(t) + z^2(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \gamma e^{-\varkappa(t-s)} z^2(s)\,ds, \tag{12}$$

где $\varkappa > 0$ удовлетворяет неравенству

$$e^{\varkappa\tau/2} kbrD < a\nu(D+\mu), \tag{13}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(-(D+\mu-\nu) + \sqrt{4e^{\varkappa\tau/2}\frac{kbrD}{a} + (D+\mu-\nu)^2}\right), \tag{14}$$

$$h = e^{-\varkappa\tau/2}\frac{aD}{kbr}. \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (5) *и* $(x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$ — *решение начальной задачи* (1), (2) *с неотрицательными начальными условиями* (3). *Тогда если* $\varphi(0) > 0$, *то при* $t \geq \tau$ *для второй и третьей компонент решения* $y(t)$ *и* $z(t)$ *справедливы оценки*

$$y(t) \leq \sqrt{h^{-1}pV(\tau,y,z)}\ e^{-\delta(t-\tau)/2}, \quad t \geq \tau, \tag{16}$$

$$z(t) \leq \sqrt{pV(\tau,y,z)}\ e^{-\delta(t-\tau)/2}, \quad t \geq \tau, \tag{17}$$

где

$$\delta = \min\{c, \varkappa\}, \tag{18}$$

$$c = (D+\mu+\nu) - \sqrt{4e^{\varkappa\tau/2}\frac{kbrD}{a} + (D+\mu-\nu)^2} > 0, \tag{19}$$

$$p = e^J, \quad J = e^{\varkappa\tau/2}\frac{akbD}{2r^2\gamma}\left(\varphi(0) - \frac{r}{a}\right)\left(\varphi(0) + \frac{3r}{a}\right). \tag{20}$$

Замечание. Неравенство $c > 0$ вытекает из условия (13).

Доказательство. Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (12). Продифференцируем его вдоль решения начальной задачи (1), (2):

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z) = -2h(D+\mu)y^2(t) + 2Dy(t)z(t) - (2\nu-\gamma)z^2(t)$$
$$+ 2hkbx(t-\tau)z(t-\tau)y(t) - \gamma e^{-\varkappa\tau}z^2(t-\tau) - \varkappa\int\limits_{t-\tau}^{t}\gamma e^{-\varkappa(t-s)}z^2(s)\,ds.$$

В силу неравенства

$$2hkbx(t-\tau)z(t-\tau)y(t) - \gamma e^{-\varkappa\tau}z^2(t-\tau) \leq h^2 e^{\varkappa\tau}\frac{k^2b^2x^2(t-\tau)}{\gamma}y^2(t)$$

получим оценку

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z) \leq -\left\langle R\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t)\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$+ h^2 e^{\varkappa\tau}\frac{k^2b^2}{\gamma}\left(x^2(t-\tau) - \frac{r^2}{a^2}\right)y^2(t) - \varkappa\int\limits_{t-\tau}^{t}\gamma e^{-\varkappa(t-s)}z^2(s)\,ds,$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \left(2h(D+\mu) - h^2 e^{\varkappa\tau} \frac{k^2b^2r^2}{a^2\gamma}\right) & -D \\ -D & (2\nu-\gamma) \end{pmatrix}$$

и символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение векторов. Учитывая явный вид величин h, γ, c (см. формулы (14), (15), (19)), нетрудно убедиться в том, что выполнено неравенство

$$\left\langle R\begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}\right\rangle \geq c\left\langle \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}\right\rangle, \quad y,z\in\mathbb{R}.$$

Отсюда следует оценка

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z) \leq -c(hy^2(t)+z^2(t)) \\ + h^2e^{\varkappa\tau}\frac{k^2b^2}{\gamma}\left(x^2(t-\tau)-\frac{r^2}{a^2}\right)y^2(t) - \varkappa\int\limits_{t-\tau}^{t}\gamma e^{-\varkappa(t-s)}z^2(s)\,ds.$$

Используя обозначение (18) величины δ и определение (12) функционала $V(t,y,z)$, получим неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z) \leq -\delta V(t,y,z) + h^2e^{\varkappa\tau}\frac{k^2b^2}{\gamma}\left(x^2(t-\tau)-\frac{r^2}{a^2}\right)y^2(t).$$

Поскольку $\varphi(0)>0$, в силу леммы 1 выполнена оценка (7). Учитывая данную оценку, обозначение величины h и определение функционала $V(t,y,z)$, при $t\geq\tau$ получим

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z) \leq \left[-\delta + e^{\varkappa\tau/2}\frac{akbD}{r\gamma}\left(\left(\frac{r}{a}+\left(\varphi(0)-\frac{r}{a}\right)e^{-r(t-\tau)}\right)^2-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]V(t,y,z).$$

Отсюда в силу определения p из (20) имеем

$$V(t,y,z)\leq pV(\tau,y,z)e^{-\delta(t-\tau)}, \quad t\geq\tau.$$

Учитывая определение функционала $V(t,y,z)$, из данной оценки получаем неравенства (16) и (17).

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполнено условие (5) и $(x(t),y(t),z(t))^{\mathrm{T}}$ — решение начальной задачи (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). Тогда если $0<\varphi(0)\leq\frac{r}{a}$, то при $t\geq\tau$ для третьей компоненты решения $z(t)$ справедлива оценка*

$$z(t)\leq\sqrt{V(\tau,y,z)}\;e^{-\delta(t-\tau)/2}, \quad t\geq\tau, \tag{21}$$

где $V(\tau,y,z)$ определено в (12), δ — в (18).

Получим оценки, характеризующие скорость сходимости первой компоненты решения $x(t)$ к величине $\frac{r}{a}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (5) и $(x(t),y(t),z(t))^{\mathrm{T}}$ — решение начальной задачи (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). Тогда для первой компоненты решения $x(t)$ имеют место следующие утверждения:*

(1) *если* $0 < \varphi(0) \le \frac{r}{a}$, *то справедливы оценки*

$$\max\left\{0, \frac{r}{a} - X_1(t-\tau)e^{-\min\{r,(\delta/2)\}(t-\tau)}\right\} \le x(t) \le \frac{r}{a}, \quad t \ge \tau, \tag{22}$$

где δ *определено в* (18),

$$X_1(t) = \frac{1}{\varphi(0)}\frac{r}{a}\exp\left(b\left(Z\tau + \frac{2}{\delta}\sqrt{V(\tau,y,z)}\right)\right) \times \left(\left(\frac{r}{a} - \varphi(0)\right)e^{-r\tau} + \varphi(0)b(Z\tau + \sqrt{V(\tau,y,z)}\ t)\right), \tag{23}$$

Z *определено в* (11), $V(\tau,y,z)$ — *в* (12);

(2) *если* $\varphi(0) > \frac{r}{a}$, *то справедливы оценки*

$$\max\left\{0, \frac{r}{a} - X_2(t-\tau)e^{-\min\{r,(\delta/2)\}(t-\tau)}\right\} \le x(t) \le \frac{r}{a} + \left(\varphi(0) - \frac{r}{a}\right)e^{-rt}, \quad t \ge \tau, \tag{24}$$

где

$$X_2(t) = \exp\left(b\left(Z\tau + \frac{2}{\delta}\sqrt{pV(\tau,y,z)}\right)\right)\varphi(0)b(Z\tau + \sqrt{pV(\tau,y,z)}\ t), \tag{25}$$

p *определено в* (20).

Доказательство. Сначала заметим, что в формулах (22) и (24) оценки сверху на функцию $x(t)$ следуют из леммы 1. Получим оценки снизу. Из первого уравнения системы (1) вытекает представление для функции $x(t)$:

$$x(t) = \frac{r}{a} - \frac{r}{a}\left(\frac{r}{a} - \varphi(0) + \varphi(0)\int_0^t bz(s)e^{rs}\exp\left(-\int_0^s bz(\xi)\,d\xi\right)ds\right) \times \left(\frac{r}{a} + \varphi(0)\int_0^t re^{rs}\exp\left(-\int_0^s bz(\xi)\,d\xi\right)ds\right)^{-1}.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\frac{r}{a} - x(t) \le \frac{r}{a}\left(\frac{r}{a} - \varphi(0) + \varphi(0)\int_0^t bz(s)e^{rs}\,ds\right) \times \left(\frac{r}{a} + \varphi(0)\int_0^t re^{rs}\exp\left(-\int_0^s bz(\xi)\,d\xi\right)ds\right)^{-1}. \tag{26}$$

(I) Сначала рассмотрим случай, когда $0 < \varphi(0) \le \frac{r}{a}$. Воспользуемся следующей оценкой:

$$\frac{r}{a} + \varphi(0)\int_0^t re^{rs}\exp\left(-\int_0^s bz(\xi)\,d\xi\right)ds \ge \exp\left(-\int_0^t bz(\xi)\,d\xi\right)\left(\frac{r}{a} + \varphi(0)\int_0^t re^{rs}\,ds\right) \ge \exp\left(-\int_0^t bz(\xi)\,d\xi\right)\varphi(0)e^{rt}. \tag{27}$$

Тогда из (26) получим неравенство

$$\frac{r}{a} - x(t) \le \frac{1}{\varphi(0)} \frac{r}{a} \exp\left(\int\limits_0^t bz(\xi)\,d\xi\right)\left(\left(\frac{r}{a} - \varphi(0)\right)e^{-rt} + \varphi(0)\int\limits_0^t bz(s)e^{-r(t-s)}\,ds\right). \tag{28}$$

Оценим интегралы, зависящие от функции $z(t)$. Для этого воспользуемся оценками (11), (21). Имеем

$$\int\limits_0^t bz(\xi)\,d\xi \le b\left(Z\tau + \sqrt{V(\tau,y,z)}\int\limits_\tau^t e^{-\delta(\xi-\tau)/2}\,d\xi\right)$$
$$\le b\left(Z\tau + \frac{2}{\delta}\sqrt{V(\tau,y,z)}\right), \quad t \ge \tau. \tag{29}$$

Далее,

$$\int\limits_0^t bz(s)e^{-r(t-s)}\,ds \le b\left(Z\tau e^{-r(t-\tau)} + \sqrt{V(\tau,y,z)}\int\limits_\tau^t e^{-\delta(s-\tau)/2}e^{-r(t-s)}\,ds\right)$$
$$\le b(Z\tau + \sqrt{V(\tau,y,z)}\ (t-\tau))e^{-\min\{r,(\delta/2)\}(t-\tau)}, \quad t \ge \tau. \tag{30}$$

С учетом неравенств (29) и (30) из неравенства (28) получим следующую оценку:

$$\frac{r}{a} - x(t) \le \frac{1}{\varphi(0)}\frac{r}{a}\exp\left(b\left(Z\tau + \frac{2}{\delta}\sqrt{V(\tau,y,z)}\right)\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{r}{a} - \varphi(0)\right)e^{-rt} + \varphi(0)b(Z\tau + \sqrt{V(\tau,y,z)}\ (t-\tau))e^{-\min\{r,(\delta/2)\}(t-\tau)}\right)$$
$$\le X_1(t-\tau)e^{-\min\{r,(\delta/2)\}(t-\tau)},$$

где $X_1(t)$ определено в (23). Отсюда непосредственно вытекает оценка (22).

(II) Теперь рассмотрим случай, когда $\varphi(0) > \frac{r}{a}$. В этом случае из неравенства (26) следует оценка

$$\frac{r}{a} - x(t) \le \frac{r}{a}\varphi(0)\int\limits_0^t bz(s)e^{rs}\,ds\left(\frac{r}{a} + \varphi(0)\int\limits_0^t re^{rs}\exp\left(-\int\limits_0^s bz(\xi)\,d\xi\right)ds\right)^{-1}.$$

По аналогии с оценкой (27) нетрудно получить неравенство

$$\frac{r}{a} + \varphi(0)\int\limits_0^t re^{rs}\exp\left(-\int\limits_0^s bz(\xi)\,d\xi\right)ds \ge \exp\left(-\int\limits_0^t bz(\xi)\,d\xi\right)\frac{r}{a}e^{rt},$$

откуда

$$\frac{r}{a} - x(t) \le \exp\left(\int\limits_0^t bz(\xi)\,d\xi\right)\varphi(0)\int\limits_0^t bz(s)e^{-r(t-s)}\,ds.$$

Оценим интегралы, зависящие от функции $z(t)$. Для этого воспользуемся оценками (11), (17). По аналогии с неравенствами (29) и (30) установим следующие оценки:

$$\int\limits_0^t bz(\xi)\,d\xi \le b\left(Z\tau + \frac{2}{\delta}\sqrt{pV(\tau,y,z)}\right),$$

$$\int_0^t bz(s)e^{-r(t-s)}\,ds \le b(Z\tau + \sqrt{pV(\tau,y,z)}\ (t-\tau))e^{-\min\{r,(\delta/2)\}(t-\tau)}, \quad t \ge \tau.$$

Отсюда получим неравенство

$$\frac{r}{a} - x(t) \le X_2(t-\tau)e^{-\min\{r,(\delta/2)\}(t-\tau)},$$

где $X_2(t)$ определено в (25). Из этой оценки вытекает (24).

Теорема доказана.

§ 3. Область притяжения и оценки скорости сходимости к положению равновесия (x_0, y_0, z_0)

В данном параграфе будем предполагать, что выполнено условие (6), гарантирующее асимптотическую устойчивость положения равновесия (x_0, y_0, z_0) системы (1) при любом запаздывании $\tau > 0$. Получим оценки на область притяжения данного положения равновесия и оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности.

Для этого сначала сведем задачу об исследовании устойчивости положения равновесия (x_0, y_0, z_0) к исследованию устойчивости нулевого решения. Замена

$$x(t) = x_0 + \hat{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \hat{y}(t), \quad z(t) = z_0 + \hat{z}(t) \tag{31}$$

приводит систему (1) к виду

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{y}}(t) = A\hat{\boldsymbol{y}}(t) + B\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau) + F(\hat{\boldsymbol{y}}(t)) + G(\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau)), \tag{32}$$

где $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} -ax_0 & 0 & -bx_0 \\ 0 & -(D+\mu) & 0 \\ 0 & D & -\nu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu(D+\mu)}{D}\frac{z_0}{x_0} & 0 & \frac{\nu(D+\mu)}{D} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$F(\hat{\boldsymbol{y}}(t)) = \begin{pmatrix} -a\hat{x}^2(t) - b\hat{x}(t)\hat{z}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau)) = \begin{pmatrix} 0 \\ kb\hat{x}(t-\tau)\hat{z}(t-\tau) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского, предложенный в [11]:

$$V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) = \langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)\hat{\boldsymbol{y}}(s), \hat{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds, \tag{35}$$

где

$$H = H^* > 0, \quad K(s) \in C^1([0,\tau]), \tag{36}$$

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau]. \tag{37}$$

(Неравенство $S > 0$ (< 0) означает, что матрица S является положительно (отрицательно) определенной.) Отметим, что помимо условий (36) и (37) из [11] также вытекает дополнительное условие на матрицы H и $K(s)$, гарантирующее асимптотическую устойчивость нулевого решения систем вида (32):

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB \\ B^*H & -K(\tau) \end{pmatrix} > 0. \tag{38}$$

Первая наша задача — подобрать матрицы H и $K(s)$ так, чтобы выполнялись условия (36)–(38).

Положим

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}, \quad K(s) = e^{-ms}(B^*B + Q), \; m > 0, \quad Q = Q^* > 0. \tag{39}$$

Принимая во внимание, что $B^*H = B^*\widetilde{H}$, где

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

условие (38) можно переписать в виде

$$C = \begin{pmatrix} L - Q & 0 \\ 0 & e^{-m\tau}Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{m\tau}\widetilde{H}^*\widetilde{H} & -\widetilde{H}^*B \\ -B^*\widetilde{H} & e^{-m\tau}B^*B \end{pmatrix} > 0, \tag{41}$$

где

$$L = -(HA + A^*H + B^*B + e^{m\tau}\widetilde{H}^*\widetilde{H}) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Из представления (41) вытекает, что если матрица L положительно определенная, а норма матрицы Q достаточно мала, то матрица C также положительно определенная.

Подберем величины h_{ij} и $m > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $L > 0$. В силу обозначений (33), (39), (40) элементы матрицы L имеют следующий вид:

$$\begin{cases} l_{11} = 2h_{11}ax_0 - \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2}\left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2 - e^{m\tau}h_{12}^2, \\ \\ l_{12} = h_{12}(ax_0 + D + \mu) - h_{13}D - e^{m\tau}h_{12}h_{22}, \\ l_{13} = h_{11}bx_0 + h_{13}(ax_0 + \nu) - \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2}\frac{z_0}{x_0} - e^{m\tau}h_{12}h_{23}, \\ l_{22} = 2h_{22}(D + \mu) - 2h_{23}D - e^{m\tau}h_{22}^2, \\ l_{23} = h_{12}bx_0 + h_{23}(D + \mu + \nu) - h_{33}D - e^{m\tau}h_{22}h_{23}, \\ l_{33} = 2h_{13}bx_0 + 2h_{33}\nu - \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2} - e^{m\tau}h_{23}^2. \end{cases}$$

Полагая

$$h_{22} = e^{-m\tau}(D + \mu), \quad h_{23} = 0, \quad h_{12} = h_{13}\frac{D}{ax_0}, \tag{43}$$

$$h_{11} = \frac{1}{bx_0}\left(\frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2}\frac{z_0}{x_0} - h_{13}(ax_0 + \nu)\right), \tag{44}$$

$$h_{33} = e^{-m\tau}\frac{\nu(D+\mu)^2}{D^2} + h_{13}\frac{b}{a}, \tag{45}$$

будем иметь

$$\begin{cases} l_{11} = \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2}\frac{z_0}{x_0}\left(\frac{2ax_0 - bz_0}{bx_0}\right) - 2h_{13}(ax_0 + \nu)\frac{a}{b} - e^{m\tau}h_{13}^2\frac{D^2}{(ax_0)^2}, \\ l_{12} = l_{13} = 0, \quad l_{22} = e^{-m\tau}(D + \mu)^2, \quad l_{23} = -e^{-m\tau}\frac{\nu(D+\mu)^2}{D}, \\ l_{33} = e^{-m\tau}\frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2} - \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2}(1 - e^{-m\tau}) + 2h_{13}(ax_0 + \nu)\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Положительная определенность матрицы L эквивалентна условиям

$$\begin{cases} h_{13} < e^{-m\tau}(ax_0+\nu)\frac{a}{b}\frac{(ax_0)^2}{D^2}\Big(\sqrt{1+e^{m\tau}\frac{bz_0(2ax_0-bz_0)\nu^2(D+\mu)^2}{(ax_0)^4(ax_0+\nu)^2}}-1\Big), \\ h_{13} > (1-e^{-m\tau})\frac{a}{2b}\frac{\nu^2(D+\mu)^2}{(ax_0+\nu)D^2}. \end{cases} \tag{46}$$

Отсюда вытекает условие на величину $m > 0$:

$$e^{m\tau} < 1+2\frac{(ax_0+\nu)^2}{\nu^2(D+\mu)^2}\left(\sqrt{(ax_0-bz_0)^4+bz_0(2ax_0-bz_0)\frac{\nu^2(D+\mu)^2}{(ax_0+\nu)^2}}-(ax_0-bz_0)^2\right). \tag{47}$$

Заметим, что выполнение неравенств (46) и (47) возможно только при условии $0 < bz_0 < 2ax_0$. Нетрудно видеть, что в силу обозначений (4) это условие эквивалентно (6). Итак, матрица L положительно определенная.

Покажем положительную определенность матрицы H. Действительно, поскольку все собственные числа матрицы A отрицательны и в силу (42) имеет место неравенство

$$HA + A^*H \le -L < 0,$$

то H является решением матричного уравнения Ляпунова $HA+A^*H = -S$, где $S = S^* > 0$. Известно, что в этом случае матрица H положительно определенная.

Осталось определить матрицу Q. Положим

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < \frac{h_{\min}\beta}{2}, \tag{48}$$

где $h_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H, а число $\beta > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$L \ge \beta H. \tag{49}$$

В качестве β можно взять, например, $\beta = \|L^{-1/2}HL^{-1/2}\|^{-1}$ (здесь используется спектральная норма матрицы).

Замечание. Матрица Q из (48) не положительно определенная. Как будет видно из доказательства теоремы 3, неотрицательной определенности достаточно для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (32).

Итак, матрицы $H = H^* > 0$ и $K(s) = K^*(s) \ge 0$ построены.

Сформулируем и докажем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (6) *и* $\boldsymbol{y}(t) = (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$ *— решение начальной задачи* (1), (2) *с неотрицательными начальными данными* (3). *Если начальные данные удовлетворяют условиям*

$$\max_{t\in[-\tau,0]} |\varphi(t) - x_0| \le \theta, \tag{50}$$

$$\sqrt{V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)} < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}}\frac{\sqrt{V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)}}{\big(1-\frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)}\big)} \le \theta, \tag{51}$$

где

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \eta \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

$$\theta = \frac{e^{-m\tau/2}\alpha}{kb\sqrt{h_{22}h_{\min}}}, \quad \varepsilon = \min\left\{\beta - \frac{2\alpha}{h_{\min}}, m\right\}, \quad q = \frac{\sqrt{h_{11}}}{h_{\min}}(a + \sqrt{a^2+b^2}), \tag{52}$$

то справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}_0\| \le \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} \frac{\sqrt{V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)}\right)} e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0. \tag{53}$$

Доказательство. Рассмотрим начальную задачу (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). С помощью замены (31) перейдем к системе (32) с начальными условиями

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \varphi(t) - x_0, \quad \hat{z}(t) = \psi(t) - z_0, \quad t \in [-\tau, 0], \\ \hat{x}(+0) = \varphi(0) - x_0, \quad \hat{y}(+0) = \eta - y_0, \quad \hat{z}(+0) = \psi(0) - z_0. \end{cases} \tag{54}$$

Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (35), в котором элементы матрицы H определены в (43)–(46), матрица $K(s)$ имеет вид $K(s) = e^{-ms}(B^*B + Q)$, где $m > 0$ определено в (47), а матрица Q определена в (48). Дифференцируя функционал (35) вдоль решения начальной задачи (32), (54), получим

$$\frac{d}{dt}V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) = -\left\langle C\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{y}}(t)\\ \hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{y}}(t)\\ \hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle + 2\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), F(\hat{\boldsymbol{y}}(t))\rangle$$
$$+ 2\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), G(\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau))\rangle - m\int_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)\hat{\boldsymbol{y}}(s), \hat{\boldsymbol{y}}(s)\rangle ds,$$

где матрица C определена в (38). В силу представления (41) и неравенства (49) отсюда следует оценка

$$\frac{d}{dt}V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) \le -\beta\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle + \langle Q\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle - e^{-m\tau}\langle Q\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau), \hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau)\rangle$$
$$+ 2\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), F(\hat{\boldsymbol{y}}(t))\rangle + 2\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), G(\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau))\rangle - m\int_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)\hat{\boldsymbol{y}}(s), \hat{\boldsymbol{y}}(s)\rangle ds. \tag{55}$$

Оценим $2\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), F(\hat{\boldsymbol{y}}(t))\rangle$. Учитывая явный вид (34) вектор-функции $F(\hat{\boldsymbol{y}}(t))$, будем иметь

$$2\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), F(\hat{\boldsymbol{y}}(t))\rangle \le 2\sqrt{\langle HF(\hat{\boldsymbol{y}}(t)), F(\hat{\boldsymbol{y}}(t))\rangle}\sqrt{\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle}$$
$$\le \sqrt{h_{11}}(a + \sqrt{a^2+b^2})(\hat{x}^2(t) + \hat{z}^2(t))\sqrt{H\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle} \le qV^{3/2}(t,\hat{\boldsymbol{y}}), \tag{56}$$

где q определено в (52).

Оценим

$$w(t) = \langle Q\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle - e^{-m\tau}\langle Q\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau), \hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau)\rangle + 2\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), G(\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau))\rangle.$$

Используя явный вид (48) матрицы Q и явный вид (34) вектор-функции $G(\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau))$, получим неравенство

$$w(t) \le \alpha\hat{z}^2(t) - \alpha e^{-m\tau}\hat{z}^2(t-\tau) + 2\sqrt{\langle HG(\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau)), G(\hat{\boldsymbol{y}}(t-\tau))\rangle}\sqrt{\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle}$$
$$\le \frac{\alpha}{h_{\min}}\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle - \alpha e^{-m\tau}\hat{z}^2(t-\tau) + 2kb\sqrt{h_{22}}\,|\hat{x}(t-\tau)||\hat{z}(t-\tau)|\sqrt{\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle}$$
$$\le \frac{\alpha}{h_{\min}}\left(1 + \frac{\hat{x}^2(t-\tau)}{\theta^2}\right)\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t), \hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle, \tag{57}$$

где θ определено в (52).

В силу неравенств (56) и (57) из (55) получим оценку

$$\frac{d}{dt}V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) \le -\left(\beta - \frac{2\alpha}{h_{\min}}\right)\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t),\hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle + qV^{3/2}(t,\hat{\boldsymbol{y}})$$
$$-\frac{\alpha}{h_{\min}}\left(1-\frac{\hat{x}^2(t-\tau)}{\theta^2}\right)\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t),\hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle - m\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)\hat{\boldsymbol{y}}(s),\hat{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds.$$

С учетом обозначения (52) величины ε и определения (35) функционала $V(t,\hat{\boldsymbol{y}})$ отсюда следует неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) \le -\varepsilon V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) + qV^{3/2}(t,\hat{\boldsymbol{y}}) - \frac{\alpha}{h_{\min}}\left(1-\frac{\hat{x}^2(t-\tau)}{\theta^2}\right)\langle H\hat{\boldsymbol{y}}(t),\hat{\boldsymbol{y}}(t)\rangle. \quad (58)$$

Сначала рассмотрим случай $t\in[0,\tau]$. В силу условия (50) из оценки (58) вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) \le -\varepsilon V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) + qV^{3/2}(t,\hat{\boldsymbol{y}}). \quad (59)$$

Отсюда нетрудно получить оценку на $V(t,\hat{\boldsymbol{y}})$. Действительно, рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v(t) = -\varepsilon v(t) + qv^{3/2}(t), \\ v(0) = V(0,\hat{\boldsymbol{y}}), \end{cases}$$

где $V(0,\hat{\boldsymbol{y}}) = V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)$. Тогда справедлива оценка (см., например, [33, гл. III, § 4])

$$V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) \le v(t).$$

Учитывая явный вид функции $v(t)$, отсюда получаем неравенство

$$V(t,\hat{\boldsymbol{y}}) \le \frac{V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)}{\left(1-\frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)}\right)^2}e^{-\varepsilon t}. \quad (60)$$

В частности, в силу условия (51) при $t\in[0,\tau]$ имеем

$$|\hat{x}(t)| \le \frac{\sqrt{V(t,\hat{\boldsymbol{y}})}}{\sqrt{h_{\min}}} \le \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}}\frac{\sqrt{V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)}}{\left(1-\frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{y}_0)}\right)} \le \theta. \quad (61)$$

Теперь рассмотрим случай $t\in[\tau,2\tau]$. Учитывая (61), из оценки (58) получим (59), откуда вытекает неравенство (60). Проводя аналогичные рассуждения для случая $t\in[n\tau,(n+1)\tau]$, $n\in\mathbb{N}$, установим неравенство (60) при всех $t>0$.

В силу замены (31) из оценки (60) вытекает неравенство (53).

Теорема доказана.

Благодарности. Авторы выражают благодарность д. ф.-м. н. Г. В. Демиденко и к. ф.-м. н. И. И. Матвеевой за внимание к работе и рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gopalsamy K.* Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1992. (Math. Appl. (Dordrecht); V. 74).
2. *Kuang Y.* Delay differential equations: with applications in population dynamics. Boston, MA: Acad. Press, 1993. (Math. Sci. Eng.; V. 191).

3. *Smith H. L.* Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. (Math. Surv. Monogr.; V. 41).

4. *Erneux T.* Applied delay differential equations. New York: Springer-Verl., 2009. (Surv. Tutor. Appl. Math. Sci.; V. 3).

5. *Lotka A. J.* The elements of physical biology. Baltimore: Williams & Wilkins Co.; London: Bailliere, Tindall & Cox, 1925.

6. *Volterra V.* Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Mem. Reale Accad. Naz. Lincei. 1926. V. 2. P. 31–113.

7. *Liu Sh., Chen L., Agarwal R.* Recent progress on stage-structured population dynamics // Math. Comput. Modelling. 2002. V. 36, N 11–12. P. 1319–1360.

8. *Ruan S.* On nonlinear dynamics of predator-prey models with discrete delay // Math. Model. Nat. Phenom. 2009. V. 4, N 2. P. 140–188.

9. *Wang W., Chen L.* A predator-prey system with stage-structure for predator // Comput. Math. Appl. 1997. V. 33, N 8. P. 83–91.

10. *Xu R.* Global stability and Hopf bifurcation of a predator-prey model with stage structure and delayed predator response // Nonlinear Dynam. 2012. V. 67. P. 1683–1693.

11. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

12. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.

13. *Mondié S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach // IEEE Trans. Automatic Control. 2005. V. 50, N 2. P. 268–273.

14. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

15. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.

16. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

17. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of nonlinear time-delay systems of neutral type // Electron. J. Differ. Equ. 2015. V. 2015, N 34. P. 1–14.

18. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qualitative Theory of Differ. Equ. 2015. V. 2015, N 83. P. 1–22.

19. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

20. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

21. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.

22. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.

23. *Matveeva I. I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electron. J. Differ. Equ. 2020. V. 2020, N 20. P. 1–12.

24. *Ыскак Т.* Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.

25. *Перцев Н. В.* Применение М-матриц для построения экспоненциальных оценок решений задачи Коши для некоторых систем линейных разностных и дифференциальных уравнений // Мат. тр. 2013. Т. 16, № 2. С. 111–141.

26. *Перцев Н. В.* Экспоненциально убывающие оценки по части компонент решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, возникающих в моделях живых систем // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 901–912.

27. *Скворцова М. А.* Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 2. С. 108–120.

28. *Скворцова М. А.* Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания // Динамические системы. 2017. Т. 7, № 3. С. 257–274.

29. *Скворцова М. А.* Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2018. Т. 25. С. 109–125.

30. *Скворцова М. А.* Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 1697–1718.

31. *Скворцова М. А.* Асимптотические свойства решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 4. С. 63–72.

32. *Скворцова М. А.* Асимптотические свойства решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Динамические системы. 2019. Т. 9, № 4. С. 367–389.

33. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 14 августа 2020 г.
После доработки 11 ноября 2020 г.
Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Скворцова Мария Александровна, Ыскак Тимур
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`sm-18-nsu@yandex.ru`, `istima92@mail.ru`