Материалы третьей конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения”, Саранск, 19–21 мая 1998 г,
Матем. моделирование, 1998, том 10, номер 12, 3–70

https://www.mathnet.ru/mm1348

РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ, АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ, ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

© *Е.В.Воскресенский*

Мордовский университет, Саранск

1. Равномерная ограниченность решений. Связь между ограниченными решениями, устойчивостью решений и существованием периодических решений была установлена в [1,2]. Особенно четко просматривается близость ограниченных и устойчивых решений. Это вытекает из критериев существования различных видов ограниченных решений, полученных Йосидзавой. Они сформулированы на языке прямого метода Ляпунова, и поэтому эта связь очевидна. Далее в случае уравнений с периодическими правыми частями установлено существование периодических решений при условии существования ограниченных решений. И этот факт установлен применением функций Ляпунова [2]. Однако, получению новых более тонких связей мешает то, что в классификации Йосидзавы присутствуют лишь решения, идущие вправо.

Определение 1. *Решения $x(t{:}t_0,x_0)$ дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

где $f\in C([T,+\infty)\times R^n,R^n)$ называются абсолютно ограниченными для $\|x_0\|\le r, t\ge T$, если $\|x(t{:}t_0,x_0)\|\le$ $\le c_0(r)$ для всех $T\le t$, $t_0<+\infty$.

Теорема 1. *Для абсолютной равномерной ограниченности решений уравнения* (1) *при $\|x_0\|\le r, t\ge T$, необходимо и достаточно существование функций $V,W{:}[T,+\infty)\times R^n\to(0,+\infty)$ таких, что*:

а) *$V(t,x)$, $W(t,x)\to+\infty$ при $\|x\|\to+\infty$ равномерно по t*;

б) *$V(t,x)\le\rho_1(r)$, $W(t,x)\le\rho_2(r)$ для $\|x\|\le r$*;

в) *$V(t,x(t))$, $W(t,x(t))$ – соответственно невозрастающая и неубывающая функции, где $x(t)$ – решение уравнения* (1).

Теорема 2 [3]. *Если для уравнения*

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t,z), \tag{2}$$

где $\lambda\in C\left([T,+\infty)\times R^1_+,R^1_+\right)$, $R^1_+=[0,+\infty)$, при $\beta\ge0$ существует функция $J(\cdot){:}[\beta,+\infty)\to R^1_+$, интегрируемая на любом компакте из $[\beta,+\infty)$, $\int\limits_\beta^{+\infty}\frac{d\alpha}{J(\alpha)}=+\infty$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_T^t\frac{\lambda(s,\alpha)}{J(s)}=1$ равномерно по $\alpha\in[\beta,+\infty)$, то решения $z(t{:}t_0,z_0)$ уравнения (2) *абсолютно равномерно ограничены на множестве $S=\{z{:}0\le z\le r\}$* при *$T\le t$, $t_0<+\infty$. Здесь*

$$V(t,z)=\exp\left(-\int\limits_T^t\frac{\lambda(s,z)}{J(z)}ds\right)\int\limits_{z_0}^z\frac{d\alpha}{J(\alpha)},\qquad W(t,z)=\exp\left(\int\limits_T^t\frac{\lambda(s,z)}{J(z)}ds\right)\int\limits_{z_0}^z\frac{d\alpha}{J(\alpha)},$$

Критерий Йосидзавы о равномерной ограниченности решений носит глобальный характер и поэтому не всегда применим для исследования поведения решений, начинающихся на множестве $B \subset R^{n+1}$.

Теорема 3 [4]. *Пусть функция f — типа Каратеодори, и задача Коши для уравнения* (1) *имеет решение при любом $t_0 \in [T,c)$ и $x_0, \|x_0\| \le \rho$. Тогда, для того, чтобы решения этого уравнения, начинающиеся на множестве $P=\{(t,x): T \le t < c, x \in R^n, \|x_0\| \le \rho\}$, были абсолютно равномерно ограниченными, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $V, W: [T,c) \times R^n \to (0,+\infty)$, обладающие свойствами:*

a) $V(t,x) \le \rho_1(r)$, $W(t,x) \le \rho_2(r)$ для $\|x\| \le r$, $T \le t < c$;

b) $V(t,x(t))$, $W(t,x(t))$ – соответственно невозрастающая и неубывающая функции, где $x(t)$ – решение уравнения (1);

c) для V и W существует $\bar{x} \in R^n, \|\bar{x}\| > \rho$ такой, что при любом $\|x\| \ge \|\bar{x}\|$ и $t \in [T,c)$, зависящем от x, справедливы неравенства $V(t,x) \ge V_2(\|\bar{x}\|) > V_1(\rho)$, $W(t,x) \ge W_2(\|\bar{x}\|) > W_1(\rho)$.

2. Асимптотическое равновесие. Вновь рассмотрим уравнение (1), решая задачу о существовании асимптотического равновесия [5].

Теорема 4. *Пусть при любом фиксированном x_0 решения $x(t:t_0,x_0)$ абсолютно ограничены, и существует $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t:t_0,x_0)$. Тогда уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Теорема 5. *Пусть $g_1 \in C([T,+\infty)\times[0,+\infty),(-\infty,0])$, $g_2 \in C([T,+\infty)\times[0,+\infty),[0,+\infty))$, $W_i \in C([T,+\infty)\times R^n,[0,+\infty))$, $W_i(t,\cdot)$ – локально липшицевы по второй переменной при любом $t \in [T,+\infty)$, $i=1,2$. Кроме того:*

a) $W_1((t+h,x+hf(t,x)) \le W_1(t,x)+hg_1(t,W_1(t,x))+o(h)$ при $h \to +0$,
$W_2((t+h,x+hf(t,x)) \ge W_2(t,x)+hg_2(t,W_2(t,x))+o(h)$ при $h \to +0$,

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{W_i(t,x)}{\|x\|} = k_i > 0$, $i=1,2$ равномерно по $x \in R^n$, $W_2(t,x) \le R(\Delta)$ $\|x\| \le \Delta$;

c) решения $z(t:t_0,z_0)$ уравнения $dz/dt=g_1(t,z)$ равномерно ограничены вправо при $t \ge t_0$, $z_0 \le \Delta$. Тогда уравнение (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Рассмотрим уравнение (1) в предположении, что $f \in C^{(0,1)}([T,+\infty)\times D, R^n)$, $D=\{x: \|x\| \le l\}$.

Определение 2. *Будем говорить, что уравнение* (1) *на сегменте $[c_0,c_1]$ имеет равновесие, если существуют компакты $S_1=\{x: \|x\| \le r \le l\}, S_2, S_2 \subseteq S_1$ такие, что существует $\lim\limits_{t\to c_1-0} x(t:c_0,x_0)$, $\forall x_0 \subseteq S_1$, принадлежащий множеству S_2 и наоборот: $\forall x_0 \subseteq S_2$ существует $\lim\limits_{t\to c_1+0} x(t:c_0,x_0)$, принадлежащий множеству S_1.*

Теорема 6. *Пусть решения уравнения* (1) *$x(t:c_0,x_0), \|x\| \le r_1$ на компакте $[c_0,c]$ существуют, и существует непрерывная функция $V: [T,+\infty)\times R^n \to (0,+\infty)$ такая, что:*

a) $\lim\limits_{t\to c-0} \dfrac{V(t,x)}{V_0(\|x\|)} = k, 0 \le k < +\infty$ равномерно по x, $V_0 \in C([0,+\infty),(0,+\infty))$ – строго монотонно возрастающая функция и $V_0(q) \ge P_0 > 0$ при всех $q \ge 0$, $\lim\limits_{r\to+\infty} V_0(r) = +\infty$;

b) $V(c,x(c)) \le k_0$, $\forall x(t:c_0,x_0)$, $\|x_0\| \le r_1$, $k_0/k \ge p_0$.

Тогда, если $V_0^{-1}(k_0/k) \le r_1$, где V_0^{-1} функция, обратная функции V_0, то *уравнение* (1) *на сегменте $[c_0,c_1]$ имеет равновесие, и $S_2=\{x(c:c_0,x_0): \|x_0\| \le r_1\}$.*

Определение 3. *Будем говорить, что уравнение* (1) *имеет неподвижную точку на сегменте $[c_0,c]$, если решение $x(t:c_0,x_0)$ такое, что $x(c:c_0,x_0)=x_0$.*

3. Периодические решения. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \tag{3}$$

$A(\cdot)$:$(-\infty,+\infty)\to\mathrm{Hom}(R^n,R^n)$ – непрерывное отображение, $f\in C((-\infty,+\infty)\times D,R^n)$, $D=\{x:\|x\|\le k_2\}$, $A(t+w)\equiv A(t)$,$f(t+w,x)\equiv f(t,x)$, $w>0$ при любом $x\in D$. Предположим, что задача Коши (t_0,x_0) не только разрешима при любых t_0 и x_0, но еще решение $x(t:t_0,x_0)$ единственно и непрерывно зависит от начальных данных. При каких условиях уравнение (3) на множестве $D_0=\{x:\|x\|\le k_3\}$, $k_3<k_2$ имеет ω – периодические решения?

Пусть $Y(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dy/dt=A(t)y$, нормированная в точке ω: $Y(\omega)=E$, E – единичная матрица. Рассмотрим замену $x=Y(t)y$. Тогда уравнение (3) перейдет в уравнение $dy/dt=Y^{-1}(t)f(t,Y(t)y)$.

Пусть $g\in C([0,+\infty)\times[0,+\infty),R^1)$, $W\in C([0,+\infty)\times R^n,[0,+\infty))$, $W(t,\cdot)$ – локально липшицева по второй переменной при любом $z\in[0,+\infty)$. Кроме того:

a) $W(t+h,y+Y^{-1}(t)hf(t,Y(t)y))\le W(t,y)+hg(t,W(t,y))+o(h)$ *при* $h\to+0$;

b) $\|y\|\le W(t,y)$ для каждого $t\in[0,+\infty)$.

Тогда $\|y(t:t_0,y_0)\|\le z(t:t_0,z_0)$, $t_0\le t<t_0+\delta$, $\delta>0$, где $\|y_0\|\le z_0$, $z(t,t_0,z_0)$ – максимальные решения скалярного уравнения

$$\frac{dz}{dt} = g(t,z). \tag{4}$$

Теорема 7. *Если уравнение* (4) *имеет решение* $z(t:0,z_0)$ *такое, что* $0\le t\le\omega$ *и* $z(\omega:0,z_0)=z_0$, $z_0\le k_0$, *то есть, если уравнение* (4) *имеет неподвижную точку* z_0 *на сегменте* $[0,\omega]$, *то уравнение* (3) *на множестве* D_0 *имеет* ω *– периодическое решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *T.Yashizava.* Liapunov's function and boundedness of solutions. // Funktial. Ekvas. 1959, v.2, p71-103.
2. *J.L.Massera.* The existence of periodic solutions of systems of differential equations. // Duke Math. J. 1950, v.17, p.457-475.
3. *Е.В.Воскресенский.* О задаче Чезари. // Дифференц. уравнения. 1989, т.25, №9, с.1480-1485.
4. *Е.В.Воскресенский.* О равномерной ограниченности решений. // Дифференц. уравнения. 1988, т.24, №2, с.346-348.
5. *Е.В.Воскресенский.* Прямой метод обнаружения асимптотического равновесия. // Математическое моделирование. 1997, т.9, №10, с.4-8.

МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО ВТОРЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© *В.К. Горбунов, И.В. Лутошкин*

Ульяновский университет, Ульяновск

Работа поддержана РФФИ (проект 96-01-00509).

Для задач оптимального управления (ОУ)

$$\min\{g_0(x(t_0),x(T)):(2),(3)\}, \tag{1}$$

$$dx/dt=f(x,u),\ x(t_0)=x^0,\ \ u\in U,\ \ t_0\le t\le T, \tag{2}$$

$$g_k(x(T))\le 0,\quad k=1,...,m, \tag{3}$$

излагаются результаты по развитию и реализации метода параметризации [1]. Особое внимание уделяется вырожденным задачам, порождаемым применением метода расширенного фазового пространства [2] к исходным задачам с фазовыми ограничениями.

Метод параметризации [1] заключается в представлении искомого управления в виде $u(t)=u_j(t,v_j)$, $t_j\le t_{j+1}$, $0\le j\le N$, $t_0<t_1<...<t_{N+1}=T$. При этом траектория системы (2) определяется выбором конечномерного набора параметров $w^0=(x(t_0),v^0)$, $w^j=(x(t_j),v^j)$, $1\le j\le N$, и задача ОУ (1)-(3) аппроксимируется конечномерной задачей, представляемой функциями $\varphi_k(w^0,...,w^N)=$ $=g_k(x(T;\ w^0,...,w^N))$, $0\le k\le m$.

В [1] были получены формулы для градиентов φ' функций , основанные на решении сопряженных систем, и вторых производных φ' по временным параметрам управления. Эта техника развита для вычисления всех вторых производных

$$\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t_j\partial v_r^j},\quad \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial v_r^j\partial v_s^j},\quad \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t_i\partial t_j}.$$

При этом используются также матричные импульсы решения уравнения

$$\dot\Psi(t)=-\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\Psi-\Psi\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}-\frac{\partial^2 H(p,x,u)}{\partial x^2}.$$

Для каждой функции φ_k строится свой импульс, определяемый условием $\Psi_T=\dfrac{\partial^2 g_k(x(T))}{\partial x^2}$.

В докладе приводятся полные формулы, позволяющие применять к редуцированной таким образом задаче нелинейного программирования эффективные методы второго порядка. В качестве примеров рассматриваются одно- и двухсекторные задачи экономической динамики с фазовыми ограничениями, исключающими неприемлемые для практики релейные управления (выбор нормы накопления).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.К. Горбунов.* Метод параметризации задач оптимального управления. // ЖВМ и МФ, 1979, т.19, №2, с. 292-303.
2. *В.К. Горбунов.* Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями и особые управления // Дифф. уравнения и их применения (тезисы 1-й межд. конф.). С.-Петербург, 1996, с. 58.

НОРМАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ В СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© *В.К. Горбунов, В.В. Петрищев*

Ульяновский университет, Ульяновск

Работа поддержана РФФИ (проект 96-01-00509).

Излагается вычислительная схема и опыт реализации метода нормальной сплайн-коллокации для систем линейных дифференциальных уравнений

$$A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = f(t) \tag{1}$$

с краевыми (в общем случае) условиями

$$Cx(0)+Dx(0)=g, \tag{2}$$

где $x,f,g \in R^n$ (ранее метод был реализован для n=2), A,B,C,D – квадратные матрицы. Основное требование – разрешимость задачи (1), (2) в гильбертово-соболевском пространстве $W^2_{2,n}[0,1]$. Этим, в частности, охватываются дифференциально–алгебраические системы, для которых обычно строятся специализированные методы.

Метод нормальной сплайн–коллокации заключается в переходе от континуальной системы (1) к конечному набору соответствующих коллокационных соотношений на произвольной сетке $0 \le t_1 < t_2 < \dots t_m \le 1$ и построению нормального решения получаемой системы.

Особенностью метода является рассмотрение элементов коллокационной системы $x_i(t_k)$, $\dot{x}(t_k)$ как линейных непрерывных функционалов в пространстве $W^2_{2,n}[0,1]$ и их каноническое представление в виде соответствующего скалярного произведения. Эти элементарные функционалы определяют линейные непрерывные функционалы $l_{ik}(x)$ ($1 \le i \le n$, $1 \le k \le n$), соответствующие строкам системы (1), (2).

Соответственно, канонические образы функционалов $x_j(t_k)$ и $\dot{x}_j(t_k)$ определяют образы $h^{\mu(i,k)}$ функционалов $l_{ik}(x)$, и коллокационная система записывается в каноническом виде

$$\left\langle h^{\mu}, h^{\nu} \right\rangle = \hat{f}_{\mu}, \quad 1 \le \mu \le m \times n + n. \tag{3}$$

Здесь $<\cdot,\cdot>$ – скалярное произведение, соответствующее выбранной норме, и правая часть строится из компонент g_i, $f_i(t_k)$ в соответствии с упорядочением $\mu(i,k)$.

Нормальное решение (3) представляется как линейная комбинация функций $h^{\mu}(s)$, и коэффициенты разложения определяются системой линейных алгебраических уравнений с матрицей Грама $\{<h^{\mu},h^{\nu}>\}$.

Для повышения точности решения используется метод сгущения коллокационных сеток, основанный на подавлении невязки системы в области ее наибольших межузловых значений [1,2].

Приводятся сравнительные результаты решения ряда сингулярных задач из [3], демонстрирующие эффективность универсальной схемы решения задач (1), (2) методом нормальных сплайнов.

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

© *Ю.И. Городецкий*

Нижегородский университет, Нижний Новгород

К настоящему времени можно считать завершенной теорию линейных дискретных систем автоматического регулирования [1]. Для распределенных систем эта теория разработана недостаточно. В докладе рассмотрены различные системы автоматического управления, в которых наряду с колебаниями дискретных элементов учитываются волновые процессы в распределенных элементах: длинных штангах, валах, протяженных газопроводах и т.д. Введены определения и критерии устойчивости. Дается обоснование сводимости исследования устойчивости распределенных систем к исследованию корней характеристического уравнения линеаризованной системы. Анализируется структура Д-разбиения пространства квазиполиномов. Определяются условия грубости и принадлежности квазиполинома к множеству, где число корней с реальной положительной частью ограничено [2]. Показано, что при учете в распределенных элементах внутреннего трения характеристическое уравнение замкнутой системы не является квазиполиномом и при исследовании устойчивости методом Д-разбиения возможна неоднозначность в отображении мнимой оси на плоскость параметра Д-разбиения. Изложена рецептура выбора однозначной ветви отображения. Эти теоретические результаты использованы для решения задачи об устойчивости системы автоматического регулирования угловой скорости вращения гидравлической турбины с учетом волновых явлений в длинной штанге регулятора и подводящем напорном трубопроводе. При решении этой задачи выявлена роль внутреннего трения в рождении корней с положительной правой частью в окрестности бесконечно удаленной существенно особой точки. Рассмотрена задача об исследовании устойчивости регулирования автоматизированной компрессорной станцией подачи газа с учетом волновых явлений в подводящем и отводящем газопроводах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.П. Попов*. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1989, 300 с.
2. *Ю.И. Неймарк, Ю.И. Городецкий, Н.И. Леонов*. Исследование устойчивости некоторых линейных распределенных систем. / Известие вузов. Радиофизика, 1959, т.2, №6, с. 967-988.

ЦЕПОЧКИ ГЮГОНИО-МАСЛОВА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© *С.Ю. Доброхотов*

Институт проблем механики РАН, Москва

Согласно концепции В.П. Маслова широкий класс двумерных квазилинейных гиперболических систем нелинейных уравнений в частных производных допускает только три типа сингулярностей, находящихся в общем положении и обладающих свойствами "структурной самоподобности и устойчивости". К ним относятся ударные волны, "бесконечно узкие" солитоны и точечные особенности типа "квадратного корня" из неотрицательной функции, которые описывают уединенные вихри. Их движение определяется бесконечной цепочкой обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся обобщением хорошо известных условий Гюгонио для ударных волн. Весьма привлекательной является идея использования "замкнутых" цепочек для описания траекторий носителей сингулярностей.

Неожиданный, но, вероятно, не случайный результат заключается в том, что после некоторой простой, но достаточно разумной процедуры замыкания такой цепочки для уединенных вихрей уравнений "мелкой воды" получается система из 16 обыкновенных уравнений, эквивалентная (7-параметрическому) семейству уравнений Хилла. Иначе говоря, в некотором приближении уединенный вихрь представляет собой "твердое тело", траектория которого описывается уравнением Хилла. Дополнительные физические соображения приводят к требованиям устойчивости уравнений Хилла и наличия силы Кориолиса. Эти результаты могут быть использованы для восстановления (прогнозирования) траектории "глаза тайфуна" по ее части, известной из наблюдения.

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

© *М.В. Долов, А.Н. Мулько*

Нижегородский университет, Нижний Новгород

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$

правые части которой однозначны, аналитичны в области G и 2π-периодические по x.

Теорема 1. *Пусть* (1) *в G имеет предельный цикл l второго рода и интегрирующий множитель 2π-периодический по x, для которого l–полярное множество порядка r. Тогда порядок кратности цикла l равен r.*

Теорема 2. *Если система* (1) *допускает 2π-периодический по x интегрирующий множитель, аналитический на периодическом движении l второго рода ($l \subset G$), то все траектории y* (1), *близкие к l, замкнуты на цилиндре.*

Множество многочленов по y степени n, коэффициенты которых суть тригонометрические полиномы x порядка m обозначим A_{mn}. Пусть M_a^1 – множество вещественных систем (1), у которых $P,Q \in A_{mn}$ такие, что

$$\mu=(\varphi(x,y))^{\beta} \tag{2}$$

(где $\beta \in C$, $\varphi \in A_{n_\varphi m_\varphi}$ и неприводима в $A_{n_\varphi m_\varphi}$) является интегрирующим множителем для (1).

Теорема 3. *Пусть* (1) $\in M_a^1$ *и имеет предельный цикл l первого или второго рода. Тогда порядок кратности l равен $r \geq 1$ в том и только в том случае, если $\varphi|_l \equiv 0$ и $\beta = -r$.*

Теорема 4. *Пусть*:

1) *P и Q однозначны и аналитичны в окрестности S состояния покоя (x_0, y_0), для которого корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = p \pm q$, $(p \cdot q \neq 0)$;*

2) *система* (1) *имеет интегрирующий множитель* (2), *где φ голоморфна и неприводима в S. Тогда:*

а) *либо (x_0, y_0) – изолированная точка для вещественной кривой $\varphi(x,y)=0$, причем порядок кратности (x_0, y_0) равен* 2 *и $\beta = -1$;*

б) *либо $\varphi(x_0, y_0) = 0$ и $|\varphi'_x(x_0,y_0)| + |\varphi'_y(x_0,y_0)| > 0$, при этом величина $\beta = -2p(p-iq)^{-1}$ или $\beta = -2p(p+iq)^{-1}$, и система* (1) *имеет первый интеграл $\mu / \bar{\mu} = c$.*

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С АКТИВНЫМ ФИЛЬТРОМ

© *В.Ф. Белов, Е.Н. Аболемов, А.Н. Мадонов*

Мордовский госуниверситет, Саранск

Рассмотрим автономную электроэнергетическую систему (АЭЭС), состоящую из синхронного генератора, мостового статического преобразователя и активного энергетического фильтра на его входе. Схема содержит 37 ключевых элементов, работающих асинхронно. Принцип действия преобразователя и фильтра обусловливает разрывную правую часть системы дифференциальных уравнений математической модели АЭЭС.

Математическая модель имеет вид

$$\dot{x} = f(x,y,u), \tag{1}$$

где $x=x(t)$ – вектор токов и напряжений на элементах; $y=y(t)$ – вектор внешних источников; $u=u(t,x)$ – разрывная вектор–функция (управление), компоненты которой принимают значение 0 или 1. На практике можно реализовать 9216 различных вариантов управления.

Зафиксируем u. В этом случае система (1) будет иметь непрерывную правую часть:

$$\dot{x} = f_u(x,y). \tag{2}$$

Путем последовательного применения нескольких матричных операторов система (2) приводится к виду

$$\dot{I}_{dq}(t) = Q(t,\tau)U_{dq}(t) + AI_{dq}(t) + b(t,\tau), \tag{3}$$

где $I_{dq}(t)$ – вектор–функция фазных токов элемента в ортогональной системе dq-координат; $U_{dq}(t)$ – вектор–функция напряжений в узлах распределительной системы; $Q=Q(t,\tau)$ – непрерывная $\varphi(\tau)$–периодическая матрица по t, т.е. $Q(t+\varphi(\tau),\tau)\equiv Q(t,\tau)$; A – постоянная матрица; $b(t,\tau)$ – вектор–функция; τ – начальный момент статического состояния АЭЭС ($0<\tau<<1$).

С учетом уравнения связи (см. [1])

$$U_{dq}(t) = (E-K_1)^{-1}\left(-ZK_2I_{dq}(t) - LK_2\dot{I}_{dq}(t)\right),$$

где K_1, K_2 – соответственно левая и правая квазитреугольные матрицы; L, Z – постоянные квазидиагональные матрицы; E – единичная матрица, система (3) запишется в виде

$$\dot{I}_{dq}(t) = \widetilde{A}(t,\tau)I_{dq}(t) + \widetilde{b}(t,\tau), \tag{4}$$

где

$$\widetilde{A}(t,\tau) = C(t,\tau)(A - Q(t,\tau)(E-K_1)^{-1}ZK_2), \quad \widetilde{b}(t,\tau) = C(t,\tau)b(t,\tau),$$

$$C(t,\tau) = (E + Q(t,\tau)(E-K_1)^{-1}LK_2)^{-1}.$$

Согласно [2] устойчивость системы (4) равносильна устойчивости системы

$$\dot{I}_{dq}(t) = \widetilde{A}(t,\tau)I_{dq}(t). \tag{5}$$

Рассмотрим также систему (5) при $\tau=0$:

$$\dot{I}_{dq}(t) = \widetilde{A}(t,0)I_{dq}(t)\,. \tag{6}$$

Обозначим $X(\varphi(\tau),\tau)$ и $X(\varphi(0),0)$ – матрицы монодромии систем (5) и (6) соответственно.

Л е м м а. *Для любого* τ, *удовлетворяющего условию* $0<\tau\le\delta<<1$,

$$\left\|X(\varphi(\tau),\tau)-X(\varphi(0),0)\right\|\to 0 \quad \text{при } \delta\to 0.$$

Из леммы сразу же вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а. 1) *Если система* (6) *асимптотически устойчива по Ляпунову, то система* (5) *также асимптотически устойчива по Ляпунову.*

2) *Если система* (6) *неустойчива по Ляпунову, то система* (5) *также неустойчива по Ляпунову.*

Из теоремы следует, что на основе анализа мультипликаторов (собственных значений матрицы $X(\varphi(0),0)$) можно сделать вывод об устойчивости системы (5) во всех случаях, за исключением критического, когда существуют мультипликаторы, лежащие на единичной окружности. Алгоритм приближенного вычисления мультипликаторов дан в [2].

Перебирая всевозможные варианты управления u, мы можем сделать вывод об устойчивости решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $x(t_0)=x_0$. В критическом случае вопрос устойчивости остается открытым. Для полного решения задачи необходимо 9216 раз выполнить процедуры составления матрицы монодромии четвертого порядка и вычисления собственных значений этой матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.Ф. Белов.* Автоматизация проектирования электромагнитной совместимости автономных преобразовательных систем. -Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 1993, 340 с.
2. *Б.П. Демидович.* Лекции по математической теории устойчивости. -М.: Наука, 1967, 472 с.

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КОЛОННЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

© *Б.В. Логинов, Э.В. Графова*

Ульяновский Технический Университет, Ульяновск

Методом Ляпунова-Шмидта [1] решается бифуркационная задача о продольном изгибе стержня (колонны) под действием собственного веса [2,3].

Пусть q – вес единицы длины стержня, E – модуль упругости, I – момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения перпендикулярно плоскости изгиба. Изгибающий момент выражается интегралом, где y – (соответственно η) отклонение стержня на высоте x (соответственно ξ). Тогда нелинейное дифференциальное уравнение ([2], с.161)

$$\frac{dM(x)}{dx} = -q(l-x)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{EIy''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right)$$

описывает изгиб стержня под действием собственного веса. Для однородного стержня возникает двухточечная граничная задача в безразмерных переменных

$$y''' + \lambda(1-x)y'(1+y'^2)^{3/2} - \frac{3yy''^2}{1+y'^2} = 0, \qquad \lambda = \frac{q\ell^3}{EI}, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'_x(0) = 0, \qquad y''_{xx}(1) = 0. \tag{2}$$

Для применения метода Ляпунова-Шмидта [1], полагая $y'=u$, определим подпространство нулей линеаризованного оператора B: $C^2[0,1] \to C[0,1]$, заданного дифференциальным уравнением $L(u) \equiv u''_{xx} + \lambda(1-x)u = 0$ с граничными условиями $u(0)=0$, $u'_x(1) = 0$. Подстановки $u= =v(\lambda^{1/2}(1-x))$ и $v(t)=t^{1/2}z(2t^{3/2}/3)$ приводят его к виду

$$L(u(x)) \equiv \lambda^{7/6}(1-x)^{3/2}[z''(s) + \frac{1}{s}z'(s) + (1-\frac{1}{9}s^2)z(s)] = 0,$$

где $s=2\lambda^{1/2}(1-x)^{3/2}/3$. Получаем $z(s)=c_1I_{1/3}(s)+c_2I_{-1/3}(s)$ ($I_\nu(s)$ – функция Бесселя). В основании $x=0$ имеем $z(s_0)=z(2\lambda^{1/2}/3)=z[(2/3)(ql^3/EI)^{1/2}]=0$, а на верхнем конце, т.е. при $x=1$ ($s=0$), находим $-2^{-2/3}3^{-1/3}\lambda^{1/3}[s^{-1/3}z(s) + 3s^{2/3}z'(s)] = 0$. Следовательно, $c_1=0$, $z(s)=c_2I_{-1/3}(s)$, и из условия $I_{-1/3}[(2/3)(ql^3/EI)^{1/2}]=0$ определяем точку бифуркации – критическую длину стержня – через первый корень функции Бесселя $I_{-1/3}$: $1.8663 \approx \mu_1^{-1/3}=(2/3)(ql^3/EI)^{1/2}=2\lambda_0^{1/2}/3$. Соответствующая собственная функция имеет вид $\varphi(x)=(1-x)^{1/2}I_{-1/3}(2\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}/3)$.

Полагая в (1), (2) $y'=u$ и $\lambda=\lambda_0+\varepsilon$, получаем нелинейную задачу

$$u''+\lambda_0(1-x)u = -\varepsilon(1-x)u - \frac{3}{2}\lambda_0(1-x)u^3 + 3uu'^2 + \ldots, \qquad u(0) = 0, \qquad u'(1) = 0.$$

Используя лемму, Шмидта [1] приходим к уравнению разветвления $L_{11}\xi\varepsilon+L_{30}\xi^3+\ldots=0$, где

$$L_{11} = -\langle(1-x)\varphi,\varphi\rangle = -\int_0^1 (1-x)^2 I_{-1/3}{}^2\left(\frac{2}{3}\lambda_0{}^{1/2}(1-x)^{3/2}\right)dx < 0,$$

$$L_{30}=-\frac{3}{2}\lambda_0\int_0^1(1-x)\varphi^4dx+3\int_0^1\varphi^2\varphi'^2dx=-\frac{3}{2}\lambda_0\int_0^1 t^3 I_{-1/3}{}^4(\frac{2}{3}\lambda_0{}^{1/2}t^{3/2})dt+$$

$$+3\lambda_0{}^2\int_0^1 t^3 I_{-1/3}{}^2(\frac{2}{3}\lambda_0{}^{1/2}t^{3/2})I_{2/3}{}^2(\frac{2}{3}\lambda_0{}^{1/2}t^{3/2})dt<0$$

(знак L_{30} определяется разложениями в ряды функций Бесселя).

Следовательно, асимптотика решения нелинейной задачи в окрестности точки бифуркации имеет вид

$$y(x)=(-\frac{L_{11}\varepsilon}{L_{30}})^{1/2}(1-x)^{1/2}I_{-1/3}(\frac{2}{3}\lambda_0{}^{1/2}(1-x)^{3/2})+o(\varepsilon),$$

и ветвление подкритическое $\varepsilon<0$. Предложен также численный метод сведения к задаче Коши, использующий групповые преобразования [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *М.М. Вайнберг, В.А. Треногин.* Теория ветвления. -М.: Наука, 1965, 524 с.
2. *Р.О. Кузьмин.* Бесселевы функции. -М.: ГИТТЛ, 1935.
3. *На У.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. - М.: Мир, 1982, 296 с.

РОБАСТНОЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ

© *П.В. Пакшин*

Арзамасский филиал НГТУ, Арзамас

Рассмотрим сложную гибридную систему в стандартной форме

$$\dot{x}_l(t) = A_l(i_t)x_l(t) + B_l(i_t)u_l(t) + \sum_{j=1}^{L} A_{lj}(i_t)x_j(t), \quad l = 1,\dots,L, \tag{1}$$

где $x=[x_1,...,x_L]$ – n-мерный вектор состояния, x_l – n_l-мерный вектор состояния l-й локальной подсистемы; u_l – m_l-мерный вектор управления l-й локальной подсистемы; $A_l(i_t)$, $B_l(i_t)$ – матрицы состояния и управления l-й локальной подсистемы размеров $n_l \times n_l$ и $n_l \times m_l$; $A_{lj}(i_t)$ – матрица размером $n_l \times n_j$, которая характеризует взаимосвязь между локальными подсистемами; i_t – марковская цепь с дискретным множеством состояний $\mathbf{N}=\{1,...,\nu\}$ и матрицей вероятности перехода $\mathbf{P}(t)=[P_{ij}(\tau)]_l^{\nu}=\exp(Q\tau)$, $P_{ij}(\tau)=\mathbf{P}\{i(t+\tau)=j \mid i(\tau)=j\}$ $(i,j\in\mathbf{N})$; $Q = [q_{ij}]_l^{\nu}$, $q_{ij}\geq 0$ $(i\neq j)$, $q_{ii}= =-\sum_{j\neq i}^{\nu} q_{ij}$, эта цепь характеризует изменение режимов системы.

Перепишем (1) в компактной форме $\dot{x}(t)=A_D(i_t)x(t)+B_D(i_t)u(t)+A_C(i_t)x(t)$, где $A_D= =\mathrm{diag}[A_1,...,A_L]$, $B_D=\mathrm{diag}[B_1,...,B_L]$, $A_C = [A_{ij}]_l^L$.

Ставится задача нахождения децентрализованного управления

$$u_D(t)=-K_D x(t), \tag{2}$$

где $K_D=\mathrm{diag}[K_1,...,K_L]$, которое гарантирует робастную устойчивость системы (1) в смысле экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом при произвольных интенсивностях изменения режимов, т.е. при произвольных q_{ij} $(i,j\in N)$.

Модель изолированной локальной подсистемы имеет вид

$$\dot{x}(t) = A_D(i_t)x(t) + B_D(i_t)u(t). \tag{3}$$

Введем функционал для номинальной подсистемы

$$J_D(x_0,u) = \mathrm{E}_{x_0}\left\{\int_0^{\infty}\left[x^T(t)M_D(i_t)x(t) + u^T(t)Q_D(i_t)u(t)\right]dt\right\}, \tag{4}$$

где $M_D=\mathrm{diag}[M_1,...,M_L]$, $Q_D=\mathrm{diag}[Q_1,...,Q_L]$ являются положительно определенными матрицами, E_{x_0} – оператор математического ожидания при $x(0)=x_0$. Этот функционал является суммой L функционалов

$$J_l(x_{l0},u) = \mathrm{E}_{x_{l0}}\left\{\int_0^{\infty}\left[x_l^T(t)M_l(i_t)x_l(t) + u_l^T(t)Q_l(i_t)u_l(t)\right]dt\right\}$$

для локальных подсистем системы (3).

Задачу нахождения робастного управления (2) можно свести к задаче минимизации (4) при структурных ограничениях.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В СИСТЕМЕ “ХИЩНИК–ЖЕРТВА” ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРИВИДОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ И ЗАПОВЕДНИКА

© М.Т. Терёхин

Рязанский государственный педагогический университет, Рязань

Исследуется система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 - \gamma x_1^2 + \delta(S - x_1),$$

$$x_2 = -mx_2 + nx_1 x_2 - px_2, \qquad (1)$$

в которой x_1, x_2 – численности особей в популяции соответственно жертв и хищников, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,m,n,p,S$ – положительные числа, S – число особей в популяции жертв, находящихся в заповеднике.

Определяются условия, при которых система (1) имеет состояние равновесия (x_1^0, x_2^0) такое, что $x_1^0 > 0$, $x_2^0 > 0$. Заменой переменных $x_1 = y_1 + x_1^0$, $x_2 = y_2 + x_2^0$, система (1) сводится к системе

$$\dot{y} = Ay + f(y), \qquad (2)$$

состоянием равновесия которой является точка (0,0), $y=(y_1,y_2)$.

В докладе рассматривается случай, когда матрица A имеет комплексно–сопряженные собственные значения $\lambda_1=a+ib$, $\lambda_2=a-ib$, $b>0$, $a\leq 0$. Система (2) неособенным линейным преобразованием сводится к системе (для которой сохраним обозначения системы (2)), в которой матрица A определяется равенством $A=[\mathrm{colon}(a,-b), \mathrm{colon}(b,a)]$.

1. Пусть $a>0$. Состояние равновесия (0,0) системы (2) неустойчиво. Для определения условий существования периодического решения систему (2) преобразованием $y_1=\rho\cos\varphi$, $y_2=\rho\sin\varphi$ сводим к уравнению

$$\rho'_\varphi = \rho(a + \rho A(\varphi))/(b + \rho B(\varphi)), \qquad (3)$$

$A(\varphi)$, $B(\varphi)$ – многочлены относительно $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

Решение уравнения (3) определяется как $\rho(\alpha,\varphi) = \alpha \exp(a\varphi/b + \alpha\overline{a_1}(\varphi) + o(\alpha) + \alpha o(a))$, где $\overline{a_1}(\varphi)$ – известная функция. Следовательно, α, при котором $\rho(\alpha,\varphi)$ – 2π-периодическое решение уравнения (3), удовлетворяет равенству $a2\pi/b + \alpha\overline{a_1}(2\pi) + o(\alpha) + \alpha o(a) = 0$. Определены условия существования пары (a,α) такой, что $\rho(\alpha,\varphi)$ – единственное ненулевое 2π-периодическое решение уравнения (3), устойчивое при $a_1(2\pi)>0$ и расположенное в достаточно малой окрестности нулевого решения.

2. Пусть $a=0$. В этом случае решение системы (3) можно записать в виде $\rho(\alpha,\varphi)= =\alpha \exp(a_1^*(\varphi)\alpha + a_2^*(\varphi)\alpha^2 + \ldots + a_n^*(\varphi)\alpha^n + o(\alpha^n))$, в котором $a_i^*(\varphi)$, $i=1,2,\ldots,n$ – известная функция. Отсюда следует, что, если $a_1^*(2\pi) = a_2^*(2\pi) = \ldots = a_{m-1}^*(2\pi) = 0$, $a_m^*(2\pi) \neq 0$, и $a_m^*(2\pi) < 0$, то состояние равновесия (0,0) системы (3) асимптотически устойчиво, если же $a_m^*(2\pi) > 0$, то – неустойчиво.

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ В ГАЗАХ

© *В.М. Холопов, С.И. Худяев*

Сыктывкарский госуниверситет, Сыктывкар

В 1977 г. на V Всесоюзном симпозиуме по горению и взрыву в г. Одесса Б.И. Хайкиным и С.И. Худяевым был представлен доклад, где вопреки устоявшимся представлениям о возможности только одного стационарного режима горения, присущего данной системе, была доказана возможность двух устойчивых режимов горения в конденсированных системах при протекании двух конкурирующих реакций. Позже было установлено численными расчётами и экспериментально, что оба режима могут быть реализованы в зависимости от способа зажигания. При этом в численных расчётах вывод о неединственности получил подтверждение и для газовых систем (число Льюиса $L>0$). Естественно возникает вопрос о качественном и аналитическом исследовании этого случая, об описании области неединственности. Этому исследованию и посвящено настоящее сообщение.

Стационарная волна горения газовой среды при протекании экзотермических реакций по схеме $A_1 \leftarrow A_0 \rightarrow A_2$ может быть описана системой уравнений для температуры T и концентрации a исходного вещества A_0

$$(\lambda T')' - cmT' + Q_1 w_1 + Q_2 w_2 = 0, \tag{1}$$

$$(D\rho a')' - ma' - w_1 - w_2 = 0 \tag{2}$$

с естественными граничными условиями

$$x=-\infty:\quad T=T_-,\ a=1;\quad x=+\infty,\ T'=0,\ a=0. \tag{3}$$

Здесь λ, D, c, ρ – теплофизические параметры ($L=Dc\rho\lambda^{-1}>0$), Q_i – теплоты реакций, w_i – их скорости:

$$w_i = a^n \Phi_i(T),\quad \Phi_i(T) = k_i \exp(-E/RT),\quad i=1,2, \tag{4}$$

где n – порядок реакции, E_i – энергии активации, k_i – нормировочные множители, R – газовая постоянная. Искомыми величинами являются скорость горения m и профили $a(x)$ и $T(x)$, в частности, температура горения $T_+ = T|_{x=+\infty}$.

Неединственность решения системы (1) – (3) как и в случае конденсированных систем имеет место при условии, когда в интервале $T_1<T<T_2$, $T_i = T_- + Q_i/c$ функции $\Phi_i(T)$ пересекаются, причём:

$$\Phi_2(T_1) \ll \Phi_1(T_1),\qquad \Phi_1(T_2) \ll \Phi_2(T_2). \tag{5}$$

С помощью метода согласования внешнего и внутреннего решений (в первом приближении при $n \le 1$) удаётся количественно описать область неединственности, найти $a(x)$, $T(x)$ и формулу для скорости m:

$$m^2 = 2\frac{\lambda\Gamma(n+1)}{cL^2}\left[\frac{Q_1}{c(T_+ - T_-)}\left(\frac{RT_+^2}{E_1(T_+ - T_-)}\right)^{n+1}\Phi_1(T_+) + \frac{Q_2}{c(T_+ - T_-)}\left(\frac{RT_+^2}{E_2(T_+ - T_-)}\right)^{n+1}\Phi_2(T_+)\right].$$

При $n \to 0$ эта формула перестаёт зависеть от L и переходит в соответствующую формулу для $L=0$, $n=0$. Здесь имеем однозначное выражение скорости m через температуру горения T_+.

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦЫ В СИЛОВЫХ ПОЛЯХ И ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТОКА

© Ю.З. Алешков, М.Ю. Рахимова

СпбГУ, Санкт-Петербург

Движение частицы происходит в трехмерном пространстве x, y, z с учетом времени t. При этом можно говорить о четырехмерном пространстве–времени. Будем рассматривать евклидово пространство

$$x_1=x,\ \ x_2=y,\ \ x_3=z\ \ x_4=ict,\ \ \bar{x}=(\bar{r},ict).$$

Элемент длины $d\sigma$ в нем определяется равенством $d\sigma^2 = d\bar{x}^* d\bar{x}$. Преобразования, обусловленные смещением и поворотом координатных осей, являются линейными ортогональными. Величина $d\sigma^2$ является инвариантом. Рассматривая вращение плоскости

$$x_1 = a_{11}x_1^| + a_{14}x_4^|,\ \ x_2 = x_2^|,\ x_3 = x_3^|,\ x_4 = a_{41}x_1^| + a_{44}x_4^|$$

и учитывая условия ортогональности, получим формулу преобразования Лоренца. Первоначально условие Лоренца было получено из форм инвариантности уравнений Максвелла. В выражении

$$d\sigma^2=(ic)^2d\tau^2 \quad (d\tau^2=(1-v^2/c^2)dt^2,\quad v^2=\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^2)$$

величина $d\tau$ является инвариантом и имеет размерность времени. Поэтому можно принять τ за абсолютное время. Тогда из второго закона механики $\frac{d}{d\tau}\left(m_0\frac{d\bar{r}}{d\tau}\right)=\bar{F}$ получаем обычную форму уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\bar{f}_*,\quad m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Если заряженная частица находится в электромагнитном поле, то

$$\bar{f}_* = e(\bar{E}+\bar{v}\times\bar{H}/c).$$

При рассмотрении движения частицы в потоке жидкости следует решать соответствующую гидродинамическую задачу о взаимодействии частицы с потоком. При некоторых, достаточно сильных, предположениях эта задача решена. Однако в общем случае требуется принимать ту или иную гипотезу о механизме взаимодействия частицы с потоком. Принимается, что на частицу действуют инерционная сила и сила сопротивления с учетом предыстории движения.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЗА ФИКСИРОВАННОЕ ВРЕМЯ ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

© *П.Г. Черников*

Мордовский государственный университет, Саранск

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f_1(t,y,u) \tag{1}$$

управляема в некотором классе K_0 управлений вида $u(t)=u(t,y_0)$. Здесь $y\in R^n$, $t\in[0,T]$ $(0<T<\infty)$; $u\in R^m$; $f_1\in C([0,T]\times R^n\times R^m, R^n)$; управление $u(t,y_0)$ переводит точку $y_0\in R^n$ в фиксированную точку $x^*\in R^n$ за время T согласно (1). Исследуем управляемость возмущенной системы вида

$$\dot{x} = f_1(t,x,u) + f_2(t,x,\dot{x},u) \tag{2}$$

в том же классе управлений K_0, где $f_2\in C([0,T]\times R^n\times R^n\times R^m, R^n)$. Для решения поставленной задачи применен метод сравнения [1]. При подстановке произвольного управления $u(t,z)\in K_0$ в (1) и (2) получим соответственно системы

$$\dot{y} = \varphi_1(t,y,z)$$

и

$$\dot{x} = \varphi_1(t,x,z) + \varphi_2(t,x,\dot{x},z).$$

Пусть функция φ_1 представима в виде $\varphi_1(t,y,z) = \varphi_{10}(t,y) + \varphi_{11}(t,y,z)$ так, что в области $D=\{(t,y)\colon t\in[0,T],\ y\in R^n\}$ существует непрерывная производная $\partial\varphi_{10}/\partial y$. Обозначим через $V(t\colon t_0, V_0)$ решение задачи Коши $\dot{V} = \varphi_{10}(t,V)$, $V(t_0) = V_0$.

Т е о р е м а. *Пусть выполняются условия*:

$$\|\varphi_{10}(t,y_1) - \varphi_{10}(t,y_2)\| \le \chi_0(t)\|y_1 - y_2\|,$$

$$\|\varphi_{11}(t,y_1,z_1) - \varphi_{11}(t,y_2,z_2)\| \le \eta_1(t)\|y_1 - y_2\| + \eta_2(t)\|z_1 - z_2\|,$$

$$\|\varphi_2(t,y_1,\dot{y}_1,z_1) - \varphi_2(t,y_2,\dot{y}_2,z_2)\| \le \theta_1(t)\|y_1 - y_2\| + \theta_2(t)\|\dot{y}_1 - \dot{y}_2\| + \theta_3(t)\|z_1 - z_2\|,$$

$$\forall y_i,\dot{y}_i,z_i \in R^n,\quad \chi_0,\eta_i,\theta_j \in C([0,T],[0,+\infty)),\quad i=1,2,\ j=1,2,3,\ 0\le\theta_2(t)<1;$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}(t\colon s,x_1)\varphi_{11}(s,x_1,z_1) - \frac{\partial V}{\partial x}(t\colon s,x_2)\varphi_{11}(s,x_2,z_2)\right\| \le \chi_1(s)\|x_1 - x_2\| + \chi_2(s)\|z_1 - z_2\|,$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}(t\colon s,x_1)\varphi_2(s,x_1,\dot{x}_1,z_1) - \frac{\partial V}{\partial x}(t\colon s,x_2)\varphi_2(s,x_2,\dot{x}_2,z_2)\right\| \le$$
$$\le \psi_1(s)\|x_1 - x_2\| + \psi_2(s)\|\dot{x}_1 - \dot{x}_2\| + \psi_3(s)\|z_1 - z_2\|$$

$$\forall x_i,\dot{x}_i,z_i \in R^n,\quad \chi_i,\psi_j \in C([0,T],[0,+\infty)),\quad i=1,2,\ j=1,2,3,\ 0\le\psi_2(s)<1;$$

$$q = \int_0^T [\alpha(s)\beta(T)\gamma(T,s) + \delta(s)]ds \exp\int_0^T \chi_1(s)ds < 1.$$

Тогда $\forall x_0 \in R^n$ *существует хотя бы одно управление* $u \in K_0$, *переводящее* x_0 *в* x^* *за время* T *с помощью системы* (1).

Здесь

$$\alpha(s) = \psi_1(s) + \frac{\chi_0(s) + \eta_1(s) + \theta_1(s)}{1 - \theta_2(s)} \psi_2(s), \quad \beta(T) = \int_0^T (\delta(s) + \chi_2(s))ds,$$

$$\gamma(T, s) = \exp\left(\int_s^T (\alpha(\tau) + \chi_1(\tau))d\tau \right), \quad \delta(s) = \psi_3(s) + \frac{\eta_2(s) + \theta_3(s)}{1 - \theta_2(s)} \psi_2(s).$$

В работе осуществлена попытка практической реализации некоторых идей об управляемости нелинейных систем, высказанных профессором Е.В. Воскресенским на руководимом им семинаре Средневолжского математического общества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.В. Воскресенский.* Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, Саран. фил., 1990, 224 с.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ НА ПОРИСТОМ ОСНОВАНИИ

© *Э.Н. Егерева*

Мордовский государственный университет, Саранск

Рассматривается распространение поверхностных волн в трехслойной жидкости, находящейся на недеформируемом пористом основании, насыщенном контактирующей с ним жидкостью. Пористая среда ограничена снизу твердой непроницаемой стенкой.

Движение жидкостей в трех свободных слоях описывается уравнениями Эйлера и непрерывности; в пористой среде – обобщенным уравнением Дарси и уравнением непрерывности.

Граничные условия для кинематических и динамических величин записаны в виде

1) на непроницаемом дне ($z=-h_4$): $v_{4z}=0$;

2) на границе раздела пористая среда – нижняя жидкость (z=0): $v_{4z}=v_{1z}$, $p=p_1$;

3) на границе раздела нижней и средней жидкостей ($z=h_1+\xi_1$):

$$v_{1z} = \frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \quad v_{1z}=v_{2z}, \quad p_1=p_2;$$

4) на границе раздела средней и верхней жидкостей ($z=h_1+h_2+\xi_2$):

$$v_{2z} = \frac{\partial \xi_2}{\partial t}, \quad v_{2z}=v_{3z}, \quad p_2 = p_3;$$

5) на свободной поверхности ($z=h_1+h_2+h_3+\xi_3$):

$$v_{3z} = \frac{\partial \xi_3}{\partial t}, \quad p_3 = \hat{p},$$

где v_{iz} – вертикальные компоненты скоростей; p_i – давления, $\xi_i=\xi_i(x,y,t)$ – смещения поверхностей; h_1,h_2,h_3 и h_4 – толщины слоев нижней, средней, верхней жидкостей и пористой среды соответственно.

Решение уравнений ищется в виде бегущих затухающих волн. Получено дисперсионное уравнение в общем виде. Рассматриваются его различные частные случаи. Исследованы зависимости частоты и декремента затухания от толщин слоев трехслойной жидкости и пористой среды.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ В ТЕЧЕНИИ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТЕЙ

© *С.И. Мартынов*

Мордовский государственный университет, Саранск

Метод, предложенный для решения задачи о гидродинамическом взаимодействии частиц в потоке с линейным профилем скоростей [1,2], может быть использован для случая течения со скоростью, представляемой в виде многочлена произвольной целой степени. Рассмотрим гидродинамическое взаимодействие двух твердых сферических частиц одинакового радиуса, которые помещены в неограниченную несжимаемую вязкую жидкость. Считается, что на частицы не действуют внешние силы, и моменты и размеры частиц достаточно маленькие, чтобы число Рейнольдса было меньше единицы. Скорость жидкости на бесконечности есть полином второй степени от координат. Уравнения для скорости и давления в жидкости записываются в приближении Стокса. На поверхности частиц имеем условия прилипания, на бесконечности требуем выполнения условия затухания возмущений. Решение уравнений гидродинамики с граничными условиями представляются, в силу их линейности, как сумма решений четырех задач: первые три задачи соответствуют фиксированным положениям сфер в потоках с линейными и параболическим профилем скоростей; четвертая задача аналогична задаче о движении частиц с линейными скоростями в покоящейся на бесконечности жидкости. Для нахождения решений уравнений с соответствующими граничными условиями, приведенными в условиях трех задач, могут быть использованы результаты, полученные в [1,2], для взаимодействия частиц в линейном поле течения. Выражения для скорости и давления жидкости вокруг двух сфер в задаче с параболическим профилем скоростей ищутся в таком же виде, с той только разницей, что тензорные величины в этих выражениях представляются в виде комбинаций тензоров не второго и первого порядков, определяющих линейное течение и относительное положение частиц, а тензоров третьего, задающего параболический профиль, и первого, определяющего относительное положение частиц, порядков. Соответствующие выражения для тензорных коэффициентов легко выписываются. Найденные выражения для скорости и давления используются при вычислении сил и моментов, действующих на частицы в параболическом потоке. Вычисления позволяют сделать следующий вывод: взаимодействие частиц в линейном потоке и потоке параболического типа, существенно различаются по структуре. Это отличие связано с тем, что, во-первых, для частицы в течении с линейным профилем скоростей сила и момент со стороны жидкости обусловлены присутствием вблизи другой частицы, в то время как для частицы в потоке с параболическим профилем скоростей имеется составляющая силы, не связанная с гидродинамическим взаимодействием частиц, а определяемая только скоростью основного потока; во-вторых, для частиц в потоке с параболическим профилем скоростей имеется составляющая силы, связанная с различными значениями градиента скорости жидкости в точках, занимаемых центрами частиц (слагаемые в выражениях для сил и моментов, связанные с движением частиц в жидкости с различными относительными скоростями, имеют одинаковую структуру как для течений с линейными, так и для течений с параболическими профилями скоростей). Это приводит к различному относительному движению частиц в течениях с линейным и параболическим профилем скоростей, что весьма существенно при определении величин, характеризующих коллективные свойства жидкости с твердыми частицами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S.I. Martynov.* The hydrodynamic interaction of two spherical particles in viscous fluid // 7th Israeli-Norwegian Symp. "Fluid Mechanics of Heterogeneous Systems". Trondheim, Norway, 1994. p.67-69.
2. *С.И. Мартынов.* Гидродинамическое взаимодействие трех сферических частиц в вязкой несжимаемой жидкости // Тезисы II междунар. конф. "Диф. уравн. и их приложения", Саранск, 1996, с.91.

КОЛЕБЛЕМОСТЬ РАДИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ р-УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© *Дж.Д. Мирзов*

Адыгейский государственный университет, Майкоп

Рассмотрим уравнение

$$\Delta_p u+F(|x|,u)=0, \tag{1}$$

где $x=(x_1,...,x_N)\in R^N$, $N\geq 2$, $\Delta_p u\equiv \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. $\nabla u=(\partial u/\partial x_1,...,\partial u/\partial x_N)$ $F:[a,+\infty)\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ – непрерывная на $[a,+\infty)\times\mathrm{R}$ функция, $p\geq 2$, $a>0$ – константы.

В работе с помощью результатов [1] изучаются некоторые асимптотические свойства радиальных решений уравнения (1), т.е. таких решений u(x), которые зависят только от

$$t=|x|=\left(x_1^2+\cdots+x_N^2\right)^{1/2}.$$

Радиальная функция $u(x)=y(|x|)=y(t)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $y(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(t^{N-1}|y'|^{p-2}y')'+t^{N-1}F(t,y)=0.$$

Решение $u(x_1,...,x_N)$ уравнения (1), заданное в некоторой окрестности ∞, назовем *колеблющимся*, если оно имеет нули вне любого шара с центром в начале координат. Если для решения u уравнения (1), заданного в некоторой окрестности ∞, найдется шар с центром в начале координат, вне которого $u(x_1,...,x_N)\neq 0$, то такое решение назовем *неколеблющимся*.

Например, доказана следующая

Теорема. *Пусть* $N\leq p$ *и* $\int^{+\infty} t^{N-1}f(t)dt<+\infty$. *Тогда для колеблемости всех заданных в некоторой окрестности* ∞ *радиальных решений уравнения*

$$\Delta_p u+f\left(|x|\right)|u|^{\lambda-2}u=0, \tag{2}$$

где $f:[a,+\infty)\to[0,+\infty)$ *непрерывна на* $[a,+\infty)$, $p\geq 2$, $a>0$, $\lambda>1$ – *константы, при* $\lambda<p$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int^{+\infty} t^{N-1}f(t)\left(\int_a^t \tau^{-(N-1)/(p-1)}d\tau\right)^{\lambda-1}dt=+\infty,$$

а при $\lambda>p$ – *чтобы*

$$\int^{+\infty} t^{-(N-1)/(p-1)}\left(\int_t^{+\infty}\tau^{N-1}f(\tau)d\tau\right)^{1/(p-1)}dt=+\infty.$$

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ НА ПЛОСКОСТИ

© *В.К. Поливенко*

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Рассматривается вопрос о существовании и глобальной устойчивости инвариантной поверхности в интегральном пространстве системы двух дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(y) + \mu R_1(t,x,y), \qquad \dot{y} = f_2(x) + f_4(y) + \mu R_2(t,x,y), \tag{A}$$

где $f_i \in C^1$, $f(0)=0$, $i=1,...,4$; $R_j \in C$, $j=1,2$ – ω-периодические по t функции равномерно аналитические по x и y в окрестности каждой точки (x,y) при $t\in[0,\omega]$ и достаточно малом $|\mu|$.

Сначала рассматривается невозмущенная система (A) (при $\mu=0$):

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(y), \qquad \dot{y} = f_3(x) + f_4(y). \tag{1}$$

Предполагается, что

1. $h_2(y)h_3(x)>0$, $xy\neq 0$. (2)

2. Существуют положительные постоянные α,β и X_0,Y_0 такие, что в области

$$|x| < \alpha, \quad |y| < \beta \tag{3}$$

имеют место неравенства

$$h_1(x) + h_4(y) > 0, \;\; h_1(x)h_4(x) - h_2(y)h_3(x) > 0 \qquad \text{при } xy\neq 0, \tag{4}$$

а в области $|x|>X_0$, $|y|>Y_0$ ($\alpha<X_0$, $\beta<Y_0$) – обобщенные условия Рауса-Гурвица

$$h_1(x) + h_4(y) < -\varepsilon, \;\; h_1(x)h_4(x) - h_2(y)h_3(x) > 0, \tag{5}$$

где $h_i(z)=f_i(z)/z$, $z=x,y$, $i=1,...,4$, $\varepsilon>0$.

В силу условий (2),(4) начало координат вполне неустойчиво, а в силу (5) система (1) диссипативна, кроме того, кривые L_1: $f_1(x)+f_2(y)=0$, L_2: $f_3(x)+f_4(y)=0$ в области

$$\alpha \le |x| \le X_0, \;\; \beta \le |y| \le Y_0 \tag{6}$$

пересекаются не менее одного раза в каждой четверти плоскости Oxy.

3. Указанные кривые L_1 и L_2 не касаются друг друга, так что равновесия системы (1) простые.

4. В области (6) в каждой четверти система (1) имеет по одному состоянию равновесия, в первой и третьей четвертях – это устойчивые узлы, а во второй и четвертой – седла.

В силу диссипативности (1), неустойчивости начала координат и условий 3, 4 система (1) имеет инвариантную замкнутую кривую ∂_0, состоящую из двух узлов и четырех сепаратрис.

Т е о р е м а. *Если выполняются условия* 1-4, *то существует* $\mu_0>0$ *такое, что при* $|\mu|\le\mu_0$ *система* (A) *имеет инвариантную асимптотически устойчивую поверхность* M_μ, *гомеоморфную тору.*

ПОКОМПОНЕНТНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

© *Е.А. Черноиванова*

Мордовский государственный университет, Саранск

При исследовании управляемости систем по части компонент, используя теоремы из [1], необходимо проверить условия наличия покомпонентного асимптотического равновесия относительно весовых функций у системы

$$dx/dt=A(t)x. \tag{1}$$

Определение. *Будем говорить, что уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие по компонентам* i, $i\in M$, *на многообразии* Q *с весовыми функциями* $m_i(t)$, $i\in M$, *если каждое его решение* $x(t{:}t_0,x_0)$, $t_0\geq T_0$, $x_0\in Q$, *обладает свойством*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_i(t{:}t_0,x_0)}{m_i(t)}=c_i,\quad i\in M, \tag{2}$$

и, наоборот, для любых чисел c_i, $i\in M$, *существует решение* $x(t{:}t_0,x_0)$, $t_0\geq T_0$, $x_0\in Q$, *удовлетворяющее условию* (2).

Теорема. *Уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие по компонентам* i, $i\in M$, *на многообразии* Q *с весовыми функциями* $m_i(t)$, $i\in M$, *тогда и только тогда, когда оно покомпонентно асимптотически эквивалентно по Брауеру на этом многообразии относительно некоторой функции* $\mu_i(t)$, *где* $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_i(t)=p_i\neq+\infty,\quad p_i\neq 0,\quad i\in M$, *уравнению*

$$\frac{dy}{dt}=F(t,y),\quad F_i(t,y)=\frac{d}{dt}c_i m_i(t),\quad i\in M.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.В. Воскресенский.* Методы сравнения в нелинейном анализе. - Саранск: Изд-во Сарат. ун-та. Саран. фил., 1990, 224 с.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

© *А.А. Полосин*

МГУ, Москва

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx}+u_{yy}=0, \quad m>0, \tag{1}$$

в области D, ограниченной при $y\geq 0$ нормальной кривой Г:

$$\Gamma=\{(x,y):(x-0.5)^2+4y^{m+2}/(m+2)^2=0.25, \quad 0\leq x\leq 1\}$$

с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, а при $y<0$ – его характеристиками

$$AC_1=\{(x,y):\ \xi=x-2(-y)^{(m+2)/2}/(m+2)=0, \quad 0<x\leq 0.25\},$$

$$BC_2=\{(x,y):\ \eta=x+2(-y)^{(m+2)/2}/(m+2)=1, \quad 0.75<x\leq 1\}$$

и отрезком C_1C_2: $0.25<x<0.75$ прямой $y=-[(m+2)/8]^{2/(m+2)}$.

Обозначим через D^+ и D^- части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, через C – середину отрезка AB, через CC_1 и CC_2 – характеристики уравнения (1), соединяющие C с C_1 и C_2.

З а д а ч а. В области D найти функцию

$$u=u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup C_1C_2\,/\overline{(CC_1\cup CC_2)})\cap C^2(D^+\cup D^-\,/\overline{(CC_1\cup CC_2)}),$$

удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям

$$u|_\Gamma=\varphi(s), \qquad u|_{AC_1}=\psi(\eta), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{C_1C_2}=\chi(x),$$

где $\varphi(x),\psi(x),\chi(x)$ – заданные функции, причем $\psi(0)=\varphi(r)$, r – длина Г, а функция $\chi(x)$ на концах интервала (0.25,0.75) может обращаться в бесконечность порядка не выше $(0.25+\beta/2)$, где $\beta=m/[2(m+2)]$.

Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 96-15-96097.

СХОДИМОСТЬ СПЕКТРОВ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

© *Е.И. Гордон, И.А. Шерешевский*

Нижегородский госуниверситет, Нижний Новгород

В работе рассматривается общая самосопряженная краевая задача для оператора Шредингера в прямоугольной области n-мерного пространства и ее разностная аппроксимация на прямоугольных равномерных сетках.

Доказывается сходимость собственных значений и собственных векторов разностной краевой задачи к соответственно собственным значениям и таблицам собственных функций исходной задачи. При этом сходимость понимается в смысле [1], где аналогичный результат получен для оператора Шредингера во всем пространстве с растущим на бесконечности потенциалом.

Доказательство основано на результатах [2], в которой методами нестандартного анализа указанный факт по существу установлен для операторов с периодическими граничными условиями, и последующем применении разностного аналога формулы М.Г.Крейна, описанного в [3]. Отметим, что в одномерном случае аналогичный результат для более общих дифференциальных операторов получен в [4], однако методы этой работы трудно обобщить для многомерных задач.

Работа поддержана РФФИ, грант 95-01-00673.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *T.Digernes, V.Varadarajan, S.Varadhan* // Reviews in Mathematical Physics, 1994, v.6, №4, p.621-648.
2. *S. Albeverio, E.I. Gordon, A.Yu. Khrennikov.* // To appear in Acta Applicandae Mathematica.
3. *И.А. Окомелькова, И.А. Шерешевский.* // Математическое моделирование, 1995, т.7, N5, с.89.
4. *H.-O. Kreiss* // Mathematics of computation, 1972, v.26, №119, p. 603-624.

РЕШЕНИЕ БОКОВОЙ ЗАДАЧИ СВЯЗИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РАНГА И ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

© *В.Р. Смилянский*

Новосибирская государственная академия экономики и управления, Новосибирск

Пусть задано обыкновенное линейное дифференциальное уравнение порядка $n=2m$

$$L_1 L_2 .. L_m y = 0, \tag{1}$$

где L_i – линейный дифференциальный оператор ($D=d/dz$):

$$L_i = D^2 + (a_i + b_i z^{-1})D^1 + (c_i + d_i z^{-1} + e_i z^{-2})D^0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

a_i,b_i,c_i,d_i,e_i a_i,b_i,c_i,d_i,e_i – постоянные.

Уравнение

$$L_i Y=0 \tag{3}$$

имеет иррегулярную особую точку первого ранга z=00 и регулярную особую точку z=0. Для него решена в явном виде так называемая "боковая задача связи" (решения $\lambda_{i1},\lambda_{i2}$ его характеристического уравнения $\lambda^2+a_i\lambda+c_i=0$ предполагаются различными). Уравнение (1) также имеет иррегулярную особую точку первого ранга z=00 и регулярную особую точку z=0. Пусть все решения $\lambda_k (k = \overline{1,2m})$ его характеристического уравнения различны.

В работе решена в явном виде боковая задача связи для уравнения (1). При этом постоянные матрицы, реализующие решение боковой задачи связи для уравнения (1), выражены через постоянные матрицы, реализующие решение боковой задачи связи для уравнения (3).

О ПРИВОДИМОСТИ АВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© *Д.В. Пашуткин*

Мордовский университет, Саранск

Даны дифференциальные уравнения

$$dx/dt=A(t)x+f(t,x), \tag{1}$$

$$dy/dt=A(t)y, \tag{2}$$

где $A(t)$ – непрерывная $n\times n$ матрица, $f\in C^{(0,1)}([T,+\infty)\times R^n, R^n)$; решения $x(t:t_0, x_0)$ уравнения (1) существуют при всех $t,t_0\in[T,+\infty)$, $x_0\in R^n$.

В [3] получены условия приводимости ([1], [2]) уравнения (1) к уравнению (2). Однако эти условия не распространяются на случай, когда уравнения (1) и (2) являются автономными.

Предположим, что A и f не зависят от t. Рассмотрим уравнение

$$du/dt=-Y(t)f(Y(-t)u), \tag{3}$$

где $Y(t)$ – фундаментальная матрица решений уравнения (2).

Т е о р е м а 1. *Пусть уравнение* (3) *приводимо к уравнению с нулевой правой частью. Тогда уравнение* (1) *приводимо к уравнению* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу автономности уравнения (1)

$$x^{-1}(t:0,x_0)=x(0:t,x_0),$$

и $z(t:0, x_0)=x(-t:0, x_0)$ является общим решением уравнения

$$dz/dt=-Az-f(z).$$

В результате замены переменных $z=Y(-t)u$ оно перейдет в уравнение (3). Так как по критерию приводимости ([1],[2]) $u(t:0,u_0)$ есть преобразование Ляпунова, то $Y(t)x^{-1}(t:0,x_0)$ является преобразованием Ляпунова, и по критерию приводимости уравнение (1) приводимо к уравнению (2).

Укажем признак приводимости уравнения (1) к уравнению (2), основанный на теореме 1.

Пусть K – класс функций по Хану, то есть множество положительных строго возрастающих непрерывных функций $a(\alpha)$, $\alpha\in[0,+\infty)$ таких, что $a(0)=0$.

Т е о р е м а 2. *Пусть существуют функции* V_1, $V_2\in C^1$ *такие, что*

1. $a_1(\|x\|)\le V_1(t,x)$, $a_1\in K$, $a_1(\alpha)\to\infty$ при $\alpha\to\infty$;

2. $dV_{1(3)}(t,x)/dt\le 0$;

3. $V_2(t,x)\le a_2(\|x\|)$, $a_2\in K$, $a_2(\alpha)\to\infty$ *при* $\alpha\to\infty$;

4. $dV_{2(3)}(t,x)/dt\ge 0$;

5. $a_1^{-1}(V_1(T,x))\le k_1\|x\|$; $a_2^{-1}(V_2(T,x))\ge k_2\|x\|$;

тогда уравнение (1) *приводимо к уравнению* (2).

Доказательство проводится по следующей схеме. С помощью дифференциальных неравенств показывается, что при наложенных условиях уравнение (3) приводимо к уравнению с нулевой правой частью. Из теоремы 1 вытекает приводимость уравнения (1) к уравнению (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.В. Воскресенский.* О приводимости нелинейных дифференциальных уравнений // Вестн. Морд. ун-та., 1996, №4, с.38-41.
2. *Е.В. Воскресенский.* О ляпуновских группах преобразований // Дифф. уравнения, 1996, т.32, №11, с.1574-1575.
3. *П.А. Шаманаев.* Ляпуновские преобразования и устойчивость движения. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук., Морд. университет, 1997.

СПЕКТР ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАССИВА КВАНТОВЫХ ТОЧЕК С ВИХРЯМИ ААРОНОВА-БОМА

© В.А. Гейлер, А.В. Попов

Мордовский университет, Саранск

Рассматривается математическая модель периодического массива квантовых точек, находящегося в однородном магнитном поле **B** (**B** ортогонален плоскости массива), с вихрями Ааронова–Бома в центрах этих точек. Эта модель строится с помощью теории самосопряженных расширений симметричных операторов в гильбертовом пространстве аналогично явно решаемым моделям. Исходным для построения модели является оператор Ландау на плоскости с вихрем Ааронова–Бома, который в полярной системе (ρ,φ) имеет вид

$$\hat{H}_0 = \hbar[-\Delta - 2(\pi\xi + \Phi/\rho^2)\hat{L}_3 + (\pi\xi + \Phi/\rho)]/(2m^*),$$

где ξ – ориентированная плотность потока однородного поля; Φ – поток Ааронова–Бома; $\hbar\hat{L}_3$ – оператор углового момента, m^* – эффективная масса частицы.

Добавим параболический потенциал конфаймента квантовой точки $V(\rho)=\sigma_0\rho^2$ и введем для простоты систему единиц, в которой $\hbar=1$, $m^*=1/2$. Тогда модельный оператор преобразуется к виду $\hat{H}_0 = \sum\limits_{m\in Z}\widetilde{S}_m \otimes I_m$, где I_m – тождественный оператор в одномерном подпространстве из $C_0^\infty(0,2\pi)$, натянутом на функцию $e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$, а оператор $\widetilde{S}_m$ унитарно эквивалентен оператору $S_m=-d^2/d\rho^2+[(m-\Phi)^2-0.25]/\rho^2+(\sigma_0+\pi^2\xi^2)\rho^2$.

Известно, что при $0\le(m-\Phi)^2<1$ оператор S_m имеет естественное самосопряженное расширение (расширение Фридрихса), которое и определяет самосопряженный оператор $\hat{H}_0$. В докладе с помощью стандартной техники "сужение–расширение" строится нетривиальное возмущение гамильтониана $\hat{H} = \sum\hat{H}_0$ (прямая сумма по решетке Браве массива), определяющее гамильтониан массива. Гамильтониан $\hat{H}$ определяется функцией Крейна $Q(E)$ вида

$$Q(E) = \frac{\Gamma(-\Phi)}{\Gamma(\Phi)}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\Phi}{2} - \dfrac{E+2m\pi\eta}{2S\sqrt{4\pi^2 S^{-2}\eta^2+\omega_0^2}}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-\Phi}{2} - \dfrac{E+2m\pi\eta}{2S\sqrt{4\pi^2 S^{-2}\eta^2+\omega_0^2}}\right)},$$

где E – энергия, η – поток через квантовую точку, S – площадь квантовой точки, ω_0 – "эффективная частота", $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$, $0\le\Phi\le1$ (исходя из других задач, к аналогичной форме функции Крейна пришел А.В. Деркач).

В докладе приведены результаты численного исследования полученной модели для случаев квадратной и гексагональной решеток, в частности получены диаграммы "поток внешнего поля – энергия" при фиксированном потоке Ааронова-Бома. Как и в случае отсутствия вихря Ааронова-Бома, построенные диаграммы имеют фрактальный характер; для гексагональной решетки четко выявляется дополнительное расщепление зон спектра.

ОДИН СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

© *К.А. Лещанкин, О.И. Ростова, Л.М. Пустыльников**

Мордовский университет, Саранск,
*Санкт-Петербургский политехнический университет, Санкт-Петербург

Исследование теплопереноса в полупрозрачной среде, прозрачность которой нелинейно зависит от температуры, является сложной научной задачей, имеющей важное практическое значение.

В докладе рассматривается процесс разогрева кварцевого стекла в индукционной печи технологической установки по производству кварцевых труб. Теплоперенос в этом случае описывается следующим образом: $Q=Q^{\text{конв}}+Q^{\text{конд}}+Q^{\text{изл}}$.

Если пренебречь конвекцией на начальном этапе разогрева, когда кварцевое стекло является твердым веществом, получим выражение для теплопереноса, включающее только кондуктивную и лучистую составляющие: $Q=Q^{\text{конд}}+Q^{\text{изл}}$.

При описании кондуктивной составляющей используется гипотеза Фурье, описывающая теплопроводность в среде следующим образом: $q=-\lambda \text{grad}T$.

При описании лучистого теплопереноса можно использовать форму описания, близкую к той, которая используется при описании кондуктивного теплопереноса: $\mathbf{E}=-\lambda_p \text{grad}T$, где $\mathbf{E}$ – вектор излучения. При этом коэффициент радиационной теплопроводности λ_p задается следующим выражением: $\lambda_p=16\sigma_0 n^2 T^3/(3\alpha_R)$.

Учитывая выражения, записанные выше, уравнение теплового баланса перепишется в виде

$$c\rho\ \partial T/\partial t=\text{div}(\lambda \text{grad}T)+\text{div}(\lambda_p \text{grad}T)+Q.$$

Записывая это уравнение для двумерного случая и цилиндрических координат, получаем следующее выражение:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_{pr}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{pz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q. \qquad (1)$$

где r и z – радиальная и осевая координаты.

Учитывая осевую симметрию системы, рассматривается только половина системы. При этом на оси симметрии устанавливаются однородные граничные условия Неймана. Введение фиктивных областей, расширяющих область решения задачи, позволяет также использовать для них однородные граничные условия Неймана:

$$\partial T/\partial r|_{r=0}=0, \quad \partial T/\partial z|_{z=Z_{min}}=\partial T/\partial z|_{z=Z_{max}}=\partial T/\partial r|_{z=R_{max}}=0.$$

Данная тепловая задача решается методом конечных элементов в вариационной постановке, причем для уравнения (1) существует функционал, такой, что это уравнение эквивалентно минимизации интеграла

$$\Psi=\int_\Omega\left\{r\frac{1}{2}\left[\lambda_r\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2+\lambda_{pr}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2+\lambda_z\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2+\lambda_{pz}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right]-QrT+rc\rho\frac{\partial T}{\partial t}T\right\}d\Omega\ .$$

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО ПРОВОДНИКА

© *Т.А. Извекова*

Мордовский университет, Саранск

Построена математическая модель распространения нелинейных волн на заряженной свободной поверхности жидкого проводника, находящегося в поле тяжести. Заряженная поверхность жидкого проводника является эквипотенциальной. Электрическое поле внутри проводника отсутствует, а вне проводника направлено по нормали к его поверхности.

Записаны уравнения движения жидкости, уравнения для электрического поля в области вне жидкости. Приведены граничные условия на свободной поверхности жидкости: постоянство электрического потенциала, кинематическое и динамическое условия. Распределение заряда на поверхности жидкости находится при помощи граничного условия, связывающего электрическое поле с поверхностным зарядом.

Нелинейная краевая задача решается методом малого параметра с точностью до третьего приближения. Последовательные приближения ищутся в виде рядов по собственным функциям линейной задачи.

Найдены выражения для компонент скорости жидкости, напряженности электрического поля, давления, формы поверхности жидкости, фазовой и групповой скоростей распространения волны, траектории частиц жидкости, переносной скорости Стокса, обусловливающей разомкнутость траектории частицы жидкости. Исследовано влияние электрического поля на перечисленные выше величины, описывающие движение жидкости и распространение волны.

АСИМПТОТИКА МОМЕНТОВ ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА Z^d С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ВЕТВЛЕНИЯ

© *Е.Б. Яровая, Л.В. Богачев*

МГУ им. М.В. Ломоносова

Рассмотрим случайное блуждание (с непрерывным временем) на решетке Z^d с одной точкой ветвления (где может происходить размножение частиц). Более точно, пусть $A=(a(x,x'))_{x,x'\in Z^d}$ – матрица переходных интенсивностей (генератор) блуждания, $a(x,x')\geq 0$ при $x\neq x'$, $a(x,x)<0$ и $\sum\limits_{x'\neq x} a(x,x')=-a(x,x)<\infty$, причем $a(x,x')=a(0,x'-x)$ (однородность) и $a(x,x')=a(x',x)$ (симметричность). Предполагается также, что блуждание неприводимо (т.е. любая точка $x'\in Z^d$ достижима) и имеет нулевой средний снос и конечную дисперсию скачков. Тогда переходная вероятность блуждания имеет асимптотику $p(t,x,y)\sim\mathrm{const}\cdot t^{-d/2}$. Далее, пусть $f(u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n u^n$ ($0\leq u\leq 1$) – производящая функция ветвления в точке $x=0$, причем $b_n\geq 0$ при $n\neq 1$, $b_1<0$ и $\sum\limits_{n\neq 1} b_n = -b_1<\infty$. Таким образом, частица, находящаяся в точке x, за малое время h с вероятностью $a(x,x')h+o(h)$ переходит в точку $x'\in Z^d$ ($x\neq x'$) или с вероятностью $\delta_0(x)b_n h+o(h)$ умирает, оставляя n потомков ($n\neq 1$). Как обычно, предполагается, что каждая из рождающихся частиц развивается по такому же закону независимо от других частиц.

Обозначим через $\mu(t,y)$ и $\mu(t)=\sum\limits_{y\in Z^d}\mu(t,y)$ соответственно число частиц в точке $y\in Z^d$ и полное число частиц на решетке в момент времени t. E_x обозначает математическое ожидание при $\mu(0,y)=\delta_x(y)$, $y\in Z^d$. Положим $\beta_r=f^{(r)}(1)$, $\beta=\beta_1$. Введем оператор $H=A+\beta\delta_0$, действующий по формуле $H\psi(x)=\sum\limits_{x'} a(x,x')\psi(x')+\beta\delta_0(x)\psi(0)$. (С помощью известной леммы Шура можно проверить, что H действует в пространстве $l^p(Z^d)$ при любом $1\leq p\leq\infty$.)

Утверждение 1. *Моменты* $m_k(t,x,y)=E_x\mu^k(t,y)$ *и* $m_k(t,x)=E_x\mu^k(t)$ ($k=1,2,\dots$) *удовлетворяют цепочке неоднородных линейных уравнений*

$$\partial m_k/\partial t=Hm_k+\delta_0(x)\sum_{\{i_1,\dots,i_r\}} w_{i_1,\dots,i_r} m_{i_1}\dots m_{i_r} \tag{1}$$

с начальными условиями $m_k(0,x,y)=\delta_x(y)$, $m_k(0,x)\equiv 1$ *соответственно, где* $w_{i_1,\dots,i_r}$ *– число разбиений множества* $\{1,\dots,k\}$ **на** r *непустых подмножеств с* $i_1,\dots,i_r$ *элементами.*

Спектр A (в $l^2(Z^d)$) непрерывен и $\sigma(A)=[\min\limits_{\theta\in\Theta}\phi(\theta),0]$, где $\phi(\theta)=\sum\limits_x a(x,0)e^{i(x,\theta)}$, причем существенный спектр оператора H совпадает с $\sigma(A)$. Рассмотрим функцию Грина $G_\lambda(x,y)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}p(t,x,y)dt$ и положим $\beta_c=1/G_\lambda(0,0)|_{\lambda=0}$, $\beta_c=0$ при $d=1$, 2 и $\beta_c>0$ при $d\geq 3$.

Утверждение 2. *При* $\beta\geq\beta_c$ *уравнение* $\beta G_\lambda(0,0)=1$ *имеет единственный неотрицательный корень* λ_0. *При этом* λ_0 *является (однократным) собственным значением оператора* H *(в случае* $\beta=\beta_c$ *последнее верно лишь при* $d\geq 5$).

Теорема. *При $t\to\infty$ моменты m_k имеют асимптотику $m_k(t,x,y)\sim C_k^{d,\beta}(x,y)u_k(t)$, $m_k(t,x)\sim C_k^{d,\beta}(x)\,v_k(t)$, где константы $C_k^{d,\beta}(x,y)$ и $C_k^{d,\beta}(x)$, зависящие от размерности d и параметра β, определяются индуктивно по k, а функции u_k, v_k имеют вид*

а) *при* $\beta>\beta_c$ $u_k(t)=v_k(t)=e^{k\lambda_0 t}$;

б) *при* $\beta=\beta_c$, $d=1, 2$: $u_k(t)=t^{-d/2}$, $v_k(t)\equiv1$.

$d=3$: $u_k(t)=t^{-1/2}(\ln t)^{k-1}$, $v_k(t)=t^{k-1/2}$;

$d=4$: $u_k(t)=t^{k-1}(\ln t)^{1-2k}$, $v_k(t)=t^{2k-1}(\ln t)^{1-2k}$;

$d\geq5$: $u_k(t)=t^{k-1}$, $v_k(t)=t^{2k-1}$;

в) *при* $\beta<\beta_c$ $u_k(t)=t^{-d/2}$, $v_k(t)\equiv1$.

ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© *М.А. Борисов*

Мордовский госуниверситет, Саранск

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения в частных производных в случае, когда искомая функция зависит от двух аргументов

$$a(x,y,u)ux+b(x,y,u)uy=c(x,y,u). \qquad (1)$$

Пусть необходимо найти интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через кривую l, не являющуюся характеристикой (1). Пусть выполняются все условия существования и единственности решения для поставленной задачи Коши. Пусть интегральная поверхность, являющаяся решением поставленной задачи, есть гладкое многообразие X. Обозначим через TX множество всех касательных векторов к X.

Рассматриваемая задача Коши порождает касательное векторное расслоение $\xi=(TX,\pi, X)$, где π: $TX\to X$ ставит в соответствие каждому касательному вектору точку его касания на многообразии X. Слоями в этом случае являются касательные плоскости к X.

В докладе приведены примеры задач, порождающих векторные расслоения, асимптотически эквивалентные по Брауэру. Все результаты легко переносятся на случай задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных, когда искомая функция зависит от произвольного числа аргументов. Кроме этого, такие конструкции можно построить аналогично для обыкновенного дифференциального и для разностного уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.В.Воскресенский.* Методы сравнения в нелинейном анализе. - Саранск: Изд-во Сарат. ун-та. Саран. фил., 1990, 224 с.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К КОНФЛИКТОЛОГИИ

© *Ф.Ф. Алексеев*

КГТУ им.Туполева, Казань

1. Рассматривается комбинированная (гибридная) система (КС) управления сложным объектом, математическая модель которой состоит из дифференциальных уравнений, конечно –разностных уравнений (вычислительного процесса Л.Ю.Анапольского), логических соотношений (уравнений), взаимосвязанных между собой. Логическая часть описана в комбинированной логике с использованием многозначных алфавитов. Возможно добавление к этой системе системы уравнений в частных производных. Для подсистем вводятся локальные критерии, отражающие цель функционирования подсистемы. В частности, это может быть функция Ляпунова, построенная для подсистем с локальным свойством (асимптотической устойчивости, управляемости, живучести при наличии отказов, стабильности и т.п.). Для КС формулируется динамическое свойство самодостаточности (свойство живучести КС относительно свойства стабильности с сохранением внутренней гармонии). Формулируются теоремы о свойстве самодостаточности.

2. Рассматривается ситуация конфликта подсистем (относительно критериев или как-то иначе). Для моделирования таких ситуаций конструируются логико–динамические игры–конфликты и логико–дифференциальные игры–конфликты. Обсуждается теория игр–конфликтов. Теория игр–конфликтов существенно отличается от общепринятой теории игр отсутствием стабильных правил. Правила здесь текущие, причем изменяются произвольно в пределах ресурсных возможностей. Область изменения правил соответствует типу конфликта: конфликт–сражение, конфликт–игра, конфликт–дебаты. При рассмотрении дифференциально–алгебраических уравнений и дифференциально–логических игр вводится классификация многообразий-связей. Как способ реализации предлагается модифицированный метод экстремального прицеливания в комбинации с методом обеспечения выпуклости и челночным алгоритмом.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ ПРОЦЕССОВ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

© *И.И. Амелин*

Мордовский университет, Саранск

При исследовании процессов нестабильности электронной плотности применен метод самосогласованного поля и, в частности, метод интегро–дифференциальных уравнений Хартри–Фока (Х-Ф). Приближенное решение уравнений Х–Ф выполнено посредством метода Рутана. Данная методика позволила учесть дальнодействие, обменное взаимодействие, а также роль кинетической энергии электронов на процессы перераспределения электронной плотности.

Из расчетов следует, что статическая волна зарядовой плотности по центрам (ВЗП) реализуется при уменьшении кулоновского взаимодействия электронов на центрах I [1]. Данное состояние электронной системы с ВЗП реализуется, по-видимому, в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП), в которых параметр I атома кислорода при переходе от O к O^{-1} состоянию уменьшается на 7.7%. Такая нестабильность p-электронной плотности, с нашей точки зрения, является одной из причин высоких критических температур в ВТСП. Кроме этого, необходимым условием спаривания электронов в ВТСП является расположение частично заполненных A^{-k} состояний анионов вблизи уровня Ферми не слишком широкой гибридизированной зоны проводимости [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S.P. Ionov, I.I. Amelin, V.S. Lubimov, G.V. Ionova, E.F. Makarov.* Phys. stat. sol.(b), 1976, v.77, №441.
2. *И.И. Амелин*, ФНТ, 1996, т.22, №539, .

ОСНОВНЫЕ ПРИЧИНЫ БИФУРКАЦИЙ ОБЛАСТЕЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

© *Н.Н. Бутенина*

НГУ им.Н.И.Лобачевского, Н. Новгород

В области $\Omega \in R^2$ рассматривается управляемая динамическая система:

$$x' = P(x) + u(t)Q(x), \tag{1}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ $\{R^2 \to R^2\}$ – вектор–функции класса $C^r(r \geq 2)$, $u(t)$ $\{R^1 \to R^1\}$ – кусочно–непрерывная, ограниченная управляющая функция, $m \leq u(t) \leq n$. В дальнейшем m и n рассматриваются как параметры управляемой динамической системы.

Пусть в точке K система локально–управляема, U – область управляемости в точке K. Считаем выполненными следующие условия:

1) контактная кривая $F=0$ ($F=\det\|P(x)Q(x)\|$) имеет конечное число особых точек и конечное число точек касания с траекториями μ-системы ((1) при $u(t)\equiv\mu=\text{const}$, $m \leq \mu \leq n$);

2) m- и n-системы имеют лишь изолированные состояния равновесия, не совпадающие с особыми точками контактной кривой;

3) mn (nm)-системы ((1) при $u(t)=m(n)$ в F^+, $u(t)=n(m)$ в F^-, $u(t)\in[mn]$ на $F=0$) имеют конечное число замкнутых траекторий;

4) $\overline{U} \subset \Omega$.

О п р е д е л е н и е. *Траекторию L mn- или nm-системы назовем* $\omega(\alpha)$*-орбитно-устойчивой, если*

1) *L* $\omega(\alpha)$*-орбитно-устойчива в каждой своей точке;*

2) *L не содержит* $\omega(\alpha)$*-орбитно-неустойчивых полутраекторий ни m-, ни n-системы.*

Пусть граница области U содержит хотя бы одну из перечисленных ниже траекторий:

1. седло–узел m- или n-системы;
2. полуустойчивый предельный цикл mn- или nm-системы;
3. траекторию mn (nm)-системы, для которой α- и ω-предельными множествами являются состояния равновесия. Тогда сколь угодно малое изменение m или n приводит к бифуркации области управляемости.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММОЙ ПРЕДПРИЯТИЯ В УСЛОВИЯХ РЫНКА

© *Б.П. Чупрынов*

Самарская государственная экономическая академия, Самара

Представленная предприятиям в условиях рынка самостоятельность в формировании производственной программы повышает их заинтересованность и ответственность в поставке необходимой обществу, рынку продукции, в удовлетворении спроса на нее. Формализация обобщенного критерия оптимальности в виде максимального удовлетворения спроса связаны с определенными трудностями. Следует в первую очередь ответить на вопрос, каким товарам отдать предпочтение в структуре плана производства. Ответ на данный вопрос должен быть дан маркетинговыми исследованиями, оценивающими достигаемые уровни удовлетворения спроса с учетом потребительских свойств каждого товара. Предпочтение следует отдавать тем товарам, уровень удовлетворения спроса на которые на рынке является наименьшим. Исходя из данных маркетинговых исследований, задачу выбора оптимальных рекомендаций по выбору производственной программы можно определить с использованием теории игр.

Составляется платежная матрица вида $(a_{ij})_{m\times n}$, где строки матрицы – стратегии предприятия, всего строк – m; столбцы – покупательский спрос, количество столбцов – n; a_{ij} – ожидаемая по результатам маркетинговых исследований прибыль предприятия при использовании i-й стратегии и наличия j-го потребительского спроса.

Обозначим вероятность применения стратегий предприятием – $x_1, x_2, \ldots, x_m$, тогда игра может быть представлена как задача линейного программирования и для предприятия представлена в виде $L=v\to\max$ при ограничениях

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\,x_i \ge v, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, \end{cases} \qquad x_i \ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$$

где L – целевая функция, v – цена игры. По результатам решения задачи находится производственная программа.

В дальнейшем процесс планирования производства и всей производственно-хозяйственной деятельности предприятия в условиях рынка необходимо рассматривать как наиболее эффективный вариант распределения ресурсов предприятия (трудовых, энергетических, финансовых и других).

Такие экономические задачи относятся к многоцелевым, так как требуют, чтобы производственная программа обеспечивала максимально возможную прибыль от реализации продукции, небольшие издержки производства, высокую производительность труда, низкую себестоимость продукции. Программа выпуска товаров, оптимизированная по одному из указанных критериев, может оказаться далеко не лучшей для других.

Возникает задача нахождения такого компромиссного решения в выпуске товаров, при котором значения всех рассматриваемых экономических показателей были бы приближены к экстремальному значению. Найденное компромиссное решение можно принять за оптимальную производственную программу предприятия, определяющую возможный потенциал предприятия по выпуску продукции и позволяющий принять правильные управленческие решения.

ВЫПУКЛЫЕ СТРУКТУРЫ В УПРАВЛЕНИИ ИНВЕСТИЦИЯМИ

© *Е.М. Бронштейн, С.И. Спивак*

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа
Башкирский государственный университет, Уфа

В докладе к теории инвестиционных проектов прилагаются основные понятия выпуклого анализа. В качестве критерия сравнения проектов принят дисконтированный доход. Применяемый подход позволяет поставить целый ряд важных экстремальных задач.

Инвестиционным проектом (потоком платежей) называется вектор $C=(c_0,c_1,...,c_n,...)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. существует индекс k такой, что $c_i=0$ при $i>k$.
2. Если $b(C)=\min\{i\colon c_i\neq 0\}$, то $c_{b(C)}<0$.
3. Если $e(C)=\max\{i\colon c_i\neq 0\}$, то $c_{e(C)}>0$.
4. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i \geq 0$.

Финансовый смысл этого понятия таков: c_i – размер платежа в i-й момент времени (для определенности год). Положительные значения c_i соответствуют платежам инвестору, отрицательные – вкладам инвестора в инвестируемый проект. Числа $b(C)$ и $e(C)$ – соответственно фактическое начало и окончание проекта С, $e(C) - b(C)$ срок выполнения проекта. Заметим, что этому определению удовлетворяет и нулевой вектор – ему соответствует нулевой проект.

Множество P инвестиционных проектов является подмножеством линейного пространства C_0 последовательностей, удовлетворяющих условию 1. Это множество является выпуклым конусом. Его экстремальная структура описывается следующим образом.

Т е о р е м а 1. *Для включения $C\in \mathrm{ext}\, P$, $C\neq 0$ необходимо и достаточно существование чисел $\lambda\in R^+$, $n\in N$, таких, что $C_i=0$ при $i\neq n$, $n+1$; $C_n=-\lambda$; $C_{n+1}=\lambda$.*

При этом в конусе P справедлив аналог теоремы о представлении.

Важную роль в теории инвестиций играют банковские процентные ставки. Целесообразно использовать их в следующей форме. Пусть последовательность банковских процентных ставок по промежуткам времени (фактическая или ожидаемая) имеет вид $(i_0, i_1,...,i_n,...)$. Введем q_n – коэффициенты дисконтирования, относящие стоимость денег в момент времени n к нулевому моменту времени. Значения q_n вычисляются следующим образом: $q_0=1$; при $n>1$ $q_n=[(1+i_0)(1+i_1)...(1+i_{n-1})]^{-1}$. Последовательность $Q=(q_0,q_1,...,q_n,...)$ назовем банковской политикой. Множество банковских политик L является выпуклым. Экстремальная структура этого множества имеет следующий вид:

Т е о р е м а 2. *Для справедливости включения $Q\in \mathrm{ext}\, L$ необходимо и достаточно существование такого индекса n, для которого $q_i=1$ при $i\leq n$, $q_i=0$ при $i>n$.*

Здесь экстремальные элементы соответствуют резким инфляционным скачкам. Если С – поток платежей и Q – банковская политика, то доход от потока в дисконтированном виде в обобщенном смысле (сюда входит и возможный ущерб) имеет вид $DO(C,Q)=CQ=\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i q_i$.

Линейность этого функционала по обеим переменным в сочетании с выпуклостью соответствующих множеств позволяет применить методы линейной и выпуклой оптимизации к задачам теории управления инвестициями. Характер этих задач зависит от условий инвестирования, финансовых возможностей инвестора и других конкретных обстоятельств.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АЭРОУПРУГОСТИ

© *А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов*

Ульяновский технический университет, Ульяновск

Рассматривается плоская задача аэроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании крылового профиля, нижняя часть которого представляет собой дугу с двумя вязкоупругими элементами, а верхняя часть является недеформируемой. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta\varphi\equiv\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0,\quad (x,y)\in R^2\backslash[0,l],\quad \varphi_y(x,+0,y)=Vf'_+(x),\quad x\in[0,l],$$

$$\varphi_y(x,-0,y)=\dot{w}_1(x,t)+Vw_1'(x,t)+Vf'_-(x),\quad x\in(a_1,a_2),$$

$$\varphi_y(x,-0,y)=\dot{w}_2(x,t)+Vw_2'(x,t)+Vf'_-(x),\quad x\in(a_3,a_4),$$

$$\varphi_y(x,-0,y)=Vf'_-(x),\quad x\in[0,a_1]\cup[a_2,a_3]\cup[a_4,l],\quad (\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_t^2)_\infty=0,$$

$$L(w_k)=p_0-p_*-\rho(\varphi_t(x,-0,t)+V\varphi_x(x,-0,t)),\quad x\in(a_{2k-1},a_{2k}),\quad k=1,2,$$

$$L(w_k)\equiv\left[D_k(x,t)\left(w_k''(x,t)-\int_0^t R_{k1}(x,\tau,t)w_k''(x,\tau)d\tau\right)+\beta_{2k}(x,t)\dot{w}_k''(x,t)\right]''+$$

$$+M_k(x,t)\ddot{w}_k(x,t)+\left(N_k(x,t)w_k'(x,t)\right)'+\beta_{1k}(x,t)\dot{w}_k(x,t)+$$

$$+\beta_{0k}(x,t)\left(w_k(x,t)-\int_0^t R_{k2}(x,\tau,t)w_k(x,\tau)d\tau\right),\quad k=1,2.$$

Нижние индексы x, y, t – производные по x, y, t; штрих и точка – производные по x и t соответственно. Неизвестные функции $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$ – прогибы вязкоупругих пластин–вставок и $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скорости. Решение задачи можно свести к исследованию системы:

$$L(w_k)=p_0-p_*+\frac{\rho}{2\pi}\int_{a_1}^{l}\dot{\omega}(\tau,t)\left(\frac{\sqrt{(l-x)x}+\sqrt{(l-\tau)\tau}}{\sqrt{(l-\tau)\tau}(x-\tau)}\right)d\tau+$$

$$+\frac{\rho V}{2\pi}\int_0^l f_+'(\tau)\left(\frac{\sqrt{(l-x)x}-\sqrt{(l-\tau)\tau}}{\sqrt{(l-x)x}(x-\tau)}\right)d\tau+\frac{\rho V}{2\pi}\int_{a_1}^{l}\omega'(\tau,t)\left(\frac{\sqrt{(l-x)x}+\sqrt{(l-\tau)\tau}}{\sqrt{(l-x)x}(x-\tau)}\right)d\tau+$$

$$+\frac{\rho V}{2\pi}\int_0^l f_-'(\tau)\left(\frac{\sqrt{(l-x)x}+\sqrt{(l-\tau)\tau}}{\sqrt{(l-x)x}(x-\tau)}\right)d\tau,\quad x\in(a_{2k-1},a_{2k}),$$

$$\omega(x,t)=\begin{cases}\int\limits_{a_1}^{x}(\dot w_1+Vw_1')dx, & x\in(a_1,a_2),\\ \int\limits_{a_1}^{a_2}(\dot w_1+Vw_1')dx, & x\in(a_2,a_3),\\ \int\limits_{a_1}^{a_2}(\dot w_1+Vw_1')dx+\int\limits_{a_3}^{x}(\dot w_2+Vw_2')dx, & x\in(a_3,a_4),\\ \int\limits_{a_1}^{a_2}(\dot w_1+Vw_1')dx+\int\limits_{a_3}^{a_4}(\dot w_2+Vw_2')dx, & x\in(a_4,l).\end{cases}$$

Исследование устойчивости проводится на основе функционала:

$$\Phi(t)=\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}}\left\{M_k\dot w_k^2+D_k\left[(1+Q_{k1}(x,0,t))(w_k'')^2+\int\limits_0^t\frac{\partial Q_{k1}}{\partial\tau}\left(w_k''(x,t)-w_k''(x,\tau)\right)^2d\tau\right]+\right.$$

$$\left.+\beta_{0k}\left[(1+Q_{k2}(x,0,t))w_k^2+\int\limits_0^t\frac{\partial Q_{k2}}{\partial\tau}\left(w_k(x,t)-w_k(x,\tau)\right)^2d\tau\right]\right\}dx+I(t)+J(t),$$

$$I(t)=\frac{\rho}{2\pi}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{a_{2n-1}}^{a_{2n}}dx\int\limits_{a_{2m-1}}^{a_{2m}}\left(\dot w_n(x,t)+\dot w_m(\tau,t)\right)^2K(\tau,x)d\tau,$$

$$K(\tau,x)=\ln\frac{l}{\left|\sqrt{(l-\tau)x}-\sqrt{(l-x)\tau}\right|},$$

$$J(t)=\frac{\rho V^2}{2\pi}\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{a_{2n-1}}^{a_{2n}}dx\int\limits_{a_{2m-1}}^{a_{2m}}\left(\dot w_n(x,t)-w_m'(\tau,t)\right)^2K(\tau,x)d\tau.$$

Т е о р е м а. *Пусть концы вязкоупругих элементов закреплены либо жестко* ($w_k=w'_k=0$), *либо шарнирно* ($w_k=w''_k=0$), *ядра релаксации* $R_{ki}(x,\tau,t)=\partial Q_{ki}(x,\tau,t)/\partial\tau$ *удовлетворяют условиям* $Q_{ki}(x,t,t)=0$, $\partial Q_{ki}(x,0,t)/\partial t\le 0$, $\partial Q_{ki}(x,\tau,t)/\partial\tau\ge 0$, $\partial^2 Q_{ki}(x,\tau,t)/\partial\tau\partial t\le 0$, $1+Q_{ki}(x,0,\infty)>0$, $a_{2k-1}\le x\le a_{2k}$, $0\le\tau\le t$, $k,i=1,2$, *и выполнены неравенства* $D_k>0$, $\beta_{0k}\ge 0$, $\dot M_k\le 0$, $\dot D_k\le 0$, $\dot\beta_{0k}\le 0$, $\beta_{1k}\ge 0$, $\beta_{2k}\ge 0$, $\dot N_k\ge 0$, $M_k\ge\rho K_k/\pi$, $N_k^*<\lambda_{1k}D_k^*-\rho K_kV^2/\pi$, $K_k=\sup\limits_{x\in(a_{2k-1},a_{2k})}\left(\int\limits_{a_1}^{a_2}K(\tau,x)d\tau+\int\limits_{a_3}^{a_4}K(\tau,x)d\tau\right)$, $D_k^*=\inf\limits_{x,t}D_k(x,t)(1+Q_{k1}(x,0,\infty))$, $N_k^*=\sup\limits_{x,t}N_k(x,t)$, ($k$=1,2), *где* λ_{1k} – *наименьшие собственные значения соответствующих краевых задач для уравнения* $\psi''''(x)=-\lambda\psi''(x)$, *тогда решения* $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$ *системы уравнений устойчивы по отношению к возмущениям начальных значений* $w_1(x,0)$, $w_2(x,0)$ $\dot w_1(x,0)$, $\dot w_2(x,0)$, $w_1'(x,0)$, $w_2''(x,0)$. *Для* $\dot w_1(x,t)$, $\dot w_2(x,t)$ *имеет место устойчивость в среднем.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ МОРСА-СМЕЙЛА С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЛОСКИХ ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ НА НЕПРИВОДИМЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

© *В.З. Гринес, В.С. Медведев*

НГСХА, НИИ ПМК, Нижний Новгород

В [1], [2] получены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на двумерных многообразиях и градиентноподобных диффеоморфизмов на трехмерных неприводимых многообразиях.

В настоящем докладе результаты этих работ распространяются на класс $S(M)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на гладком замкнутом ориентируемом неприводимом трехмерном многообразии M в предположении, что блуждающее множество любого диффеоморфизма из $S(M)$ содержит конечное множество плоских гетероклинических траекторий.

Пусть гетероклиническая траектория Г диффеоморфизма $f \in S(M)$ принадлежит пересечению одномерных неустойчивых (устойчивых) многообразий с двумерными устойчивыми (неустойчивыми) многообразиями седловых периодических точек. Назовем траекторию Г *плоской гетероклинической траекторией*, если для любой гетероклинической точки $x \in \Gamma$ такой, что $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$, $\dim W^u(p)=1$, $\dim W^s(q)=2$ ($x \in W^s(p) \cap W^u(q)$, $\dim W^s(p)=1$, $\dim W^u(q)=2$), где p,q – различные седловые периодические точки, компонента связности множества $W^u(p) \setminus p$ ($W^s(p) \setminus p$), содержащая точки траектории Г, принадлежит гладко вложенному открытому двумерному диску, трансверсально пересекающему многообразие $W^s(q)$ ($W^u(q)$) по кривой l, гомеоморфной прямой R^1. При этом, если дуга (x_1,x_2), $x_1,x_2 \in \Gamma$, принадлежащая $W^u(p)$ ($W^s(p)$) не содержит гетероклинических точек из Г, то и дуга (x_1,x_2), принадлежащая кривой l, не содержит гетероклинических точек из Г.

Каждому диффеоморфизму из класса $S(M)$ ставится в соответствие различающий граф $G(f)$, вершины которого соответствуют периодическим точкам и гетероклиническим областям диффеоморфизма f, а ребра – компонентам связности устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек. Гетероклинические вершины графа оснащаются информацией о структуре пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий, принадлежащих гетероклиническим областям.

Диффеоморфизмы $f, f' \in S(M)$ индуцируют на множествах вершин графов $G(f)$, $G'(f')$ подстановки $P(f)$, $P'(f')$. В докладе вводится понятие изоморфизма графов $G(f)$, $G'(f')$ и устанавливается

Т е о р е м а. *Для того чтобы диффеоморфизмы $f, f' \in S(M)$ были топологически сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм τ графов $G(f)$, $G'(f')$ такой, что $P'(f')=\tau P(f)\tau^{-1}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.З. Гринес.* Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // Матем. Заметки, 1993, т.54, вып.3, с.3-17.
2. *В.З. Гринес, Х.Х. Калай.* Условия топологической сопряженности градиентноподобных диффеоморфизмов на неприводимых трехмерных многообразиях // Матем.Заметки, т.59, 1996, вып.1, с.73-80.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00-236) и Международного гранта INTAS № 95-418.

КЛАССЫ МНОЖЕСТВ С f_1-СВОЙСТВОМ

© В.М. Климкин

Самарский государственный университет, Самара

Пусть T – некоторое множество; $\Sigma\subset 2^T$; $(\varnothing\in\Sigma)$; последовательность попарно непересекающихся множеств $\{E_n\}\subset\Sigma$ называют спектром.

Функция множества φ: $\Sigma\to[0,+\infty]$, $\varphi(\varnothing)=0$.

Говорят, что класс Σ обладает f_1-свойством, если для любых спектров $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ из Σ таких, что $E_n\cap F_n=\varnothing$, $\forall\ n,k\in N$ существует бесконечное множество $P\subset N$ и множество $F\in\Sigma$ такие, что $F_k\subset E$ $\forall k\in P$ и $F\cap E_n=F\cap E_k=\varnothing$ для любых $n\in N$ и $k\in N\setminus P$ [2].

Т е о р е м а 1. *Если класс Σ обладает f_1-свойством, то для любого спектра $\{E_n\}\subset\Sigma$ существует спектр $\{P_i\}\subset 2^N$ и спектр $\{F_i\}\subset\Sigma$ такие, что $E_n\subset F_i$ $\forall n\in P_i$, $i\in N$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть Σ – класс множеств, замкнутых относительно разности с f_1-свойством. Если каждая функция множества последовательности $\{\varphi_n\}$ исчерпывающая (т.е. для любого спектра $\{E_n\}\subset\Sigma$ $\lim\limits_k \varphi_n(E_k) = 0$ $\forall n \in N$), то для любого спектра $\{E_n\}\subset\Sigma$ и для любого числа $\varepsilon>0$ существует подспектр $\{E_{k_j}\}$ и множество $E\in\Sigma$, такие что $E_{k_j}\subset\Sigma$ и*

$$\tilde\varphi_{k_j}(E\setminus\bigcup_{p=1}^{j}E_{k_p})<\varepsilon,\quad j\in N,\ \text{где}\ \tilde\varphi(E)=\sup\{\varphi(A),\ A\subset E,\ A\in\Sigma\},\ E\in\Sigma.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.М. Климкин.* Введение в теорию функций множества. -Саратов, 1989, с.208.
2. *F.J. Frinishe.* The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolan algebras with the subsequential interpolation property // Proc. Amer. Math. Soc., 1984, v.2, №3, p.362-366.

МЕТОД СРАВНЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

© *В.И. Сафонкин*

Мордовский университет, Саранск

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in f(t,x) + F(t,x,u), \tag{1}$$

являющееся нелинейным возмущением дифференциального уравнения

$$dy/dt=f(t,y), \tag{2}$$

где: 1) $f(t,x)\in C([T,+\infty)\times R^n)$, $t\in[T,+\infty)$;

2) $F:[T,\theta]\times R^n\to \mathrm{comp}R^n$;

3) $u=u(t,x)$ – кусочно-непрерывное управление, $u(t,x)\in U(x)$ – область управления;

4) $\exists\ \varphi(t,x,u)\in C(T,+\infty)\times R^n\times R^m$, $F(t,x,u)=\{\varphi(t,x,u)$, где $u\in U(x)\}$.

Пусть $x(t{:}\ t_0,x_0)$, $x_0\in S_0\subset R^p$– решение дифференциального включения (1) существует при $T\le t\le\infty$, а $y(t{:}\ t_0,x_0)$, $y_0\in S_0$ – решение уравнения (2).

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия* 1)÷4) *и кроме того*:

а) *решения системы* (2) *ограничены*;

б) $\varphi(t,x,u)$ *удовлетворяет соотношению*

$\|\varphi(t,x,u)\|\le(\psi_1(t,\|x\|)+\psi_2(t)\|u\|)$, $\psi_1(t,\alpha_1)\le\psi_1(t,\alpha_2)$ при $\alpha_1\le\alpha_2$ $\forall t\in[T,+\infty]$, а $\psi_2(t)$ – *непрерывная неотрицательная функция*;

в) $I(\alpha) = \int\limits_T^{+\infty}[\psi_1(\tau,\alpha)+\psi_2(\tau)u_1(\tau,\alpha)]d\tau < +\infty, \quad \forall\alpha\in R_+^1;$

г) $\exists$ *такое* $a\in R_+^1$, *что* $\int\limits_a^{+\infty}\frac{d\alpha}{I(\alpha)} = +\infty;$

д) *функция* $g(t,\alpha) = \int\limits_T^t \frac{\psi_1(\tau,\alpha)u(\tau,\alpha)}{I(\alpha)}d\tau$ *имеет непрерывную и неотрицательную частную производную* $g_\alpha(t,\alpha)$, *то все решения включения* (1) *ограничены равномерно для* $x_0\in S_0$.

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *кроме того*:

1) $\|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|\le\lambda_1(t,\|y_1-y_2\|)\|y_1-y_2\|$, *где* $\lambda_1\in C(D_1)$, $D_1=[T,+\infty)\times R_+^1$, $\lambda_1(t,\alpha_1)\le\lambda_1(t,\alpha_2)$ *при* $\alpha_1\le\alpha_2$; $\exists\beta(t,x)$: $\beta(t,x(t))=u(t,x)$, $\beta(t,x)\in U(x)$, $t\in[T,+\infty)$;

2) $\int\limits_{t_0}^{\infty}\lambda_1(t,\alpha)dt < +\infty, \quad \forall\alpha\in R_+^1$, *то* $\|x(t{:}\ t_0,x_0)-y(t{:}\ t_0,y_0)\|\to0$ *при* $t\to\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.В. Воскресенский.* Методы сравнения в нелинейном анализе. - Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, 1990, 224 с.
2. *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко.* Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© *Г.А. Смолкин*

Мордовский государственный университет, Саранск

Ниже предполагается, что Ω_1 некоторая окрестность области Ω из R^n, $n\geq 2$; Ω имеет бесконечно дифференцируемую границу S. Векторные поля $a_j(x)=(a_{j1}(x),...,a_{jn}(x))$, $x\in\Omega_1$, $j=1,...,k$ обладают тем свойством, что $a_{ji}(x)\in C^\infty(\Omega_1)$, $|a_j(x)|\geq\gamma>0$. Кроме того, $a_j(x)$ удовлетворяют условию достижимости в Ω, т.е. для каждой точки $x\in\overline{\Omega}$ можно указать окрестность, в которой из любой точки y можно сместиться в любую другую точку y', двигаясь вдоль дуг интегральных линий векторных полей $a_1(x),...,a_k(x)$; причем сумма длин дуг, соединяющих точки y и y', не превышает $H(|y-y'|)$, где $H(0)=0$; $H(z)$ – монотонно возрастающая функция в $(0,2)$; $H(z)\in C^\infty(0,2)$.

Т е о р е м а. *Пусть* $A_j(x,D)=\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. *Решение задачи* $\sum_{j=1}^{k} A_j^2(x,D)U(x)=f(x)$, $x\in\Omega$, $f(x)\in C^\infty(\Omega)$, $U(x)=w(x)$, $x\in S$, $w(x)\in C^\infty(S)$ *удовлетворяет оценке*

$$\|H^{-2}((1+|D|)^{-1})U(x)\|_\Omega\leq C(\|f(x)\|_\Omega+\|H^{-3/2}((1+|D'|)^{-1})U(x)\|_S+\|U(x)\|_\Omega), \quad (1)$$

C не зависит от $U(x)$, а $V(x)=H^{1/2}((1+|D'|)^{-1})U(x)$ *есть действие псевдодифференциального оператора на функцию* $U(x)$ *вдоль границы* S.

Если в каждой точке Ω_1 векторы $a_j(x)$ и их всевозможные скобки Пуассона до m-го порядка включительно образуют n линейно независимых векторов, то $H(|y-y'|)=C_1|y-y'|^{1/m}$, и поэтому оценка (1) в пространствах Соболева-Слободецкого [1] выглядит следующим образом:

$$\|U(x)\|_{2/m,\Omega}\leq C(\|f(x)\|+\|U(x)\|_{2-1/(2m),S}+\|U(x)\|).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Л.Н. Слободецкий*. Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Ученые записки ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1958, т.197, с.54-112.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ

© *А.Ю. Павлов*

Мордовский госуниверситет, Саранск

Практическое построение алгоритма для нахождения управления, построенного в [1], возможно лишь в случае, когда при малых изменениях начальных данных и управления программное движение меняется незначительно. Поэтому необходимо обеспечить устойчивость программных движений при малых возмущениях начальных данных.

О п р е д е л е н и е. *Решение $x(t:t_0,x_0,u)$ называется сильно устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon,t_0)$ такое, что как только*

$\|x_0-x_1\|<\delta$, $\|y_0-y_1\|<\delta$, *то* $\|x(t:t_0,x_0,u_0)-x(t:t_0,x_1,u_1)\|<\varepsilon$, $t\geq t_0$, $u_0=u(t,y_0)$, $u_1=u(t,y_1)$.

Т е о р е м а 1. *Для того, чтобы решение $x(t:t_0,x_0,u)$ было сильно устойчивым необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчивым по Ляпунову в классе допустимых управлений и устойчивым относительно управления.*

Т е о р е м а 2. *Пусть $\|Y(t)Y^{-1}(s)\|\leq c$, $t\geq s$, где $Y(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dy/dt=A(t)y$,*

$$\|f(t,x_1,u_1)-f(t,x_2,u_2)\|\leq\Psi_1(t)\|x_1-x_2\|+\Psi_2(t)\|u_1-u_2\|$$

для любых $x_1,x_2\in R^n$, $u_1,u_2\in R^m$, $\Psi_i\in C([T;+\infty),R^1_+)$, $i=1,2$; $\int\limits_T^{+\infty}\Psi_1(s)ds<+\infty$. Тогда любое решение уравнения

$$dx/dt=A(t)x+f(t,x,u)+B(t)u+F(t) \qquad (1)$$

устойчиво по Ляпунову в классе допустимых управлений K.

Т е о р е м а 3. *Если $\|Y(t)\|\leq c_0$, $t\geq 0$ и справедливы условия леммы из* [1], *то все решения уравнения* (1) *устойчивы относительно управления $u\in K$.*

При выполнении условий данных теорем, все решения уравнения (1) сильно устойчивы. Поэтому применим вычислительный алгоритм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воскресенский Е.В., Павлов А.Ю.* Управляемость, построение и стабилизация программных движений // Вестник Мордов. ун-та. 1993, №3. с.55-61.

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРИВОДИМОСТИ

© *П.А. Шаманаев*

Мордовский госуниверситет, Саранск

Рассматривается множество Ω всех систем дифференциальных уравнений вида

$$dx/dt=Ax+f(t,x), \tag{1}$$

где $x\in R^n$, $f\in C^{(p,q)}([T,+\infty)\times V,R^n)$, $p\geq 0$, $q\geq 2$, $V\subseteq R^n$, $f(t,0)\equiv 0$, A – постоянная матрица $(n\times n)$.

Предполагается, что решения систем дифференциальных уравнений из множества Ω в некоторой окрестности нуля определены при всех $t\geq T$.

Ставится задача о локальной приводимости систем дифференциальных уравнений из множества Ω к линейной системе

$$dy/dt=Ay. \tag{2}$$

В [1] найден класс локально приводимых систем из множества Ω. Следующая теорема дополняет найденный класс локально приводимых систем.

Т е о р е м а. *Пусть выполняются условия*:

1) *матрица A имеет собственные значения любой кратности, вещественные части которых отрицательны, и собственные значения кратности* 1, *вещественные части которых равны нулю*;

2) $\|f(t,x')-f(t,x'')\|\leq\omega(t,r)\|x'-x''\|$ $\forall x',x''\in S_r$, $t\in[T,+\infty)$;

$\omega\in C([T,+\infty)\times R^1_+,R^1_+)$, $\omega(t,\alpha_1)\leq\omega(t,\alpha_2)$ при $\alpha_1\leq\alpha_2$, $\omega(t,0)\equiv 0$.

3) *сходится интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} s^{m_1+m_2}\omega(s,r)ds$.

Тогда системы (1) *и* (2) *являются локально приводимыми.*

Здесь m_1+1 (m_2+1) – максимальный порядок жордановой клетки матрицы A, соответствующий собственному значению, вещественная часть которого минимальна (максимальна).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шаманаев П.А.* Ляпуновские преобразования и устойчивость движения: Автореферат канд. дисс. - Саранск: Мордовский госуниверситет, 1997, 16 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

© А.Ф. Зубова, Н.Н. Учватова

Мордовский университет, Саранск

Рассматривается уравнение

$$a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + u\left(\overline{P}(\,\alpha_0 t + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) + \overline{\lambda}\right) = 0, \tag{1}$$

описывающее колебания сплошной среды, где a_0, a_{ij}, α_0, α_j, $\overline{\lambda}$ – вещественные постоянные ($i,j=1,...,n$). Эти уравнения используют в физике, механике, математике, особенно в светотехнике для описания различных колебательных процессов. Возникает задача исследования поведения автомодельных движений для уравнения (1).

Автомодельное движение представляется в форме $u=u(x)$, где

$$x = \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \tag{2}$$

называются плоскими волнами, так как любая фазовая поверхность $x=C$, где C – постоянная ($C\in(-\infty,+\infty)$), представляет семейство плоскостей в пространстве переменных $x_1,...,x_n$, которые перемещаются в зависимости от изменения времени t.

Пусть $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,...$ – полная система функций, удовлетворяющих краевым условиям периодической задачи, $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n,...$ – полная система функций, удовлетворяющих краевым условиям полупериодической задачи. Введем функционал

$$J(u) \;=\; \int_0^w \left[(u')^2 - p(x)u^2\right] dx.$$

Матрицу квадратичной формы $J\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i\varphi_i\right)$ обозначим через A_n, матрицу квадратичной формы $J\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i\right)$ обозначим через B_n. Рассмотрим последовательности

$$1,\ \Delta(\mathrm{A}_1),\ \Delta(\mathrm{A}_2),\ldots,\Delta(\mathrm{A}_k),\ldots, \tag{3}$$

$$1,\ \Delta(B_1),\ \Delta(B_2),\ldots,\Delta(B_k),\ldots, \tag{4}$$

где $\Delta(C)$ – определитель квадратной матрицы C.

Т е о р е м а 1. *Для того, чтобы функция* $P(x)$ *принадлежала* $(2k-1)$ *зоне устойчивости (или* $2k$*), необходимо и достаточно, чтобы число перемен знака в последовательности* (3) *было равно* $(2k-1)$, *а в последовательности* (4) – $2k$ *(соответственно в последовательности* (3) – $(2k+1)$, *в последовательности* (4) – $(2k)$*).*

НЕПРЕРЫВНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ

© *И.П. Рязанцева*

Нижегородский государственный технический университет, Нижний Новгород

Пусть $\Phi{:}H\to\Re^1$ – выпуклый ограниченный снизу дифференцируемый по Гато функционал, H – вещественное гильбертово пространство, Ω – выпуклое замкнутое множество в H, $\Omega\subset\mathrm{dom}\Phi=H$. Пусть множество $N=\{x\in\Omega/\Phi^*=\Phi(x)=\min\{\Phi(y)/y\in\Omega\}\}\neq 0$ и x^* – элемент из N, имеющий минимальную норму. Построим выпуклый дифференцируемый по Гато функционал штрафа

$$\varphi{:}H\to\Re^1,\ \varphi(x)=0\ \forall x\in\Omega,\ \varphi(x)>0 \text{ при } x\notin\Omega,\ \lim_{\|x\|\to\infty}\varphi(x)=+\infty.$$

Определим функционал

$$\Phi^t(x)=\varphi(x)+\beta(t)[\Phi(x)+\alpha(t)\|x\|^2/2]$$

и рассмотрим в H дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\mu\frac{dx(t)}{dt}+\gamma(t)\,\mathrm{grad}\,\Phi^t(x(t))=0,\quad \mu>0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0)=x_0,\quad x'(t_0)=x'_0, \tag{2}$$

где $t_0\geq 0$, x_0 и x'_0 – произвольные элементы из H.

Получены условия, при которых решение задачи Коши (1), (2) (однозначная разрешимость её предполагается) стабилизируется при $t\to+\infty$ к нормальной точке минимума x^* функционала Φ на множестве Ω. Приводятся примеры положительных дифференцируемых функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, обеспечивающих эту стабилизацию, исследуется устойчивость метода к возмущениям данных. При $\Omega=H$ следует принять $\gamma(t)=\beta(t)\equiv 1$. Метод (1), (2) представляет собой регуляризованный известный метод тяжелого шарика.

АНАЛИЗ СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЗАДАЧИ О ДЛИННЫХ МГД-ВОЛНАХ В НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© *А.И. Задорожный*

Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону

В линейной постановке рассматривается плоская задача о собственных длинноволновых колебаниях тяжелой вертикально неоднородной несжимаемой вязкой жидкости бесконечной проводимости в безграничном слое постоянной глубины. Равновесная конфигурация находится в горизонтальном магнитном поле постоянной интенсивности H_0. Объединяя постановки задач и разыскивая решения, пропорциональные $\exp(-\lambda t+ix)$, где λ – искомое собственное число, получим для амплитуды вертикальной скорости жидкости $W(z)$ следующую краевую задачу на собственные значения:

$$R^{-1}(\mu(z)W'')''+(\lambda+A\lambda^{-1})(\rho_0(z)W')'-\lambda^{-1}\rho'_0(z)W(z)=0, \tag{1}$$

$$(\mu(0)W''(0))'+(\lambda+A\lambda^{-1})W'(0)-\lambda^{-1}W(0)=0, \quad W''(0)=0 \tag{2}$$

– условия непрерывности компонент тензора полных напряжений на СП,

$$W(1)=0, \quad W'(1)=0 \tag{3}$$

– условия прилипания на дне.

Здесь R – гидродинамическое число Рейнольдса, A – число Альфвена, $\rho_0(z)$ – стационарная плотность, $\mu(z)>0$ – коэффициент динамической вязкости.

Задача сводится к самосопряженному квадратичному пучку вида

$$\lambda^2 Jw - \lambda R^{-1}Iw + (S + F + AM)w = 0, \tag{4}$$

где J – положительно-определенный (ПО) оператор, связанный с силами инерции, оператор $R^{-1}I$ связан с диссипативными силами, S – неотрицательный оператор, связанный с архимедовой силой на СП, F – оператор "плавучести", являющийся ПО при $\rho'_0(z)>0$ и отрицательно определенным при неустойчивой стратификации ($\rho'_0(z)<0$), M – ПО оператор упругих сил, вызванных натяжением "вмороженных" магнитных силовых линий. Важно отметить, что при определенных значениях параметров и в случае неустойчивой стратификации оператор $F+AM$ может быть сделан ПО, что свидетельствует о стабилизирующем эффекте магнитного поля, препятствующем перемешиванию. Это предположение считаем выполненным. Сформулируем основные качественные выводы: 1) спектр задачи счетный, 2) $\mathrm{Re}\lambda>0$, то есть все моды затухают, 3) существуют сколь угодно быстро затухающие движения $\lambda_n\to\infty$ и сколь угодно медленно затухающие $\lambda_n\to 0$, 4) колебательных режимов ($\mathrm{Im}\lambda\neq 0$) может быть лишь конечное число, которое растет с увеличением R и A.

Для получения двусторонних оценок собственных чисел и установления связей между параметрами используется соотношение баланса энергии, из которого выводится условие вещественности спектра (сильной демпфированности пучка): $R^2\geq 0.5\rho_{0\max}\mu_{\min}^{-2}(1+\rho'_{0\max}+2A)$, из которого видно, что магнитное поле сужает область апериодичности, расширяя колебательную. Последующие исследования проводятся на модели равномерной стратификации в известном приближении Буссинеска. Выведено "точное" дисперсионное уравнение для собственных чисел, которое проанализировано численно и асимптотически с помощью диаграммы Ньютона.

РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ В ГАЛОГЕННЫХ ЛАМПАХ НАКАЛИВАНИЯ

© *Е.Г. Алексеев, А.В. Харитонов*

Мордовский госуниверситет, Саранск

Для расчета теплопереноса в тепловых источниках оптического излучения в [1] была предложена математическая модель, основанная на общепринятых понятиях "застойного слоя" Ленгмюра.

На основе данной модели нами была разработана программа "КВАРЦ-1" на языке Turbo Pascal 7.0. Исходными данными являются температура и геометрические размеры тела накала (ТН), температура колбы и окружающей среды, форма колбы (цилиндрическая или шаровая) и др.

Численное моделирование и расчеты показывают, что в галогенных лампах накаливания цилиндрической и сферической симметрии при наличии общих тенденций и закономерностей изменения характеристик, их величины могут существенно отличаться.

Так, при сравнении указанных конфигураций колб для одинаковых размеров и температур колбы и ТН и условий работы ламп оказалось, что для цилиндрической симметрии температура на границе застойного слоя выше на 11%; толщина застойного слоя – на 1%; средняя температура газа – на 9%; градиент температуры на границе застойного слоя – на 17%, а тепловые потери в газе – на 7% по сравнению с шаровой симметрией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харитонов А.В.* Определение средней температуры газа в тепловых источниках оптического излучения // Проблемы и прикладные вопросы физики: Тез. докл. науч.- техн. конф. Саранск, 1993, с.25.

О ПРИМЕНИМОСТИ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ДОМЕННОЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ МАГНЕТИКА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

© *О.И. Иванов, М.В. Логунов*

Мордовский госуниверситет, Саранск

Изучение динамики доменных границ (ДГ) в магнитных материалах имеет большое значение для повышения быстродействия запоминающих и логических устройств. Учет конечных размеров ферромагнетиков, а также размагничивающих полей, возникающих на свободных поверхностях образца, приводит к двумерным и трехмерным моделям ДГ. Теория оказывается несправедливой, главным образом из-за линий Блоха, которые нужно рассматривать в рамках двух- или трехмерной модели. Эффекты, обусловленные линиями Блоха, заключаются в следующем: 1) при движении домена возникают силы, которые вызывают изменение его формы; 2) уменьшается подвижность доменной стенки. Конечная толщина реальных ферромагнетиков также приводит к искажению структуры ДС. Согласно двумерной модели, при движении скрученной ДС с достаточно высокими скоростями в ней возникают блоховские линии, ограничивающие скорости стенки. Размагничивание достигается в критическом поле Слончевского. Влияние блоховских линий приводит к уменьшению вдвое максимальной скорости стенки. Лишь эмпирическое выражение де Лива дает более близкое соотношение между параметрами одноосных магнитных пленок и скоростью насыщения ДС.

В последнее время интенсивно исследуются трехмерные модели движения ДС путем численного моделирования на ЭВМ, но удовлетворительное согласие с экспериментом по скорости получено лишь в некоторых частных случаях. Расхождение выводов теории линий Блоха и данных эксперимента может быть связано с тем, что теория относится к случаю идеально однородных магнитных пленок, в то время как ПФГ, как правило, неоднородны по толщине. В связи с этим рассматривалась динамика ДС в неоднородных магнитных пленках. В упомянутых выше трехмерных моделях движения ДС рассматриваются как почти плоские. В то же время в ряде экспериментальных работ обнаружено, что в процессе движения в сильных полях ДС могут становиться существенно более неодномерными. Наблюдавшиеся разнообразные формы ДС сводятся к трем основным видам: уширение ее изображения - так называемая диффузная ДС, генерация микродоменов (магнитных возмущений) впереди ДС, пространственно-периодические искажения по длине ДС. В последнее время интенсивно исследуются трехмерные модели движения ДС путем численного моделирования на ЭВМ, но удовлетворительное согласие с экспериментом получено лишь в некоторых частных случаях.

Вопросы движения почти плоской стенки для пары нелинейных уравнений Слончевского решаются с использованием метода численного анализа или компьютерного моделирования. Координаты $\phi(z,t)$ и $q(z,t)$ рассчитываются через равномерные временные интервалы для набора точек, расположенных одинаково по толщине пленки. Для определенной координатной точки и временного шага пространственные и временные производные заменяются выражением модифицированного метода конечных дифференциальных разностей Дюфорта – –Франкеля со второй производной пространственной координаты. На поверхностях пространственные производные равны нулю, т.е. заданны граничные условия без приложения сил. Рассчитанные скорости лишь ~ на 20% больше экспериментальных. Эти расхождения объясняются незначительной разницей между формой поля в плоскости пленки, используемой в этих расчетах, и фактическими поверхностными размагничивающими полями. Однако примененный здесь метод конечных дифференциальных разностей для прямого решения уравнений Слончевского наиболее точно описывает согласие теории с экспериментом.

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ЭНЕРГИИ, РАБОТАЮЩИХ В ДИНАМИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

© *В.Я. Гришаев, Б.Н. Денисов, Е.В. Никишин*

Мордовский госуниверситет, Саранск

Исследования эффективности преобразователя (плазма, как источник энергии, люминофоры, полупроводниковые датчики и др.) показывают, что при периодическом импульсном питании его коэффициент полезного действия зависит от параметров динамического режима [1,2]. При упрощенном моделировании процессов, прямой преобразователь энергии можно представить как систему, в которой превращение энергии идет по двум каналам: полезному и каналу потерь. Запишем уравнение, описывающее изменение внутренней энергии преобразователя при периодическом подводе энергии:

$$dE/dt=\mu(W)W(\omega t)-f_1(E)-f_2(E), \tag{1}$$

здесь $\mu(E)$ – коэффициент поглощения мощности преобразователем, $W(\omega t)$ – подводимая мощность, $f_1(E)$ – полезная мощность, $f_2(E)$ – мощность потерь, E – внутренняя энергия.

КПД преобразователя в установившемся режиме работы при периодическом подводе мощности равен

$$\bar{\eta} = \frac{\overline{f_1(E)}}{\overline{W(\omega t)}}. \tag{2}$$

Нами предложен метод определения среднего значения физической величины, а, следовательно, и КПД преобразователя при подведении энергии в виде импульсов прямоугольной формы. Для нахождения КПД преобразователя получены следующие соотношения (при установившемся режиме):

$$\bar{\eta} = \frac{1}{W_1T + W_2T}\int_{E_1}^{E_2} f_1(E)\left[\frac{1}{\varphi_1(W_1,E)}+\frac{1}{\varphi_2(W_2,E)}\right]dE,$$

$$T_1 = \int_{E_1}^{E_2}\frac{1}{\varphi_1(W_1,E)}dE, \qquad T_2 = \int_{E_1}^{E_2}\frac{1}{\varphi_2(W_2,E)}dE, \tag{3}$$

здесь $\varphi_1(W_1,E)=\mu(W_1)W_1-f_1(E)-f_2(E)$; $\varphi_2(W_2,E)=\mu(W_2)W_2-f_1(E)-f_2(E)$; $n=0,1,2,3,\ldots$.

Пусть $f_1(E)=\alpha E$, $f_2(E)=\beta E^k$, $W_1=W$, $W_2=0$, $\alpha E<<\beta E$. КПД преобразователя в этом случае при постоянном подведении энергии и при подведении энергии импульсами с малой частотой ($\omega\to 0$) равен:

$$\eta(\text{const}) = \eta(\omega \to 0) = \frac{\alpha}{W}\left[\frac{\mu(W)W}{\beta}\right]^{1/k}. \tag{4}$$

При подведении энергии импульсами большой частоты ($\omega\to\infty$) КПД равен

$$\eta(\omega \to \infty) = \frac{\alpha}{W}\left[\frac{\mu(W)W}{\beta}\right]^{1/k}\left(\frac{T_1}{T}\right)^{1/k-1} . \tag{5}$$

Для практики представляет интерес случай, когда средняя мощность, подводимая за период, постоянна и равна мощности, подводимой при постоянном возбуждении $W=W_0T/T_1$. Для выявления некоторых особенностей преобразования энергии рассмотрим случай, когда $\mu(W)=$ $=\gamma W^{n-1}$. При этом из (4)-(5) получим

$$\eta(\mathrm{const}) = \alpha\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{1/k} W_0^{m/k-1}, \qquad \eta(\omega \to 0) = \eta(\mathrm{const})\left(\frac{T}{T_1}\right)^{m/k-1},$$

$$\eta(\omega \to \infty) = \eta(\mathrm{const})\left(\frac{T}{T_1}\right)^{(m-1)/k} . \tag{6}$$

Таким образом, при одинаковой средней подводимой мощности, из соотношений (6) следует (полагаем $m>0$, $k>0$):

а) если $k<1$, то $\eta(\omega\to0)>\eta(\omega\to\infty)$, если $k>1$, то $\eta(\omega\to0)<\eta(\omega\to\infty)$;

б) если $m>1$, то $\eta(\omega\to\infty)>\eta(\mathrm{const})$, если $m<1$, то $\eta(\omega\to\infty)<\eta(\mathrm{const})$;

в) если $m>k$, то $\eta(\omega\to0)>\eta(\mathrm{const})$, если $m<k$, то $\eta(\omega\to0)<\eta(\mathrm{const})$.

Таким образом, проведенные исследования показали, что эффективность преобразователя энергии, работающего в динамическом режиме, может зависеть от частоты и скважности импульсов подводимой энергии. Характер частотной зависимости определяется видом кинетики процесса преобразования энергии в полезном канале и канале потерь. Предложен метод определения оптимальных условий работы преобразователя в динамическом режиме, обеспечивающих максимальный КПД.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.П. Горецкий, А.В. Рябцев и др.* / ЖТФ, 1994, т.64, в.7, 152-158.
2. *В,А. Горюнов, Б.Н. Денисов, А.П. Королев, Е.В. Никишин* / ЖПС, 1997, т.64, № 2, 269-272.

КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© *С.И. Перегудин, С.Е. Холодова*

Мордовский университет, Саранск

Рассматривается задача о пространственных волнах, возникающих во вращающемся безгранично протяженном по горизонтали слое жидкости постоянной глубины.

Предполагается, что слой жидкости ограничен снизу твердым непроницаемым дном $z=-H$, сверху – свободной поверхностью $z=\zeta(x,y,t)$.

Система осей xyz прямоугольная, ось z направлена вертикально вверх, плоскость $z=C$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. Жидкость считается несжимаемой стратифицированной идеальной.

В случае волн малой амплитуды задача сводится к решению системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - 2wv_y = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} - 2wv_x = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -g\frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} + v_z\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0$$

с граничными условиями

$$v_z = 0, \quad z = -H, \quad \frac{1}{g\rho^0}\frac{\partial p_1}{\partial t} - v_z = \frac{1}{g\rho^0}\frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad z = 0,$$

где ρ_0 – распределение плотности при отсутствии движения, $p_1(x,y,z,t)$ – динамический добавок плотности, $\rho_1(x,y,z,t)$ – динамический добавок давления, $v_x(x,y,z,t)$, $v_y(x,y,z,t)$, $v_z(x,y,z,t)$ – компоненты скорости, $\rho^0=\rho_0(0)$.

Изучая движение, периодическое по времени и горизонтальным координатам, задача о свободных волнах сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно вертикальной составляющей компоненты скорости при произвольной непрерывной стратификации.

Получено аналитическое решение задачи в случае, если изменение плотности при отсутствии движения удовлетворяет уравнению Абеля. В частности, это имеет место для линейного распределения плотности и экспоненциально стратифицированной жидкости.

Представлено дисперсионное соотношение, которое при ρ_0=const и отсутствии вращения (w=0) переходит в известное дисперсионное соотношение для безвихревого волнового движения в однородной жидкости.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

© *Н.Г. Тактаров*

Мордовский госуниверситет, Саранск

Взаимодействие любых двух соприкасающихся сред происходит через разделяющую их поверхность. Воздействие на характер движения среды в некотором объеме также осуществляется только через ограничивающую этот объем поверхность. В связи с этим явления, происходящие на поверхностях раздела и называемые поверхностными, могут оказывать существенное влияние на движение среды в объеме.

На поверхностях раздела объемных сред выполняются определенные соотношения между величинами в объемных средах и поверхностными величинами – граничные (краевые) условия. С точки зрения математики изучение поверхностных явлений необходимо для формулирования граничных условий к дифференциальным уравнениям математической физики, описывающим процессы в сплошных средах. Граничные условия позволяют выделить единственное решение уравнения из их бесконечного множества.

Поверхности раздела объемных сред чрезвычайно разнообразны по своим свойствам. Это поверхность раздела двух жидкостей, жидкости и газа, например, в задачах о распространении поверхностных волн, волн на поверхности горящей жидкости; двух газов, например, при распространении ударной волны; волны детонации и фронта пламени, поверхности которых отделяют продукты горения от несгоревшего газа; волны ионизации или диссоциации; фронта конденсации и испарения; поверхности взаимодействия с водой намерзающего либо тающего льда и т.д.

При математическом моделировании поверхности раздела рассматриваются часто как геометрические, не наделенные никакими физическими свойствами и не обладающие собственной динамикой. На этих поверхностях объемные величины претерпевают разрывы. Но такой предельно упрощенный подход к описанию поверхностных явлений применим не всегда. В частности, он не применим когда на поверхности происходит избыточное накапливание вещества, например при наличии поверхностно-активных веществ.

Наиболее общий подход к изучению поверхностных явлений состоит в том, что поверхность раздела моделируется как двумерная материальная среда, для которой выводятся уравнения движения, являющиеся граничными условиями для уравнений движения объемных сред. Если пренебречь чисто поверхностными эффектами, из поверхностных уравнений движения будут следовать известные ранее граничные условия для объемных механических, термодинамических и электромагнитных величин: соотношения на сильных разрывах; уравнение для скачка давления на искривленной поверхности раздела; граничные условия для электромагнитных величин и т.д. Однако общий подход позволяет сформулировать и новые более сложные граничные условия: с учетом массообмена объемных и поверхностных сред, что соответствует, например, таким процессам как фазовые переходы (испарение и конденсация), адсорбции и десорбции; с учетом энергообмена объемных и поверхностных сред; с учетом поверхностных механических напряжений и т. д. Это дает возможность решать новые более сложные задачи, возникающие в современной практической деятельности человека.

Поверхностные уравнения движения вместе с известными объемными уравнениями представляют систему для определения движения объемных сред и поверхности раздела. Для однозначного решения этой системы уравнений к трехмерным начальным условиям необходимо присоединить начальные условия на поверхности раздела и граничные условия на линиях, находящихся на межфазной поверхности, а также условия на твердой, либо иной поверхности, ограничивающей область, занятую сплошной средой.

УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© *Т. А Горшунова*

Мордовский госпединститут, Саранск

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = p(t,x), \tag{1}$$

где $p \in C^{(0,1)}\left([T,+\infty) \times R^n, R^n\right)$, $p(t,0) \equiv 0$.

В [2] были получены условия, при которых множество притягиваемых решений системы дифференциальных уравнений вида (1) образует область размерности n в пространстве ограниченных решений. Оказывается, что размерность этой области зависит от характера устойчивости положения равновесия системы (1).

Т е о р е м а 1. *Пусть решение $x(t)\equiv 0$ системы* (1) *условно равномерно асимптотически устойчиво относительно k-мерного многообразия $S_k \subset R^n$ ($0\le k\le n$) начальных значений, и все решения этой системы, начинающиеся на многообразии S_k, не покидают его при любом фиксированном t. Тогда множество притягиваемых решений системы* (1) *с начальными значениями из S_k, образует область размерности k в пространстве ограниченных решений.*

Рассмотрим возмущенную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = p(t,x) + f(t,y), \tag{2}$$

где $p, f \in C^{(0,1)}\left([T,+\infty) \times R^n, R^n\right)$, $p(t,0) \equiv 0$, $f(t,0) \equiv 0$. Система (1) является первым приближением возмущенной системы (2).

Предположим, что $\|f(t,y)\|\le F(t,\|y\|)$, где $F \in C([T,+\infty) \times R^1_+, R^1_+)$ и $F(t,v_1)\le F(t,v_2)$ при $v_1\ge$ $\ge v_2$ и любом $t\ge T$. Введем скалярное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = K\exp\left(-\int_T^t \psi(\tau)d\tau\right)F\left(t, z\exp\left(-\int_T^t \psi(\tau)d\tau\right)\right), \quad t \ge T, \tag{3}$$

где K – положительная постоянная, $\psi\in C([T,+\infty),R^1)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть в пространстве R^n существует k-мерное многообразие S_k($1\le k\le$ $\le n$) такое, что $\left\|\Phi(t,s,x(s))\right\| \le K\exp\left(\int_s^t \psi(\tau)d\tau\right)$, при всех $t\ge s\ge T$ и $x(s)\in S_k$, $\Phi(t,s,x(s))$ – матрица Коши уравнения в вариациях системы* (1). *Тогда, если решение $z(t)\equiv 0$ уравнения* (3) *равномерно асимптотически ψ_0-устойчиво* [1], $\psi_0(t) = \exp\left(\int_T^t \psi(\tau)d\tau\right)$, *то решение* y(t)≡0 *системы* (2) *условно равномерно асимптотически устойчиво относительно многообразия S_k* ($1\le k\le n$) *начальных значений.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.В.Воскресенский.* Некоторые применения принципа сравнения в теории возмущенных систем // Укр. мат. журнал. 1994, т.46, №9, с.1255-1260.
2. *Т.А.Горшунова.* О притягиваемых решениях систем дифференциальных уравнений // Тр. семинара по диф. ур. / Мордов. гос. ун-т. – Саранск, 1996, с.131-139.– Деп. в ВИНИТИ 17.09.96, № 2830 – В96.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

© *А.К.Кайракбаев*

Самарский университет, Самара

В докладе рассматривается задача нахождения предела максимального среднего вида

$$M_f(\omega_1,\omega_2) = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} f(\gamma(t))dt, \qquad (1)$$

где $f{:}R\to R$ локально интегрируемая T-периодическая функция, а точная верхняя граница вычисляется по всем решениям (в смысле Каратеодори) дифференциального включения

$$\gamma \in [\omega_1,\omega_2], \gamma(0) = \gamma_0. \qquad (2)$$

Концы отрезка удовлетворяют соотношениям $0<\omega_1\le\omega_2$.

Известно, что для локально интегрируемой (по Лебегу) периодической функции $f{:}R\to R$ с нулевым средним предел (1) совпадает с точной верхней границей по всем $c\ge 0$ множества значений функции φ, которая определяется лебеговскими характеристиками функции f формулой

$$\varphi(c) = \frac{(k-1)I_f(c)}{T+(k-1)\lambda_f(c)}.$$

Здесь $k=\omega_2/\omega_1$, $\lambda_f(c)$ – мера Лебега множества $A_f(c)=\{x\in[0,T]{:}f(x)\ge c\}$, а интеграл $I_f(c)$ берется от функции f по множеству $A_f(c)$.

Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно вычислить точную верхнюю границу множества значений функции $\varphi(c)$, т.е. $M_f = \sup\limits_{c\ge 0}\varphi(c)$.

В работе показано, что функция $\varphi(c)$ достигает своего максимального значения в точке $c=c_0$, которую можно найти с любой заданной точностью итерационным методом. При этом оказывается, что $M_f=c_0$. Введем следующие обозначения:

$$s_n = \varphi(s_{n-1}), \quad s_0 = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

$$q = \frac{k-1}{k}, \qquad p = \min\{p_1,p_2\}, \quad p_1 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(\gamma)|d\gamma, \quad p_2 = \sup_{c\ge 0}\frac{1}{\lambda_f(c)}\int_{A_f} f(\gamma)d\gamma.$$

Т е о р е м а. *Пусть функция $f{:}R\to R$ является локально интегрируемой и T – периодической с нулевым средним. Тогда $\varphi(c)$ достигает своего максимального значения в единственной своей неподвижной точке $c_0=\varphi(c)$, при этом $c_0 = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, и выполняются оценки*

$$0 \le c_0 - s_n \le pq^{n+1}.$$

Теорема служит основой итерационного метода вычисления предела максимального среднего (1); в частности, если функция ограничена, то в качестве p можно взять максимальное значение функции.

О ПОРЯДКЕ ВЫРОЖДЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧЕ О КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ФЛОТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

© *С.А.Карпова*

Ульяновский педагогический университет, Ульяновск

Определяются периодические с периодами $2\pi/a=a_1$ и $2\pi/b=b_1$ по x и y потенциальные течения флотирующей тяжелой капиллярной жидкости в пространственном слое со свободной верхней границей $f(x,y)$, близкой к горизонтали $z=0$, ответвляющиеся от основного течения с постоянной скоростью V в направлении оси $0x$. Потенциал скорости имеет вид $\varphi(x,y,z)=Vx+$ $+\Phi(x,y,z)$, h – толщина слоя, σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность несущей жидкости, ρ_0 – поверхностная плотность флотируемого вещества, g – ускорение свободного падения. В безразмерных переменных ($k=\rho_0/(\rho h)$ $\gamma=\sigma/(\rho g h^2)$ число Бонда, $F=\sqrt{hg}/V$ – величина, обратная числу Фруда) эти течения описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\Delta\Phi = 0, \qquad -1 < z < f(x,y); \qquad \Phi_z(x,y,-1) = 0;$$

$$\Phi_z - f_x = (\nabla f, \nabla_{xy}\Phi) = \Phi_x f_x + \Phi_y f_y, \qquad z = f(x,y);$$

$$\Phi_x + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + F^2 f + \frac{k}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\left[F^2 + \left(-\nabla f\nabla_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\Phi_x + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right)\right] -$$

$$-\gamma F^2 \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = \text{const} \qquad \text{при} \qquad z = f(x,y).$$

Используя прием распрямления свободной границы – замену переменных

$$l_1 = \frac{z - f(x,y)}{1 + f(x,y)}, \qquad \Phi\bigl(x,y,f(x,y) + l_1(1 + f(x,y))\bigr) = u(x,y,l_1)$$

и полагая

$$F^2 = F_{mn}^2 + \varepsilon,$$

где F_{mn}^2 – критическое значение числа Фруда, получаем задачу нахождения периодических решений системы с малыми нелинейностями в правых частях и фредгольмовым линейным оператором

$$B = B_{mn}\colon\ C^{2+\alpha}(\Pi_0 \times [0,1]) \dotplus C^{2+\alpha}(\Pi_0) \to C^{\alpha}(\Pi_0 \times [0,1]) \dotplus C^{\alpha}(\Pi_0), \qquad 0 < \alpha < 1,$$

Π_0 – прямоугольник периодов со сторонами a_1 и b_1 по осям $0x$ и $0y$. Представляя $f(x,y)$ двойным рядом Фурье и, решая первые три уравнения линеаризованной однородной системы методом разделения переменных, из последнего уравнения получаем дисперсионное соотношение

$$m^2 a^2\left(\frac{\operatorname{ch} s_{mn}}{s_{mn}\operatorname{sh} s_{mn}} + k\right) = F_{mn}^2\left(1 + \gamma s_{mn}^2\right),$$

$s_{mn}^2 = m^2a^2 + n^2b^2$ – связь безразмерных параметров с критическим значением числа Фруда и целыми неотрицательными m, n. Условие эллиптичности равенства Бернулли в сочетании со вторым дифференциальным уравнением на границе l_1=0 приводит к ограничению на безразмерные параметры $k < \gamma F_{mn}^2$ $\left(\text{или } h > \dfrac{\rho_0 V^2}{\sigma}\right)$.

Исследование дисперсионного соотношения показывает, что возможны 2-кратное вырождение (вырожденная решетка периодичности), 4-кратное (взаимодействие двух вырожденных или одна прямоугольная решетка), 6-кратное (неправильный гексагон), 8-,10- и 12-кратные вырождения фредгольмова оператора B. Правильная гексагональная решетка невозможна; невозможно также взаимодействие трех вырожденных решеток. Методами группового анализа в теории ветвления выполнено построение соответствующих уравнений разветвления и асимптотики семейств разветвляющихся решений.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

© . *С.А.Карпушкина*

Мордовский государственный университет, Саранск

Рассмотрим задачу о движении материальной точки, находящейся под действием ньютонианского притяжения центрального тела и некоторой возмущающей силы $\boldsymbol{F}$ [1]. Уравнения движения движущейся точки в системе осей, имеющих неизменные направления и начало в центральном теле, можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\mu x}{r^3} + X\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right); \\ \ddot{y} = -\dfrac{\mu y}{r^3} + Y\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right); \\ \ddot{z} = -\dfrac{\mu z}{r^3} + Z\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x, y, z – координаты движущейся точки, $\boldsymbol{r}$ – ее радиус–вектор, m=const, а X, Y, Z – компоненты возмущающей силы $\boldsymbol{F}$. Функции X, Y, Z могут быть какими угодно функциями аргументов, указанных в (1), лишь бы дифференциальные уравнения движения (1) имели при произвольно заданных начальных условиях

$$t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$$

единственное непрерывное и дифференцируемое решение, определенное на интервале (t_0-t_1, t_0+t_2), $t_1, t_2 \leq +\infty$.

Так как точное интегрирование уравнений (1) в большинстве случаев оказывается невозможным, то приходится прибегать к каким-либо методам, позволяющим получить приближенное решение уравнений (1). Одним из таких методов является асимптотический метод [2], при котором предполагается, что система уравнений (1) асимптотически эквивалентна по Брауеру системе уравнений первого приближения

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\mu x}{r^3}; \\ \ddot{y} = -\dfrac{\mu y}{r^3}; \\ \ddot{z} = -\dfrac{\mu z}{r^3}, \end{cases} \tag{2}$$

что позволяет сделать вывод о свойствах решения системы (1) на основании знания свойств решения системы (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Г.Н. Дубошин.* Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.,1968, 800с.
2. *Е.В. Воскресенский.* Методы сравнения в нелинейном анализе. – Саранск: Изд-во Сарат. ун-та. Саран.фил., 1990, 224с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ВЫРОЖДЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© *Б.В.Логинов*[1)], *Ю.Б.Русак*[2)]

[1)] Ульяновский технический университет, Ульяновск, Россия
[2)] Канберра, Австралия

Рассматривается уравнение

$$A_0 x^{(s)} = A_1 x^{(s-1)} + \ldots + A_{s-1} x^{(1)} + A_s x + f(x,t) \qquad \|f(x,t)\| = o(\|x\|), \qquad \|x\| \to 0 \tag{1}$$

$A_k: D_A \subset E_1 \to E_2$, $\overline{D}_A = E_1$, замкнутые линейные операторы, E_1, E_2 – банаховы пространства, A_0 и A_s – фредгольмовы операторы. Предполагается, что в обозначениях $x_1 = x^{(s-1)}$, $x_1 = x^{(s-2)}, \ldots, x_s = x$ (1) приводится к эквивалентному уравнению $A_0 \dfrac{dX}{dt} = AX + F(X,t)$ с матричными операторами

$$\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{s-1} & A_s \\ C & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & C & 0 \end{pmatrix} : E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_1 \to E_2 \dot{+} \ldots \dot{+} E_2, \tag{2}$$

где $C \in L(E_1, E_2)$ – произвольный оператор, имеющий ограниченный обратный. Определенное для $t>0$ решение $x_0(t)$ уравнения (1) устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое что для всякого решения $x(t)$ с $\sum_{k=0}^{s-1} \left\| x^{(k)}(0) - x_0^{(k)}(0) \right\| < \delta$ при $t>0$ выполнено неравенство $\sigma(t) = \sum_{k=0}^{s-1} \left\| x^{(k)}(t) - x_0^{(k)}(t) \right\| < \varepsilon$, и асимптотически устойчиво, если $\sigma(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Т е о р е м а. *Пусть $F(X,t)$ в (2) непрерывно дифференцируема по X и t при $t \geq 0$ и X из некоторой окрестности нуля до порядка l включительно, где l - максимальная длина обобщенных жордановых цепочек базисных элементов $\{\phi_k\}_1^m \in N(A_0)$ относительно оператор-функции $A_0 - \sum_{k=1}^{s} \lambda^k A_k$, причем $\left\| D^j F(X,t) \right\| = o(\|X\|)$ при $\|X\| \to 0$, $j=1,\ldots,l$, равномерно по $t>0$ (в автономном случае $F(X)$ непрерывно дифференцируема по X до порядка l). Если фредгольмов оператор A_0 имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции $A_0 - \sum_{k=1}^{s} \lambda^k A_k$ и спектр $\sigma_A(A_s)$ обобщенной задачи на собственные значения $(A_s + \mu A_{s-1} + \ldots + \mu^{s-1} A_1 - \mu^s A_0)\varphi = 0$ лежит в левой полуплоскости (хотя бы одна точка $\sigma_A(A_s)$ попадает в правую полуплоскость), то тривиальное решение (1) асимптотически устойчиво (неустойчиво).*

Доказательство использует линеаризацию (2) и соответствующие утверждения [1]. Как и в [1] теорема позволяет исследовать вопрос об устойчивости стационарных разветвляющихся решений задачи о точке бифуркации $A_0 x^{(s)} - A_1 x^{(s-1)} - \ldots - A_{s-1} x^{(1)} = A_s x - R(x,\varepsilon)$, $R(0,\varepsilon) \equiv 0$, $R_x(0,0) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *B.V.Loginov, Yu.B.Rusak.* Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions. Nonlinear Analysis. TMA, 1991, v.17, p.219-232.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ И ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

© *Т.Ф. Мамедова*

Мордовский государственный университет, Саранск

Как известно, основным методом обнаружения асимптотического равновесия является метод возмущений. В работах Е.В.Воскресенского [1,2] предложен прямой метод решения этой задачи. Применение вектор–функций Ляпунова ослабляет некоторые требования прямого метода [3].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad f \in C\Big(\big[T,+\infty\big) \times R^n, R^n\Big). \tag{1}$$

Т е о р е м а. *Пусть* а) $g_i^{(1)} \in C\big([T,+\infty) \times R_+^1, (-\infty,+\infty)\big)$, $i = \overline{1,m}$, *вектор–функция* $\lambda(t,z) = \operatorname{colon}\Big(\big|g_1^{(1)}(t,z)\big|,\ldots,\big|g_m^{(1)}(t,z)\big|\Big)$ *является квазимонотонно неубывающей по переменной* $z = \operatorname{colon}(z_1,\ldots,z_m)$;

в) $g_i^{(2)} \in C\Big(\big[T,+\infty\big) \times R_+^1, \big(-\infty,+\infty\big)\Big)$, $i = \overline{1,m}$;

c) $W_i(t,x) + hg_i^{(2)}(t,w) + o(h) \le W_i\big(t+h, x+hf(t,x)\big) \le W_i(t,x) + hg_i^{(1)}(t,w) + o(h)$,

$W_i \in C\Big(\big[T,+\infty\big) \times R^n, \big(0,+\infty\big)\Big)$, $W_i(t,\cdot)$ — *локально липшицева по второй переменной при любом* $t \in \big[T,+\infty\big)$, $i = 1,m$;

d) *при некоторых* $1 \le i,j \le m$ $q_i^{(1)}(t,z) \le 0$, $q_j^{(2)}(t,z) \ge 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{W_j(t,x)}{\|x\|} = k_j > 0$, *равномерно по* x, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{W_i(t,x)}{\|x\|} = k_i > 0$, $W_j(t,x) \le R(\Delta)$, $\|x\| \le \Delta$;

e) *решения уравнения*

$$\frac{du}{dt} = q^{(1)}(t,u)$$

равномерно ограничены при $t \ge t_0$, $\|u_0\| \le \Delta$.

Тогда уравнение (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.В. Воскресенский* Прямой метод Ляпунова и асимптотическое равновесие // Дифференц. уравнения. 1997, т.33, №6, с.854.
2. *Е.В. Воскресенский* Прямой метод обнаружения асимптотического равновесия. // Известия вузов. 1997, т.9, №10, с.4-8.
3. *Е.В. Воскресенский* О существовании решений с сингулярными начальными данными // Тр. седьмой науч.межвуз. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи", 28-30 мая 1997 г. Самара / ИАРФ, СамГТУ, –Самара: 1997, часть 2, с.17-20.

СУЩЕСТВОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОДНОМ КЛАССЕ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

© *М.С. Названов*

Мордовский госуниверситет, Саранск

Рассмотрим задачу стабилизации системы

$$\dot{x} = Ax + Bu + p(t), \tag{1}$$

где x – n-мерный вектор, характеризующий состояние системы; u – m-мерный вектор, характеризующий действие управляющих сил; $p(t)$ – n-мерный вектор постоянно действующих возмущений; A,B – $n\times n$ и $n\times m$-мерные постоянные матрицы соответственно.

Обычно предполагается, что объект управления подвергается действию ограниченных возмущающих сил $p_1(t),\ldots,p_n(t)$, у которых, в общем случае, известны лишь значения их верхней грани

$$|p_k(t)| \le \bar{p}_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

которых они, быть может, достигают в отдельные моменты времени.

Ограничения на управление также можно записать соотношением

$$|u| \le \bar{u}, \qquad \bar{u} = \text{const} > 0.$$

Остановимся здесь на случае, когда возмущения $p(t)$ действуют только в $E_m \subset E_n$, и управление действует в том же пространстве E_m.

При наложенных условиях систему (1) можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + B(u + p). \tag{2}$$

Показывается, что решение задачи стабилизации системы (1) при постоянно действующих возмущениях будет тождественно решению задачи стабилизации системы (2) при ограничениях на управляющие воздействия.

Т е о р е м а 1. *Для того, чтобы существовало кусочно-постоянное управление $u(t)$ для системы (1) необходимо и достаточно, чтобы функция Ляпунова для системы (2) была непрерывной.*

Т е о р е м а 2. *В системе (1) при $n=2$ существует область $G \subset E_2$, в которой функция Ляпунова $V(x_1,x_2)$, определяется в виде непрерывной функции и, кроме того, в этой области существует единственное оптимальное управление.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *П. Бруновски.* О стабилизации линейных систем при определенном классе постоянно действующих возмущений // Диф. Уравнения. 1966, т.2, №6, с.769-777.
2. *М.Е.Салуквадзе.* Задача А.М.Летова о синтезе оптимальных систем автоматического управления. – Тбилиси: Мецниереба, 1988, 288с.
3. *P. Brunovsky* On the best stabilizing control under a given class of perturbations // Czech. Math. J. 1965, v.15 (90), p.329-369.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НУЛЬ-УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛАГРАНЖЕВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© *И.П.Никитин*

Мордовский университет, Саранск

Рассмотрим управляемую механическую систему с k-степенями свободы. Этой системе будет соответствовать кинетическая энергия $T = 0.5\dot{q}^T F(q)\dot{q}$, где $F(q)\in C^1$, и потенциальная энергия U=$0.5q^T Cq$. Кроме того, предположим, что на систему действуют управляющие силы. Уравнения движения запишем в виде уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{d\dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} + u. \tag{1}$$

Требуется построить управление u, переводящее систему (1) из заданного положения $q(0)=q_0$, $p(0)=p_0$ в положение равновесия (0,0) за бесконечное время.

Для решения данной задачи использовались методы Е.В.Воскресенского. Представим $F^1(q)$ как: $F^1(q)=F^1(0)+(F^1(q)-F^1(0))$, где $F^1(0)$ – постоянная симметрическая матрица и проведем в (1) замену переменных: $x_i = q_i$, $x_{k+i} = \dot{q}_i$, $i = 1,\dots,k$. В результате (1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + f(x,u). \tag{2}$$

Выясним вопрос об управляемости системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \tag{3}$$

Управляющие воздействия для перевода системы из любого начального состояния y_0 при t=0 в конечное состояние y=0 при $t\to+\infty$ будем искать, согласно В.И.Зубову, в виде

$$u = -e^{-rt}B_0^T(t)A_0^{-1}(r,t,+\infty)Y^{-1}(t)y(t), \tag{4}$$

где

$$B_0(t) = Y^{-1}(t)B, \quad A_0(r,t,+\infty) = \int_t^{+\infty} e^{-rs}B_0(s)B_0^T(s)ds. \tag{4}$$

Фундаментальную матрицу $Y(t)$ системы $dy/dt=Ay$ найдем при условии – $Y(0)=E$.

Л е м м а. *Пусть*

$$\left\|F^{-1}(q) - F^{-1}(0)\right\| \le \psi_2, \qquad \left\|F^{-1}(0)\right\| \le h,$$

$$\|f(x_1,u_1) - f(x_2,u_2)\| \le \psi_1\|x_1 - x_2\| + \psi_2\|u_1 - u_2\|,$$

$$\left\|-e^{-rt}B_0^T(t)A_0^{-1}(k,0,+\infty)\right\|\left\|Y^{-1}(t)\right\| \le \psi_3(t),$$

для любых $x_1,x_2,y_1,y_2\in R^n$, $u_1,u_2\in R^k$, $\psi_i>0$, $i=1,2$, $\psi_3\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$. *Если*

$$\int_0^{+\infty} \left\|Y^{-1}(t)\right\| \left\|Y(t)\right\| ds = \alpha' < +\infty, \qquad \int_0^{+\infty} \left\|Y^{-1}(t)\right\|^2 \left\|-e^{-rt} B_0^T(s) A_0^{-1}(r,0,+\infty)\right\| ds = \beta < +\infty,$$

тогда для решений $x_1(t)=x(t{:}0,x_0,u_1)$, $x_2(t)=x(t{:}0,x_0,u_2)$, $u_1(t)=u(t,y_1)$, $u_2(t)=u(t,y_2)$, *справедливо неравенство*

$$\left\|x_1(t) - x_2(t)\right\| \le (h + \psi_2)\beta e^{\psi_1 \alpha} \left\|Y(t)\right\| \left\|y_1 - y_2\right\|, \quad t \ge 0.$$

Теорема. *Если системы* (2) и (3) *асимптотически эквивалентны по Бауэру для каждого* $u \in R^k$ *и система* (3) *управляема за бесконечное время управлением вида* (4), *справедливы условия леммы и* $q = (h + \psi_2)\beta e^{\psi_1 \alpha} \psi_1 \alpha + \psi_2 \beta < 1$, *то при управлении* (4) *любое решение системы* (2) *обладает свойством* $x(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.