Г. В. Меладзе, Д. В. Поцхишвили, О сходимости разностных схем газовой динамики в квазилагранжевых переменных,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 4, 563–573

https://www.mathnet.ru/zvmmf4022

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 4

УДК 519.6:533.7

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В КВАЗИЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

МЕЛАДЗЕ Г.В., ПОЦХИШВИЛИ Д.В.

(Тбилиси)

Рассматривается начально-краевая задача для уравнений газовой динамики в квазилагранжевых переменных. Доказывается сходимость к решению чисто неявной разностной схемы в изотермическом случае при наличии в решении слабых разрывов.

При наличии в среде источников (стоков) массы, импульса и энергии удобно вводить квазилагранжевы переменные [1]. В настоящей работе изучаются схемы в квазилагранжевых переменных для частного случая изотермии. Отметим, что данная методика позволяет доказывать сходимость схем для полной системы нелинейных уравнений, включая закон сохранения энергии газовой динамики для идеального газа. Сходимость разностных схем в лагранжевых переменных изучалась в [2], [3]. В [4] исследована сходимость полностью консервативной дифференциально-разностной схемы в эйлеровых переменных. Ниже развивается методика доказательства сходимости, предложенная в [4], а также существенно используется техника энергетических оценок из [2], [3].

Рассмотрим уравнения газовой динамики для изотермического газа (для простоты скорость звука считаем равной 1):

$$\text{(1а)}\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\eta\psi)=\frac{\partial v}{\partial q},$$

$$\text{(1б)}\qquad \frac{\partial}{\partial t}(v\psi)=-\frac{\partial\rho}{\partial q}+g_2(x,t)\psi,$$

$$\text{(1в)}\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}=g_1(x,t)\psi,\qquad \frac{\partial x}{\partial t}=v,\qquad \eta=\frac{1}{\rho}.$$

Поставим начальные и граничные условия в области $\Omega=\{0\leqslant q\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$:

$$\text{(2а)}\qquad \rho(q,0)=\rho_0(q),\qquad v(q,0)=v_0(q),\qquad q\in[0,l],$$

$$\text{(2б)}\qquad \rho(l,t)=\rho_1(t),\qquad v(0,t)=v_1(t),\qquad t\in[0,T],$$

$$\text{(2в)}\qquad \psi(q,0)=1,\qquad x(q,0)=x_0(q).$$

Функция $x_0(q)$ определяется из равенства

$$q=\int\limits_0^{x_0(q)}\rho_0(y)\,dy.$$

Относительно функций ρ, v, g_1, g_2 будем предполагать, что выполнены условия:

1) ρ, v непрерывны при $(q, t)\in\Omega$; в области Ω количество линий, на которых ρ, v имеют слабый разрыв (см. [5]), конечно; вне этих линий ρ, $v\in C^{3,3}(\Omega)$;

2) $g_1(x, t)$, $g_2(x, t)$ — функции класса $C^{1,1}\{(-\infty, +\infty)\times[0, T]\}$;

3) функции η, ρ, ψ ограничены снизу константой $\delta>0$;

4) решение задачи (1), (2) существует и единственно.

Отметим, что эти условия определяют класс гладкости функций x, ψ.

§ 1. Разностная схема и оценка погрешности аппроксимации

Рассмотрим в области Ω сетку $\bar\omega_{h,\tau}=\bar\omega_h\times\bar\omega_\tau$:

$$\bar\omega_h=\{q_i=ih,\ q_{i+1/2}=(i+1/2)h,\ i=0, 1, \dots, N,\ Nh=l\},$$

$$\bar\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0, 1, \dots, N_1,\ N_1\tau=T\}.$$

На $\bar\omega_h$ введем скалярные произведения

$$[u, v]=\sum_{i=0}^{N} u_i v_i h,\qquad [u, v)=\sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i h,\qquad (u, v]=\sum_{i=1}^{N} u_i v_i h$$

и соответствующие нормы $|[u]|$, $|[u||$, $||u]|$.

На сетке $\omega_{h,\tau}$ исходную задачу (1), (2) аппроксимируем разностной схемой

(1.1а) $\qquad (\beta w_*)_t=y_q^{(\sigma_1)},\qquad (yw)_t=-z_{\bar q}^{(\sigma_2)}+g_2(\bar x, t_j)\,w^{(\sigma_3)},$

(1.1б) $\qquad w_t=g_1(\bar x, t_j)\,w^{(\sigma_3)},\qquad \bar x_t=y^{(\sigma_4)},\qquad \beta=1/z,$

где $g_i(\bar x, t_j)\equiv g_i(\bar x, j\tau)$, $i=1, 2$, $j=0, 1, \dots, N_1$. Сеточные функции z, β, y, w, $\bar x$ аппроксимируют, соответственно, функции ρ, η, v, ψ, $\bar x$.

Здесь использованы безындексные обозначения

$$y_i^j=y,\quad y_i^{j+1}=\hat y,\quad y_{i\pm1}^j=y(\pm1),\quad y_t=\frac{\hat y-y}{\tau},\quad y_q=\frac{y(+1)-y}{h},$$

$$y_{\bar q}=\frac{y-y(-1)}{h},\qquad y^{(\sigma)}=\sigma\hat y+(1-\sigma)y,\qquad y_*=0.5[y+y(+1)],$$

которые совпадают с обозначениями из [6]. Функции y, w, $\bar x$ отнесены к узлам сетки (q_i, t_j), функции z, β — к «полуцелым» точкам $(q_{i+1/2}, t_j)$, а функции g_1, g_2 — к «полуцелым» точкам по времени. В дальнейшем будем предполагать, что $\sigma_i=1$, $i=1, \dots, 4$, т. е. схема (1.1) чисто неявная.

Начальные и граничные условия имеют вид

(1.2а) $\qquad z(q_i, 0)=\rho_0(q_i),\qquad y(q_i, 0)=v_0(q_i, 0),$

$\qquad\qquad z(l, t_j)=\rho_1(t_j),\qquad y(0, t_j)=v_1(t_j),$

(1.2б) $\qquad \psi(q_i, 0)\equiv1,\qquad \bar x(q_i, 0)=x_0(q_i).$

Введем обозначения $z=\rho+\tilde\rho$, $\beta=\eta+\tilde\eta$, $y=v+\tilde v$, $w=\psi+\tilde\psi$, $\bar x=x+\tilde x$. Тогда для погрешности метода на j-м слое будем иметь следующие разностные соотношения:

(1.3а) $\qquad (w_*\tilde\eta)_t=-(\eta\tilde\psi_*)_t+\hat{\tilde v}_q+\varphi_1,$

(1.3б) $\qquad (w\tilde v)_t=-(v\tilde\psi)_t-\hat{\tilde\rho}_{\bar q}+[g_2(x+\tilde x, t_j)-g_2(x, t_j)]\hat\psi+$

$\qquad\qquad +g_2(x+\tilde x, t_j)\hat{\tilde\psi}+\varphi_2,$

(1.3в) $\quad \bar{\psi}_t=[g_1(x+\tilde{x}, t_j)-g_1(x, t_j)]\hat{\psi}+g_1(x+\tilde{x}, t_j)\hat{\hat{\psi}}+\varphi_3,$

(1.3г) $\quad \tilde{x}_t=\hat{\tilde{v}}+\varphi_4;$

(1.4а) $\quad \tilde{\rho}(q_i, 0)=0, \quad \tilde{v}(q_i, 0)=0, \quad \tilde{\psi}(q_i, 0)=0, \quad \tilde{x}(q_i, 0)=0,$

(1.4б) $\quad \tilde{\rho}(l, t_j)=0, \quad \tilde{v}(0, t_j)=0.$

Легко проверить, что если в окрестности какого-нибудь узла $\rho, v\in C^{3,3}$, то погрешность аппроксимации в этом узле будет $O(\tau+h^2)$. Оценим погрешность аппроксимации при условии 1):

(1.5а) $\quad \varphi_1=-(\eta\psi_*)_t+\hat{v}_q,$

(1.5б) $\quad \varphi_2=-(v\psi)_t-\hat{\rho}_{\bar{q}}+g_2(x, t_j)\hat{\psi},$

(1.5в) $\quad \varphi_3=-\psi_t+g_1(x, t_j)\hat{\psi}, \qquad \varphi_4=-x_t+\hat{v}.$

Следуя [2], [3], проинтегрируем уравнение (1а) на прямоугольнике $q_i\leqslant q\leqslant q_{i+1}$, $t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1}$:

$$\frac{1}{h}\left(\int\limits_{q_i}^{q_{i+1}}\eta\psi\,dq\right)_t-\frac{1}{\tau}\left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}v\,dt\right)_{\bar{q}}=0.$$

Следовательно, из (1.5а) получим $\varphi_1=\Delta_t^{(1)}-\xi_q^{(1)}$, где

$$\Delta^{(1)}=-\eta\psi_*+\frac{1}{h}\int\limits_{q_i}^{q_{i+1}}\eta\psi\,dq,\qquad \xi^{(1)}=-\hat{v}+\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}v\,dt.$$

Уравнение (1б) проинтегрируем на прямоугольнике $q_{i-1/2}\leqslant q\leqslant q_{i+1/2}$, $t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1}$:

$$\frac{1}{h}\left(\int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}}v\psi\,dq\right)_t+\frac{1}{\tau}\left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\rho\,dt\right)_{\bar{q}}-\frac{1}{\tau h}\int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}g_2(x, t)\,\psi\,dt\,dq=0.$$

Учитывая (1.5б), получаем $\varphi_2=\Delta_t^{(2)}+\xi_{\bar{q}}^{(2)}+\delta^{(2)}$, где

$$\Delta^{(2)}=-v\psi+\frac{1}{h}\int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}}v\psi\,dq,\qquad \xi^{(2)}=-\hat{\rho}+\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\rho\,dt,$$

$$\delta^{(2)}=g_2(x(q, t), t)\,\hat{\psi}-\frac{1}{\tau h}\int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}g_2(x(q, t), t)\,\psi\,dt\,dq.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\tau=h^\varkappa$, $1<\varkappa<2$. Из условия 1) следует, что при каждом фиксированном j множество узлов из ω_h, в окрестности которых ρ, v терпит слабый разрыв, конечно. Обозначим это множество через ω_p. Так как (см. [3])

$$\Delta^{(k)}=\begin{cases}O(h^2), & \text{если}\quad q\in\omega_h\backslash\omega_p,\\ O(h), & \text{если}\quad q\in\omega_p,\end{cases}\qquad k=1, 2,$$

$$\xi_q^{(1)}, \xi_{\bar{q}}^{(2)}=\begin{cases}O(\tau), & \text{если}\quad q\in\omega_h\backslash\omega_p;\\ O(\tau h^{-1}), & \text{если}\quad q\in\omega_p,\end{cases}$$

то $|[\Delta^{(1)}\|^2, \|\Delta^{(2)}]|^2=O(h^3), \qquad |[\xi_q^{(1)}\|^2, \|\xi_{\bar{q}}^{(2)}]|^2=O(\tau^2h^{-1}).$

Из условия 2) следует, что $\delta^{(2)}=O(\tau+h)$. Величины φ_3 и φ_4 имеют порядок $O(\tau)$ даже в тех точках, в окрестности которых производные от функции ρ, v терпят разрыв.

§ 2. Существование и единственность решения разностной схемы

Выберем α таким образом, чтобы выполнялись неравенства

(2.1) $$0<\alpha<\varkappa-1, \qquad 0<\alpha<(2-\varkappa)/2.$$

Лемма 1. *Пусть*

$$\max\{\|\tilde\eta\|_C, \|\tilde v\|_C, \|\tilde\psi\|_C, \|\tilde x\|_C\}<h^\alpha;$$

тогда существует h_1, которая зависит от α, δ и от функций η, v, ψ, x, g_1, g_2 так, что при $h\leqslant h_1$ выполняется следующее:

1) *разностная схема* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение* $\hat\beta$, $\hat y$, $\hat w$, $\hat{\tilde x}$, *где* $\hat\beta>0$, $\hat w>0$;

2) *для погрешности верна оценка* $\max\{\|\hat{\tilde\eta}\|_C, \|\hat{\tilde v}\|_C, \|\hat{\tilde\psi}\|_C, \|\hat{\tilde x}\|_C\}<C_1h^\alpha$, *где* $C_1>0$ — *константа, не зависящая от* h.

Доказательство. Функция $\hat w$ вычисляется явно, $\hat{\tilde x}$ вычисляется, если известно $\hat y$, поэтому достаточно доказать лемму для функций $\hat\beta$, $\hat y$ и в процессе доказательства $\hat w$ можно считать известным.

Рассмотрим итерационный процесс

(2.2) $$\frac{\beta^{k+1}\hat w_\circ-\beta w_\circ}{\tau}=y_q^k, \qquad \frac{y^{k+1}\hat w-yw}{\tau}=-z_{\bar q}^k+g_2\hat w,$$

(2.3) $$\beta^0=\beta, \qquad z^0=z, \qquad y^0=y.$$

Преобразуем его к виду $\Lambda^{k+1}=\varphi(\Lambda^k)$, где $\Lambda^k=(\beta^k, y^k)^\tau$. Покажем, что отображение $\varphi(\Lambda_1)$ в области изменений переменных

$$\Omega_1=\{\eta_{\min}-\delta/2<\beta_1<\eta_{\max}+\delta/2,\ v_{\min}-\delta/2<y_1<v_{\max}+\delta/2\}$$

(min и max обозначают, соответственно, минимальное и максимальное значения функции η и v в области Ω) является оператором сжатия. Очевидно, что можно выбрать h_1 таким образом, чтобы

$$\psi_{\min}-\delta/2<\hat w<\psi_{\max}+\delta/2 \quad \text{при} \quad h\leqslant h_1.$$

Оценим выражение $\|\varphi(\Lambda_1)-\varphi(\Lambda_2)\|_C$:

$$\varphi(\Lambda_1)-\varphi(\Lambda_2)=\left(\frac{\tau(y_1-y_2)_q}{\hat w_\circ}, -\frac{\tau(1/\beta_1-1/\beta_2)_{\bar q}}{\hat w}\right)^\tau.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left|\frac{\tau(y_1-y_2)_q}{\hat w_\circ}\right|\leqslant\gamma\|y_1-y_2\|_C, \qquad \left|\frac{\tau}{\hat w}\left(\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_1\beta_2}\right)_{\bar q}\right|\geqslant\gamma\|\beta_2-\beta_1\|_C,$$

где из принадлежности y_i, β_i, $i=1, 2$, области Ω_1 следует, что $\gamma=O(\tau h^{-1})=$ $=O(h^{\varkappa-1})$. Очевидно, можно выбрать h_1 таким образом, чтобы при $h\leqslant h_1$ имело место $\gamma\leqslant{}^1/_2$. Тем самым ясно, что оператор φ является оператором сжатия. Для сходимости итерационного процесса (2.2), (2.3) достаточно показать, что при $h \leqslant h_1$

(2.4) $$\frac{\|\Lambda^0-\varphi(\Lambda^0)\|_C}{1-{}^1/_2} \leqslant \frac{\delta}{4}, \qquad h^\alpha < \frac{\delta}{4};$$

Эти условия гарантируют, что все приближения Λ^k принадлежат области Ω_1:

$$\beta^1-\beta^0 = \frac{\beta(w_*-\hat{w}_*)+\tau y_q}{\hat{w}_*}, \qquad y^1-y^2 = \frac{y(w-\hat{w})-\tau(z_{\bar{q}}-g_2 w^{(0,5)})}{\hat{w}}.$$

Нетрудно показать, что

(2.5) $$\|\hat{\beta}-\beta^0\|_C=O(h^{\varkappa-1}), \qquad \|y^1-y^0\|_C=O(h^{\varkappa-1}),$$

что и доказывает при достаточно малом h_1 выполнение неравенств (2.4), откуда следует существование решения.

Докажем единственность. Пусть существует два решения: $\beta^{(1)}>0$, $y^{(1)}$ и $\beta^{(2)}>0$, $y^{(2)}$; тогда, учитывая (1.1), (1.2), можно написать

(2.6) $$\frac{\hat{w}_*(\overset{(1)}{\beta_k}-\overset{(2)}{\beta_k})}{\tau} = \frac{(\overset{(1)}{y}_{k+1}-\overset{(2)}{y}_{k+1})-(\overset{(1)}{y_k}-\overset{(2)}{y_k})}{h}, \quad k=0,1,\ldots,N-1,$$

(2.7) $$\hat{w}\frac{\overset{(1)}{y_k}-\overset{(2)}{y_k}}{\tau} = -\frac{(1/\overset{(1)}{\beta_k}-1/\overset{(2)}{\beta_k})-(1/\overset{(1)}{\beta}_{k-1}-1/\overset{(2)}{\beta}_{k-1})}{h}$$

$$k=1,2,\ldots,N,$$

(2.8) $$\overset{(1)}{y_0}-\overset{(2)}{y_0}=0, \qquad \overset{(1)}{\beta_N}-\overset{(2)}{\beta_N}=0.$$

Пусть i — минимальный номер узла, в котором нарушено хотя бы одно из равенств $\overset{(1)}{\beta_i}=\overset{(2)}{\beta_i}$, $\overset{(1)}{y_i}=\overset{(2)}{y_i}$. Для определенности будем считать, что $\overset{(1)}{\beta_i}<\overset{(2)}{\beta_i}$.

Допустим, что $i>0$, тогда, так как $\overset{(1)}{\beta}_{i-1}=\overset{(2)}{\beta}_{i-1}$, из (2.7) при $k=i$ следует $\overset{(1)}{y_i}-\overset{(2)}{y_i}<0$. Далее из (2.6) при $k=i$ получим $\overset{(1)}{y}_{i+1}-\overset{(2)}{y}_{i+1}<0$. Из равенства (2.7) при $k=i+1$ следует $\overset{(1)}{\beta}_{i+1}-\overset{(2)}{\beta}_{i+1}<0$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что $\overset{(1)}{\beta_N}-\overset{(2)}{\beta_N}<0$, а это противоречит граничному условию (2.8). Если $i=0$, то из (2.6) следует $\overset{(1)}{y_1}-\overset{(2)}{y_2}<0$, дальше можно повторить предыдущие рассуждения. Полученное противоречие доказывает п. 1) леммы.

Для доказательства п. 2) рассмотрим очевидное неравенство $|\hat{\eta}|=|\hat{\beta}-\hat{\eta}|\leqslant|\hat{\beta}-\beta|+|\beta-\eta|+|\eta-\hat{\eta}|$. Из (2.5) следует $|\hat{\beta}-\beta|=O(h^{\varkappa-1})$. Далее, учитывая, что $|\hat{\eta}-\eta|=O(\tau)$, $|\beta-\eta|<h^\alpha$, и (2.1), можно заключить, что $|\hat{\eta}|\leqslant C_1 h^\alpha$, где $C_1>0$ не зависит от h. Аналогично доказывается $|\hat{\hat{v}}|<C_1 h^\alpha$. Справедливость леммы 1 доказана.

§ 3. Оценка погрешности метода

Будем предполагать, что выполнено условие леммы 1 и $h \leqslant h_1$ (h_1 взят из леммы 1). Уравнения (1.3) умножим скалярно, соответственно, на $-\hat{\tilde{\rho}}$, $\hat{\tilde{v}}$, $\hat{\tilde{\psi}}$, $\hat{\tilde{x}}$. После сложения полученных равенств и применения разностной формулы Грина получим

$$(3.1)\qquad [-\hat{\tilde{\rho}}, (w_*\tilde{\eta})_t) + (\hat{\tilde{v}}, (w\tilde{v})_t] + \frac{1}{2}\left(\|[\tilde{\psi}]\|^2 + \frac{1}{2}\|[\tilde{x}]\|^2\right)_t +$$

$$+ \frac{\tau}{2}(\|[\tilde{\psi}_t]\|^2 + \|[\tilde{x}_t]\|^2) = \sum_{i=1}^{6} G_i,$$

где

$$G_1 = [-\hat{\tilde{\rho}}, \varphi_1) \quad G_2 = (\hat{\tilde{v}}, \varphi_2], \quad G_3 = [\hat{\tilde{\rho}}, (\eta\tilde{\psi}_*)_t) - (\hat{\tilde{v}}, (v\tilde{\psi})_t],$$

$$G_4 = [\hat{\tilde{v}}, [g_2(x+\tilde{x}, t_j) - g_2(x, t_j)]\hat{\psi}] + [\hat{\tilde{\psi}}, [g_1(x+\tilde{x}, t_j) - g_1(x, t_j)]\hat{\psi}].$$

$$G_5 = (\hat{\tilde{v}}, -g_2(x+\tilde{x}, t_j)\hat{\tilde{\psi}}] - [\hat{\tilde{\psi}}, g_1(x+\tilde{x}, t_j)\hat{\tilde{\psi}}],$$

$$G_6 = [\hat{\tilde{\psi}}, \varphi_3] + [\hat{\tilde{x}}, \varphi_4] + [\hat{\tilde{x}}, \hat{\tilde{v}}].$$

Преобразуем первый и второй член в левой части равенства (3.1). Натуральное число n выберем таким образом, чтобы выполнялось

$$(3.2)\qquad n > \varkappa/\alpha.$$

Для $\tilde{\rho}$ имеет место следующее разложение в ряд Тейлора:

$$(3.3)\qquad \tilde{\rho} = -\rho z\tilde{\eta} = -\rho\tilde{\eta}(1/\rho+\tilde{\eta})^{-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \rho^{i+1}\tilde{\eta}^i +$$

$$+ (-1)^{n+2}\rho(1/\rho+\theta\tilde{\eta})^{-(n+1)}\tilde{\eta}^{n+1}, \qquad 0<\theta<1.$$

Рассмотрим тождество

$$(3.4)\qquad \hat{\rho}^{i+1}\hat{\tilde{\eta}}^i(w_*\tilde{\eta})_t = \frac{1}{i+1}(w_*\tilde{\eta}^{i+1}\rho^{i+1})_t + \frac{\tau}{i+1}(\tilde{\eta}_t)^2 B_i + B_i^{(1)},$$

где

$$B_i = w_*\hat{\rho}^{i+1}[\hat{\tilde{\eta}}^{i-1} + \hat{\tilde{\eta}}^{i-2}(\hat{\tilde{\eta}}+\tilde{\eta}) + \ldots + (\hat{\tilde{\eta}}^{i-1} + \hat{\tilde{\eta}}^{i-2}\tilde{\eta} + \ldots + \tilde{\eta}^{i-1})],$$

$$B_i^{(1)} = -\frac{1}{i+1}w_*\tilde{\eta}^{i+1}(\rho^{i+1})_t + \frac{i}{i+1}\hat{\rho}^{i+1}\hat{\tilde{\eta}}^{i+1}(w_*)_t,$$

которое является разностным аналогом следующего тождества для функции непрерывного аргумента:

$$\rho^{i+1}\tilde{\eta}^i\frac{\partial}{\partial t}(w_*\tilde{\eta}) = \frac{1}{i+1}\frac{\partial}{\partial t}(w_*\tilde{\eta}^{i+1}\rho^{i+1}) -$$

$$-\frac{1}{i+1}w_*\tilde{\eta}^{i+1}\frac{\partial}{\partial t}\rho^{i+1} + \frac{i}{i+1}\tilde{\eta}^{i+1}\rho^{i+1}\frac{\partial}{\partial t}w_*.$$

При $i=1$ тождество (3.4) принимает вид

$$\hat{\rho}^2\hat{\tilde{\eta}}(w_*\tilde{\eta})_t = \frac{1}{2}(w_*\tilde{\eta}^2\rho^2)_t + w_*\hat{\rho}^2\frac{\tau}{2}(\tilde{\eta}_t)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}w_*\tilde{\eta}^2(\rho^2)_t + \frac{1}{2}\hat{\rho}^2\hat{\tilde{\eta}}^2(w_*)_t.$$

Используя (3.4), получаем

$$-[\hat{\rho}, (w_*\eta)_t) = \left[\frac{1}{2}(w_*\tilde{\eta}^2\rho^2)_t, 1\right) + [B_t^{(2)}, 1) + A + G_7 + G_8, \tag{3.5}$$

где

$$B^{(2)} = \sum_{i=3}^{n} \frac{(-1)^i}{i(w_*\tilde{\eta}^i\rho^i)}, \qquad A = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(-1)^{i+1}}{i+1} B_i(\tilde{\eta}_t)^2, 1\right),$$

$$G_7 = \left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_i^{(1)}, 1\right),$$

$$G_8 = (-1)^{n+2}\left[\hat{\rho}\left(\frac{1}{\hat{\rho}} + \theta\hat{\tilde{\eta}}\right)^{-(n+1)} \hat{\tilde{\eta}}^{n+1}, (w_*\tilde{\eta})_t\right).$$

Для второго слагаемого левой части (3.1) получаем

$$(\hat{\tilde{v}}, (w\tilde{v})_t] = \left(\frac{1}{2}(\tilde{v}^2 w)_t, 1\right] + \left(\frac{\tau}{2} w(\tilde{v}_t)^2, 1\right] + G_g, \quad G_g = \left(\frac{\hat{\tilde{v}}^2}{2} w_t, 1\right]. \tag{3.6}$$

В дальнейшем через M и M_i обозначаются положительные константы, не зависящие от h. При этом каждый раз, применяя эти константы, не будем уточнять их величину. Важно лишь то, что в каждом конкретном случае они существуют.

Преобразуем и оценим выражение G_1, G_2:

$$G_1 = -[\hat{\tilde{\rho}}, \varphi_1) = [\hat{\rho}\hat{z}\hat{\tilde{\eta}}, \varphi_1) = [\hat{\rho}\hat{z}\hat{\tilde{\eta}}, \Delta_t^{(1)} - \xi_q^{(1)}) \leqslant \tag{3.7}$$

$$\leqslant [(\rho z\tilde{\eta}\Delta^{(1)})_t, 1) - [\Delta^{(1)}, (\rho z\tilde{\eta})_t) + \|[\xi_q^{(1)}\|^2 + \|[\hat{\rho}\hat{z}\hat{\tilde{\eta}}\|^2.$$

Согласно п. 2) леммы 1, при достаточно малом h_2 величина $(1/\hat{\rho}+\hat{\tilde{\eta}})^{-1}$ ограничена для всех $h \leqslant h_2$, поэтому при $h \leqslant h_2$ можно написать

$$\|[\hat{\rho}\hat{z}\hat{\tilde{\eta}}\|^2 = \|[\hat{\rho}(1/\hat{\rho}+\hat{\tilde{\eta}})^{-1}\hat{\tilde{\eta}}\|^2 \leqslant M\|[\hat{\tilde{\eta}}\|^2. \tag{3.8}$$

Из (3.3) следует

$$-[\Delta^{(1)}, (\rho z\tilde{\eta})_t) = \left[\Delta^{(1)}, \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \rho^{i+1}\tilde{\eta}^i\right)_t\right) + \tag{3.9}$$

$$+[\Delta^{(1)}, (-1)^{n+2}(\rho(1/\rho+\theta\tilde{\eta})^{-(n+1)}\tilde{\eta}^{n+1})_t).$$

Использовав (3.2), заключаем, что $|\tilde{\eta}^n| < \tau$, $|\hat{\tilde{\eta}}^n| < M\tau$, а отсюда легко получаем

$$[\Delta^{(1)}, (-1)^{n+2}(\rho(1/\rho+\theta\tilde{\eta})^{-(n+1)}\tilde{\eta}^{(n+1)})_t) \leqslant$$

$$\leqslant \|[\Delta^{(1)}\|^2 + M(\|[\tilde{\eta}\|^2)^{(0.5)}.$$

Оценим первый член в правой части (3.9):

$$\left[\Delta^{(1)}, \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \rho^{i+1}\tilde{\eta}^i\right)_t\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\Delta^{(1)}, \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \hat{\rho}^{i+1}(\tilde{\eta}^i)_t\right) + \|[\Delta^{(1)}\|^2 + M\|[\tilde{\eta}\|^2,$$

$$\left[\Delta^{(1)}, \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \hat{\rho}^{i+1}(\tilde{\eta}^i)_t\right) =$$

$$=\Big[\tau^{-1/2}\Delta^{(1)},\ \tau^{1/2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\hat\rho^{i+1}(\hat{\tilde\eta}^{i-1}+\hat{\tilde\eta}^{i-2}\tilde\eta+\dots$$

$$\dots+\tilde\eta^{i-1})\tilde\eta_t\Big)\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\|[\Delta^{(1)}\|^2}{\tau}+\varepsilon_1 M\tau\,\|[\tilde\eta_t\|^2.$$

Учитывая последние оценки, а также (3.8) и (3.9), вместо (3.7) получаем

$$G_1\leqslant[(\rho z\tilde\eta\Delta^{(1)})_t,\ 1)+\varepsilon_1 M\tau\,\|[\tilde\eta_t\|^2+M(\|[\tilde\eta\|^2+ \tag{3.10}$$

$$+\|[\hat{\tilde\eta}\|^2)+\frac{1}{\varepsilon_1}M\frac{h^3}{\tau}+M\frac{\tau^2}{h}.$$

Аналогично рассуждая, получаем оценку

$$G_2\leqslant((\tilde v\Delta^{(2)})_t,1]+\varepsilon_2 M\tau\|\tilde v_t]|^2+ \tag{3.10$'$}$$

$$+M\|\tilde v]|^2+\frac{1}{\varepsilon_2}M\frac{h^3}{\tau}+M\frac{\tau^2}{h}.$$

Оценим G_3. Для простоты оценим $(\hat{\tilde v},\ (v\tilde\psi)_t]$ (первое слагаемое оценивается аналогично):

$$(\hat{\tilde v},\ (v\tilde\psi)_t]=(\hat{\tilde v},\ \hat v\tilde\psi_t]+(\hat{\tilde v},\ \tilde\psi v_t],\qquad (\hat{\tilde v},\ \tilde\psi v_t]\leqslant M(\|\tilde v]|^2+|[\tilde\psi]|^2),$$

$$(\hat{\tilde v},\ \hat v\tilde\psi_t]=(\hat{\tilde v}\hat v,\ \ [g_1(x+\tilde x,\ t_j)-g_1(x,\ t_j)]\hat\psi-g_1(x+\tilde x,\ t_j)\hat{\tilde\psi}+\varphi_3].$$

Учитывая $|g_1(x+\tilde x,\ t_j)-g_1(x,\ t_j)|\leqslant M|\tilde x|$ и то, что $|g_1(x+\tilde x,\ t_j)|<M$ $(|\tilde x|<h^\alpha<\delta/4$, см. (2.4)), получаем

$$|G_3|\leqslant M(\|\hat{\tilde v}]|^2+|[\hat{\tilde\psi}]|^2+|[\tilde x]|^2)+O(\tau^2).$$

Все G_i, $i=4,\dots,9$, оцениваются аналогично, лишь при оценке G_8 нужно учесть, что из (3.2) следуют неравенства $|\tilde\eta|^n<\tau$, $|\hat{\tilde\eta}|^n<M\tau$. Таким образом,

$$|G_i|\leqslant M(|[\tilde\eta\|^2+|[\hat{\tilde\eta}\|^2+\|\tilde v]|^2+|[\hat{\tilde\psi}]|^2+|[\tilde x]|^2)+O(\tau^2),\qquad i=3,\dots,9.$$

Из последнего неравенства, (3.5), (3.6) и (3.10) следует

$$\frac{\hat U-U}{\tau}+L\leqslant MH^{(0.5)}+\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)M\frac{h^3}{\tau}+M\frac{\tau^2}{h}, \tag{3.11}$$

где

$$U=U_1+U_2,$$

$$U_1=\Big[\frac{1}{2}w_*\tilde\eta^2\rho^2+\sum_{i=3}^{n}\frac{(-1)^i}{i}w_*\tilde\eta^i\rho^i,1\Big)+\Big(\frac{1}{2}\tilde v^2 w,1\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}|[\tilde x]|^2+\frac{1}{2}|[\tilde\psi]|^2,$$

$$U_2=[\rho z\tilde\eta\Delta^{(1)},1)+(\tilde v\Delta^{(2)},1],\qquad L=A-\varepsilon_1 M\tau|[\tilde\eta_t\|^2+\frac{\tau}{2}\|\tilde v_t]|^2-$$

$$-\varepsilon_2\tau M\|\tilde v_t]|^2,$$

$$H=|[\tilde\eta\|^2+\|\tilde v]|^2+|[\tilde\psi]|^2+|[\tilde x]|^2. \tag{3.12}$$

Очевидно, существует h_2 такое, что при $h\leqslant h_2$

$$\left|\sum_{i=3}^{n}\frac{(-1)^i}{i}w_*\tilde\eta^i\rho^i\right|<\frac{1}{4}w_*\tilde\eta^2\rho^2,\quad \left|\sum_{i=3}^{n}\frac{(-1)^i}{i}\hat w_*\hat{\tilde\eta}^i\hat\rho^i\right|<\frac{1}{4}\hat w_*\hat{\tilde\eta}^2\hat\rho^2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{4}[w_*\rho^2\tilde{\eta}^2,\ 1)\leqslant\left[\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i}w_*\tilde{\eta}^i\rho^i,\ 1\right)\leqslant\frac{3}{4}[w_*\tilde{\eta}^2\rho^2,\ 1),$$

$$\frac{1}{4}[\hat{w}_*\hat{\rho}^2\hat{\tilde{\eta}}^2,\ 1)\leqslant\left[\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i}\hat{w}_*\hat{\tilde{\eta}}^i\hat{\rho}^i,\ 1\right)\leqslant\frac{3}{4}[\hat{w}_*\hat{\tilde{\eta}}^2\hat{\rho}^2,\ 1).$$

С другой стороны, существуют M_4, $M_5>0$ такие, что

$$M_4\hat{\tilde{\eta}}^2\leqslant\hat{w}_*\hat{\rho}^2\hat{\tilde{\eta}}^2\leqslant M_5\hat{\tilde{\eta}}^2,\quad M_4\tilde{\eta}^2\leqslant w_*\rho^2\tilde{\eta}^2\leqslant M_5\tilde{\eta}^2\quad \forall h\leqslant h_2.$$

Следовательно, для некоторых M_1, $M_2>0$ при $h\leqslant h_2$ выполняются неравенства

(3.13) $\qquad M_1H\leqslant U_1\leqslant M_2H,\quad M_1\hat{H}\leqslant\hat{U}_1\leqslant M_2\hat{H}.$

Очевидно, что при достаточно малом h_2 и подходящем выборе ε_1, ε_2 для всех $h\leqslant h_2$ выполняется $L\geqslant0$, поэтому, учитывая (3.13), из (3.11) получаем

$$\frac{\hat{U}-U}{\tau}\leqslant MU_1^{(0.5)}+M\left(\frac{\tau^2}{h}+\frac{h^3}{\tau}\right)=MU^{(0.5)}-$$

$$-MU_2^{(0.5)}+M\left(\frac{\tau^2}{h}+\frac{h^3}{\tau}\right).$$

Покажем, что U_2, $\hat{U}_2=O(h^2)$:

$$[\rho z\tilde{\eta}\Delta^{(1)},1)=\sum_{q\in\omega_p}h\rho z\tilde{\eta}\Delta^{(1)}+\sum_{q\in\omega_h\setminus\omega_p}h\rho z\tilde{\eta}\Delta^{(1)}=$$

$$=\sum_{q\in\omega_p}hO(h)+O(h^2)=O(h^2).$$

Аналогично, $(\tilde{v}\Delta^{(2)},1]=O(h^2)$. Равенство $\hat{U}_2=O(h^2)$ проверяется так же. Следовательно, при $h\leqslant h_2$

(3.14) $\qquad |U_2|\leqslant M_3h^2,\quad |\hat{U}_2|<M_2h^2.$

Поскольку $O(h^2)=O(h^3/\tau)$, $\varkappa>1$, то

$$\frac{\hat{U}-U}{\tau}\leqslant MU^{(0.5)}+M\left(\frac{\tau^2}{h}+\frac{h^3}{\tau}\right).$$

Отметим, что константа M зависит от α, начально-краевых условий, решений дифференциальной задачи, от функций g_1, g_2 и не зависит от h. Отметим также, что последнее неравенство имеет место при $h\leqslant h_2$, где h_2, $h_2\leqslant h_1$, подбирается в процессе вывода неравенства и видно, что она (как и M), зависит только от исходных данных. Если h_2 подобрать из условия $\tau M=h^\varkappa M<{}^3/_2$ при $h\leqslant h_2$, то получим

(3.15) $\qquad \hat{U}\leqslant(1+4\tau M)U+\tau Mf,\quad f=\tau^2/h+h^3/\tau.$

Тем самым доказана следующая

Лемма 2. *Пусть* $\max\{\|\tilde{\eta}\|_C,\ \|\tilde{v}\|_C,\ \|\tilde{\psi}\|_C,\ \|\tilde{x}\|_C\}<h^\alpha$. *Тогда существует* h_2 ($h_2\leqslant h_1$, h_1 взят из леммы 1), *которая зависит от* α *и от функций* η, v, ψ, x, g_1, g_2 *так, что при* $h\leqslant h_2$ *выполняется энергетическое неравенство* (3.15). *Причем константа* M *не зависит от* h.

§ 4. Теорема сходимости

С помощью лемм 1, 2 докажем следующую теорему сходимости.

Теорема. *Пусть для задачи* (1), (2) *выполнены условия* 1)–4), $\tau=h^\varkappa$, $1<\varkappa<2$; *тогда существует* h_0 *такое, что при* $h\leqslant h_0$ *выполняются следующие утверждения*:

1) *на интервале* $[0, T]$ *решение разностной схемы* (1.1), (1.2) *существует и единственно*;

2) *разностное решение сходится к решению задачи* (1), (2) *в норме* L_2 *со скоростью* $O(\tau^2/h+h^3/\tau)^{1/2}$ *и в равномерной метрике со скоростью* $O(\tau^2/h^2+h^2/\tau)^{1/2}$.

Доказательство. Рассмотрим разностное уравнение первого порядка

$$(4.1)\qquad b_{j+1}=(1+4\tau M)b_j+\tau Mf,\qquad b_0=0.$$

Решая его, получаем $b_j=[(1+4\tau M)^j-1]f/4$. Пусть $0\leqslant j\leqslant T/\tau=N_1$, тогда

$$(4.1')\qquad b_j\leqslant\frac{e^{4MT}-1}{4}f=f_1\quad 0\leqslant j\leqslant N_1.$$

Пусть h_3 выбрана так, чтобы при $h\leqslant h_3$ выполнялось неравенство

$$(4.2)\qquad \left(h^{-1}\frac{f_1+M_3h^2}{M_1}\right)^{1/2}<h^\alpha$$

(константа M_3 взята из (3.14)). Возможность такого выбора гарантируется неравенствами (2.1).

Возьмем $h_0=\min(h_2, h_3)$. Докажем индукцией по j, что при $h\leqslant h_0$

$$\max\{\|\eta_i^j\|_C,\quad \|\tilde v_i^j\|_C,\quad \|\tilde\varphi_i^j\|_C,\quad \|\tilde x_i^j\|_C\}<h^\alpha\quad 0\leqslant j\leqslant N_1=T/\tau.$$

Утверждение для $j=0$ очевидно. Предположим, что оно верно при всех $k\leqslant j$; тогда из лемм 1, 2 заключаем, что при $h\leqslant h_0$ решение разностной схемы до $(j+1)$-го слоя включительно существует и единственно, а также что

$$U^{(k)}\leqslant U^{(k-1)}(1+4\tau M)+\tau Mf\qquad \forall k=1, 2, \ldots, j+1,$$

где $U^{(k)}$ определяется равенством (3.11) на k-м слое.

Отметим, что $U^{(0)}=0$, поэтому $U^{(k)}$ мажорируется решением (4.1), т. е. $U^{(k)}\leqslant b_k$, $k=1, 2, \ldots, j+1$. Далее, $U^{(j+1)}=U_1^{(j+1)}+U_2^{(j+1)}\leqslant b_{j+1}<f_1$. Из (3.13) и (3.14) заключаем, что $M_1H^{(j+1)}\leqslant f_1-U_2^{(j+1)}\leqslant f_1+M_3h^2$,

$$(4.3)\qquad H^{(j-1)}\leqslant(f_1+M_3h^2)/M_1.$$

Из (3.12) и (4.2) следует, что

$$(4.4)\qquad \max(\|\eta_i^{j+1}\|_C, \|\tilde v_i^{j+1}\|_C, \|\tilde\psi_i^{j+1}\|_C, \|\tilde x_i^{j+1}\|_C)\leqslant(h^{-1}H^{(j+1)})^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\left(h^{-1}\frac{f_1+M_3h^2}{M_1}\right)^{1/2}<h^\alpha.$$

Тем самым доказан п. 1) теоремы. Более того, показано, что при $h\leqslant h_0$ верны оценки (4.3), (4.4) для всех $0\leqslant j\leqslant N_1$. Так как $f_1=O(\tau^2/h+h^3/\tau)$ (см. (4.1')), то получаем, что верен и п. 2) теоремы. Таким образом, теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Теорема остается верной для схем вида (1.1) с $1 \geqslant \sigma_1$, $\sigma_2 > 0.5$, $1 \geqslant \sigma_3$, $\sigma_4 \geqslant 0$.

2. В случае, когда g_1 и g_2 зависят от решения, т. е. от ρ, v, теорема остается справедливой, если потребовать, чтобы g_1, g_2 были непрерывными функциями ρ, v, удовлетворяющими условию Липшица.

3. В [1] приведена полностью консервативная схема ($0 \leqslant \sigma_2 \leqslant 1$, $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0.5$). Если решение задачи (1), (2) принадлежит $C^{3,3}(\Omega)$, то приведенная выше методика позволяет доказать сходимость этой схемы.

Литература

1. *Повещенко Ю. А., Попов Ю. П.* Некоторые задачи газовой динамики при наличии источников. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 4, с. 1048–1056.
2. *Абрашин В. Н., Матус П. П.* Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений с кусочно-гладкими решениями. – Дифференц. ур-ния, 1979, т. 15, № 7, с. 1225–1238.
3. *Абрашин В. Н., Матус П. П.* О точности разностных схем для одномерных задач газовой динамики. – Дифференц. ур-ния, 1981, т. 17, № 7, с. 1155–1170.
4. *Меладзе Г. В., Поцхишвили Д. В.* О сходимости консервативной дифференциально-разностной схемы газовой динамики в эйлеровых координатах. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1985, т. 25, № 6, 850–859.
5. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений.– М.: Наука, 1978.
6. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 14.II.1985
Переработанный вариант 25.IV.1985