



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

G. N. Chebotarev, Normal solvability of the Wiener–Hopf equations in certain singular cases,  
*Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1968, Number 3, 113–118

<https://www.mathnet.ru/eng/ivm3295>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 17, 2025, 16:07:20



УДК 519.55

Г. Н. Чеботарев

**О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА—ХОПФА  
В НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ**

В последнее время появилось значительное количество работ (см. [2]—[9]), посвященных особым случаям уравнения Винера—Хопфа на полуоси, его дискретного аналога, а также сингулярного интегрального уравнения, символ которых обращается в отдельных точках в нуль, обычно целой кратности. Мы предлагаем здесь один алгебраический подход к такого рода задачам.

1°. Пусть  $E$  — линейное векторное пространство, распадающееся в прямую сумму двух своих подпространств  $E_+$  и  $E_-$ ,  $P_+$  ( $P_-$ ) — операторы проектирования из  $E$  на  $E_+$  параллельно  $E_-$  (на  $E_-$  параллельно  $E_+$ ). Пусть  $q$  — линейный оператор, действующий в  $E$ , с областью определения  $D(q)$  и областью значений  $R(q)$ . Введем обозначения для подпространств:  $P_+D(q) = D_+$ ,  $P_+R(q) = R_+$ ,  $P_+q(D(q) \cap E_-) = A_+$ ,  $P_+q^{-1}(R(q) \cap E_-) = B_+$  (в последнем случае  $q^{-1}(R(q) \cap E_-)$  означает полный прообраз  $R(q) \cap E_-$  при отображении  $q$ ). Ясно, что  $B_+ \subset D_+$ ,  $A_+ \subset R_+$ .

Для каждого элемента  $x_+ \in D_+$  найдется такой  $x_- \in E_-$ , что  $x_+ + x_- \in D(q)$ ; положим  $qx_+ = P_+q(x_+ + x_-)$ . Элемент  $qx_+ (\in R_+)$  определяется, вообще говоря, неоднозначно ввиду неоднозначного выбора  $x_-$ . Но если  $x_+ + \tilde{x}_-$  также принадлежит  $D(q)$ , то  $P_+q(x_+ + x_-) - P_+q(x_+ + \tilde{x}_-) \in A_+$ . Наоборот, взяв произвольно  $y_+ = P_+q\tilde{x}_- \in A_+$  и выбирая в роли  $x_-$  элемент  $x_- + \tilde{x}_-$ , мы получим  $qx_+ = P_+q(x_+ + x_-) + y_+$ ; таким образом, при подходящем выборе  $x_-$ ,  $qx_+$  пробегает в  $R_+$  целый класс вычетов по подпространству  $A_+$ . Так же просто устанавливается, что элементы  $D_+$ , преобразуемые в данный класс  $R_+/A_+$ , составляют в  $D_+$  целый класс вычетов по  $B_+$ . Операцию  $q$  можно теперь рассматривать как линейный оператор, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между  $D_+/B_+$  и  $R_+/A_+$ . Нами доказано, таким образом,

*Теорема 1. Оператор  $q$  осуществляет изоморфизм между фактор-пространствами  $D_+/B_+$  и  $R_+/A_+$ .*

В дальнейшем мы будем, специально оговаривая, накладывать на  $q$  условия:

$$A_+ = \theta, \tag{а}$$

или

$$B_+ = \theta. \tag{б}$$

При выполнении этих условий оператор  $q$  устанавливает изоморфизм просто между  $D_+$  и  $R_+$ .

2°. Пусть  $T(E \rightarrow E)$  — линейный оператор, область значений которого  $R(T) \subset D(q)$ . Абстрактным уравнением Винера — Хопфа называем уравнение

$$P_+ T x_+ = f_+, \quad (1)$$

где  $x_+$  — искомый,  $f_+$  — данный элемент из  $E_+$ . Очевидно, для разрешимости этого уравнения необходимо, чтобы  $f_+ \in D_+$ . Запишем второе уравнение Винера — Хопфа

$$P_+ q T x_+ = h_+. \quad (2)$$

**Теорема 2.** Каждое решение уравнения (1) с правой частью  $f_+ \in D_+$  есть также решение уравнения (2) с некоторой правой частью  $h_+$ , принадлежащей классу  $qf_+$  фактор-пространства  $R_+/A_+$ , и, наоборот, каждое решение уравнения (2) с правой частью  $h_+ \in R_+$  является решением (1) с некоторой правой частью  $f_+$ , принадлежащей классу  $q^{-1}h_+$  фактор-пространства  $D_+/B_+$ .

В частности, если выполняются условия (а) и (б),  $f_+ \in D_+$  и  $h_+ = qf_+$ , то уравнения (1) и (2) эквивалентны.

**Доказательство.** Если  $x_+$  есть решение (1) с правой частью  $f_+ \in D_+$ , то, положив  $f_- = P_- T x_+$ , видим, что  $f = f_+ + f_- = T x_+ \in D(q)$ , и  $P_+ q f = P_+ q T x_+ = h_+ \in qf_+$ . Наоборот, если  $P_+ q T x_+ = h_+ (\in R_+)$ , то, полагая  $f_+ = P_+ T x_+$ ,  $f_- = P_- T x_+$ , убедимся, что  $h_+ = P_+ q (f_+ + f_-) \in qf_+$ , т. е.  $f_+ \in q^{-1}h_+$  в  $D_+/B_+$ . При выполнении условий (а), (б) операторы  $q$  и  $q^{-1}$  устанавливают взаимно однозначное соответствие между  $D_+$  и  $R_+$ , и при  $h_+ = qf_+$  каждое решение (1) есть решение (2), и наоборот.

3°. **Теорема 3.** Пусть  $E$  — банахово пространство,  $E_\pm$  — его подпространства. Пусть выполнены условия (а) и (б), и в  $R_+$  введена новая форма  $|\cdot|_{R_+}$ , обращающая его в банахово пространство, причем оператор  $P_+ q T$  уравнения (2), действующий из  $E_+$  в  $R_+$ , нормально разрешим. Введем в  $D_+$  новую норму, полагая для  $f_+ \in D_+$   $|f_+|_{D_+} = |qf_+|_{R_+}$ .

Тогда оператор  $P_+ T$  уравнения (1), действующий из  $E_+$  в  $D_+$ , нормально разрешим и имеет ту же  $d$ -характеристику, что и  $P_+ q T (E_+ \rightarrow R_+)$ .

Это следует из того, что при такой нормировке пространства  $D_+$  оператор  $q$  устанавливает изометрический изоморфизм  $D_+$  и  $R_+$ ; каждое решение  $\chi \in R_+$  уравнения  $(P_+ q T)^* \chi = 0$  порождает по формуле  $\varphi(f_+) = \chi(qf_+)$  решение  $\varphi \in D_+$  уравнения  $(P_+ T)^* \varphi = 0$ . Условия разрешимости уравнения (1) получаются из условий разрешимости уравнения (2) заменой  $h_+$  на  $qf_+$ .

Рассмотрим некоторые применения последней теоремы.

4°. Пусть  $E = L$  — пространство всех абсолютно интегрируемых на оси  $(-\infty < t < \infty)$  комплекснозначных функций,  $E_+ = L_+$  ( $E_- = L_-$ ) — его подпространство, состоящее из функций, равных нулю на левой (правой) полуоси. Пусть  $k(t) \in L$  имеет преобразование Фурье  $K(z) \neq 0$  для вещественных  $z$ , и  $K(z) = (z - i)^{-m} [1 - K_1(z)]$ , где  $K_1(z)$  также есть преобразование Фурье некоторой функции из  $L$ . Рассмотрим интегральное уравнение 1-го рода

$$P_+ \mathcal{N} x_+ = f_+, \quad (3)$$

где  $x_+(t)$ ,  $f_+(t) \in L_+$ ,  $t > 0$ , и  $\mathcal{N}$  — оператор свертывания с функцией  $k(t)$ , действующий в  $L$ . Полагая  $qx(t) = i^m \left(\frac{d}{dt} - 1\right)^m x(t)$  и пользуясь теоремой 3, мы получаем все основные результаты отно-

сительно уравнения (3), содержащиеся в [4]. Заметим, что этот способ исследования уравнения (3) фактически совпадает со способом, изложенным в [5], где рассмотрен также случай нецелого  $m$ .

Рассмотрим теперь уравнение второго рода

$$x_+(t) - \int_0^{\infty} k_1(t-s)x_+(s) ds = f_+(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

где  $x_+, f_+ \in L_+$ . Ядро  $k_1(t) \in L$  будем предполагать таким, что его преобразование Фурье  $K_1(z)$  обладает свойством:  $1 - K_1(z) = S_m(z)K(z)$ , где  $K(z)$  есть преобразование Фурье функции из  $L$  и не обращается в нуль при вещественных  $z$ , и  $S_m(z) = \prod_{k=1}^s (z - \alpha_k)^{r_k}$

( $\alpha_k$  вещественны,  $r_k > 0$  — целые,  $r_1 + \dots + r_s = m$ ). В качестве  $q(L \rightarrow L)$  возьмем оператор, действие которого на функции из  $L$  сводится к умножению их преобразований Фурье на  $S_m^{-1}(z)$ . Снова выполняются условия ( $\alpha$ ) и ( $\beta$ ). Если записать (4) в форме (1), то эквивалентное ему уравнение (2) окажется уравнением 1-го рода (3), рассмотренным выше. Для функции  $f(t) \in L_+$  положим  $f^{(-1)}(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds$ ; если  $f^{(-1)}(t)$  также принадлежит  $L_+$ , можно определить далее  $f^{(-2)}(t) = [f^{(-1)}(t)]^{(-1)}$ , и т. д. Пространство  $R_+$  для нашего оператора  $q$  есть пространство  $E_m$  функций, принадлежащих  $L_+$  вместе с  $m$  производными;  $D_+$  состоит из тех функций  $f_+ \in L_+$ , для которых  $[e^{\alpha_k t} f_+(t)]^{(-j)} \in L_+$  ( $k=1, \dots, s; j=0, 1, \dots, r_k$ ), и в качестве нормы в  $D_+$  можно взять

$$\|f_+(t)\|_{D_+} = \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{r_k} \| [e^{\alpha_k t} f_+(t)]^{(-j)} \|_{L_+}.$$

Введем еще класс  $\tilde{L}$  функций  $\varphi(t)$ , определенных на  $[0, \infty]$ , таких, что

$$[\dots [ [e^{-i\alpha_1 t} \varphi(t)]^{(r_1)} e^{-i\alpha_2 t} ]^{(r_2)} \dots e^{-i\alpha_s t} ]^{(r_s)} \in L_+.$$

Функции этого класса имеют на бесконечности порядок роста  $O(t^{m-1})$ .

**Теорема 4.** *Оператор уравнения (4) действует из  $L_+$  в  $D_+$  и является Ф-оператором. Для разрешимости уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы  $f_+ \in D_+$ , и*

$$\int_0^{\infty} f_+(t) \varphi(t) dt = 0, \quad (5)$$

где  $\varphi(t)$  пробегает все решения из  $\tilde{L}$  однородного транспонированного уравнения

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} k_1(s-t) \varphi(s) ds = 0, \quad t > 0. \quad (6)$$

**Замечание.** Интегралы в (5) и (6) следует понимать в следующем регуляризованном смысле:

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} f(t) dt.$$

Первое утверждение теоремы 4 (без аналитического описания пространства  $D_+$ ) приводилось В. Б. Дыбиным [6]. Уравнение (4)

рассматривалось в [8] тем же методом в пространстве ограниченных функций. Таким образом же может быть получена теорема, подобная теореме 4, для дискретного аналога уравнения (4).

В качестве последнего применения теоремы 3 рассмотрим вопрос о нормальной разрешимости краевой задачи Гильберта с нулем коэффициента на контуре. Пусть  $\Gamma$  — простой гладкий замкнутый контур плоскости комплексной переменной, содержащий внутри начало координат;  $E = H$  — пространство комплекснозначных функций на  $\Gamma$ , удовлетворяющих условию Гёльдера с фиксированным показателем,  $E_+ = H_+$  ( $E_- = H_-$ ) — его подпространства, состоящие из функций, аналитически продолжимых внутрь контура (соответственно, вне контура и обращающихся в нуль на бесконечности). Рассмотрим краевую задачу в форме

$$P_+[a(t)\varphi_+(t)] = f_+(t), \quad (7)$$

где  $\varphi_+$  — искомый,  $f_+$  — данный элемент из  $H_+$ ,  $a(t) = \left(\frac{t-t_0}{t}\right)^m \tilde{a}(t)$ ,

$t_0 \in \Gamma$ ,  $\tilde{a}(t) \in H$  и  $\tilde{a}(t) \neq 0$  на  $\Gamma$ . Взяв в качестве  $q$  оператор умножения на  $t^m(t-t_0)^{-m}$ , установим, что  $R_+ = H_+$ , а  $D_+$  состоит из тех  $f_+(t) \in H_+$ , для которых существует полином  $S_{m-1}(t)$  степени  $< m$  такой, что  $t^m f_+(t) - S_{m-1}(t) = (t-t_0)^m h_+(t)$ ,  $h_+(t) \in H_+$ . Полагая для  $f_+ \in D_+$ ,  $|f_+|_{D_+} = |h_+|_H$ , мы обращаем  $D_+$  в банахово пространство.

Из теоремы 3 вытекает

**Теорема 5.** *Оператор уравнения (7) действует из  $H_+$  в  $D_+$  и является  $\Phi$ -оператором.*

5°. Вернемся к общей схеме пункта 2°, т. е. снова будем считать  $E$  линейным векторным пространством. Имеет место

**Теорема 6.** *Пусть оператор  $P_+qT$  уравнения (2) взаимно однозначно отображает  $E_+$  на все  $R_+$ .*

*Если  $q$  удовлетворяет условию (β), то уравнение (1) разрешимо при любой правой части  $f_+ \in D_+$ ; решения однородного уравнения (1) образуют подпространство  $(PqT)^{-1}A_+$ , алгебраически изоморфное  $A_+$ .*

*Если  $q$  удовлетворяет условию (α), то в „связке“ уравнений (1), правая часть которых пробегает в  $D_+$  целый класс по модулю  $B_+$ , одно и только одно разрешимо, причем его решение единственно.*

Доказательство почти непосредственно вытекает из теоремы 2. Пусть удовлетворяется (β) и  $f_+ \in D_+$ . Возьмем любую функцию  $h_+ \in qf_+$ ; уравнение (2) с правой частью  $h_+$  имеет решение, которое, согласно теореме 2, есть решение (1) с правой частью  $f_+$ . Множество решений однородного уравнения (1) совпадает с множеством решений уравнения (2), правая часть которого пробегает  $qB_+ = A_+$ .

Если вместо (β) выполняется условие (α), то каждое решение любого из упомянутой в теореме „связки“ уравнений (1) есть решение *определенного* уравнения (2), правая часть которого является образом всех правых частей связки при отображении  $q$ . Но последнее имеет лишь единственное решение, которое, в силу теоремы 2, является решением одного из уравнений связки.

**Замечание.** Пусть выполняются условия второй части теоремы 6,  $E$  — банахово пространство, и пусть мы смогли построить достаточно много решений однородного уравнения, сопряженного к (1), так, что в  $B_+$  не существует ненулевого элемента, им всем ортогонального. Тогда оператор уравнения (1) оказывается нормально разрешимым (из  $E_+$  в пространство  $D_+$ , нормированное, как в теореме 3).

6°. Теорема 6 позволяет, например, построить теорию интегрального уравнения Винера—Хопфа на полупрямой для произвольного индекса, если эта теория уже известна для случая нулевого индекса, без изучения резольвентного ядра [1].

Пусть  $E$  — одно из пространств  $L^p$  ( $p \geq 1$ ),  $M$ ,  $M^c$ ,  $M^u$ ,  $C$ ,  $C^0$  функций, заданных на всей оси [1], разлагающееся обычным образом в прямую сумму своих подпространств  $E_+$  и  $E_-$ .  $L^1 = L$  является кольцом со свертыванием в качестве умножения. Присоединяя к нему формально единицу  $\delta$ , получим кольцо  $V$ ; обозначим  $V_{\pm} = L_{\pm} + \{\delta\}$ . Известно, что элемент  $a \in V$  порождает линейный граничный оператор свертывания  $Tx = a * x$  в каждом из пространств  $E$ . При этом, если  $a, b \in V$ ,  $x \in E$ , то  $a * (b * x) = (a * b) * x$ . Наконец, оператор свертывания с  $a \in V_+$  ( $V_-$ ) оставляет инвариантным  $E_+$  ( $E_-$ ).

Рассмотрим уравнение

$$x_+(t) - \int_0^{\infty} k(t-s)x_+(s)ds = f_+(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

где  $x_+, f_+ \in E_+$ ,  $k \in L$ ,  $1 - K(z) \neq 0$  ( $-\infty < z < \infty$ ) ( $K(z)$  — преобразование Фурье для  $k(t)$ ). Если  $\text{Ind}(1 - K(z))$  на вещественной оси равен нулю, то  $(1 - K(z))^{-1} = G_+(z)G_-(z)$ , где  $G_{\pm}(z)$  — преобразования Фурье функций из  $V_{\pm}$ , не обращающиеся в нуль при  $\text{Im} z \geq 0$  ( $\text{Im} z \leq 0$ ). Оператор  $T$  свертывания с элементом  $\delta - k \in V$  равен  $T^{-1}T_+^{-1}$ , где  $T_+^{\pm 1}$  ( $T^{\pm 1}$ ) оставляет инвариантным  $E_+$  ( $E_-$ ). Уравнение (8) может быть записано так:  $P_+Tx_+ = f_+$ . Оно имеет единственное решение в  $E_+$  при любой правой части  $f_+ \in E_+$ , определяемое формулой

$$x_+ = T_+P_+T_-f_+. \quad (9)$$

Пусть теперь  $\nu = -\text{Ind}(1 - K(z)) > 0$ . Введем в  $E$  оператор  $q$  свертывания с функцией (из  $V_+$ ), преобразование Фурье которой есть  $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\nu}$ . Очевидно, что  $q$  удовлетворяет условию (3), и символ уравнения  $P_+qTx_+ = h_+$  имеет нулевой индекс, так что выполняются условия первой части теоремы 6. Уравнение (8) разрешимо в любом пространстве  $E_+$ . Далее, легко проверяется, что пространство  $A_+ = P_+qE_-$   $\nu$ -мерно и состоит из всех функций вида  $e^{-t}P_{\nu-1}(t)$ , где  $P_{\nu-1}$  — полиномы степени  $< \nu$ . Таким образом,  $A_+$  принадлежит пересечению  $E_{\cap}$  всех пространств  $E_+$ . Но оператор  $(P_+qT)^{-1}$  переводит элементы  $E_{\cap}$  в  $E_{\cap}$ , поэтому, в силу теоремы 6, пространство решений однородного уравнения (8) также  $\nu$ -мерно и принадлежит  $E_{\cap}$ . Если символ „исправленного“ уравнения  $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\nu} [1 - K(z)] = G_+^{-1}G_-^{-1}$ , то нули (8) даются в преобразованиях Фурье формулой

$$X_+(z) = G_+(z)P_+ \left[ G_-(z) \frac{\tilde{P}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^{\nu}} \right],$$

следующей из (9). Воспользовавшись обобщенной теоремой Лиувилля, эту формулу можно преобразовать так:

$$X_+(z) = G_+(z) \frac{\tilde{\tilde{P}}_{\nu-1}(z)}{(z+i)^{\nu}}. \quad (10)$$

Здесь  $\tilde{\tilde{P}}_{\nu-1}, \tilde{P}_{\nu-1}$  — произвольные полиномы степени  $< \nu$ .

Пусть теперь  $\nu = -\text{Ind}[1 - K(z)] = -\mu < 0$ . Оператор  $q$  удовлетворяет тогда условию (а), и применима вторая часть теоремы 6. Подпространство  $B_+$  состоит из всех функций вида  $e^{-t} P_{\mu-1}(t)$ . Рассмотрим уравнение, транспонированное к (8); индекс его символа противоположен по знаку, и нули его принадлежат  $E_{\cap}$  и даются формулой, аналогичной формуле (10). Из этой формулы легко получается, что подпространство нулей транспонированного уравнения имеет базисом цепочку функций  $\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(\mu-1)}(t)$ , причем  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(\mu-2)}(0) = 0, \int_0^{\infty} e^{-t} \varphi(t) dt \neq 0$ . Положим  $c_{ks} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^k \varphi^{(s)}(t) dt$  ( $k, s = 0, \dots, \mu-1$ ). Интегрируя по частям, найдем рекуррентное соотношение  $c_{ks} = -k c_{k-1, s-1} + c_{k, s-1}$ , после чего без труда вычисляется по индукции определитель  $\Delta_{\mu} = |c_{ks}|_{k, s=0}^{\mu-1}$ , который оказывается отличным от нуля.

Функции  $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(\mu-1)}$  порождают по формуле

$$\Phi_s(f_+) = \int_0^{\infty} f_+(t) \varphi^{(s)}(t) dt \quad (s = 0, \dots, \mu-1)$$

функционалы из  $E_+^*$ , которые суть решения уравнения, сопряженного к (8). Если для функции  $f_+(t) = e^{-t}(A_0 + A_1 t + \dots + A_{\mu-1} t^{\mu-1}) \in B_+$   $\Phi_s(f_+) = 0$  ( $s = 0, \dots, \mu-1$ ), то в силу  $\Delta_{\mu} \neq 0$   $A_0 = \dots = A_{\mu-1} = 0$ , и  $f_+ \equiv 0$ . Из теоремы 6 и замечания к ней следует, что оператор уравнения (8) является  $\Phi$ -оператором в каждом пространстве  $E_+$ ; уравнение имеет единственное решение при условии, что правая часть ортогональна всем решениям ( $\in E_{\cap}$ ) однородного транспонированного уравнения (порожденные которыми функционалы образуют базис решений сопряженного к (8) уравнения).

Подобные рассуждения можно провести и для дискретного аналога уравнения (8).

Результаты 1°–4° были доложены автором на Международном конгрессе математиков в Москве (1966 г.) [7].

г. Казань

Поступило  
10 X 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, т. XIII, вып. 5, 1958, с. 3–120.
2. Пресдорф З. К теории систем сингулярных интегральных уравнений с вырождающейся символической матрицей, I. Вестник ЛГУ, 1965, № 19. Сер. матем., мех. и астроном., вып. 4, с. 58–73.
3. Косулин А. Е. Особый случай в теории сингулярных уравнений. Вестник ЛГУ, 1962, № 19. Сер. матем., мех. и астроном., вып. 4, с. 142–148.
4. Чеботарев Г. Н. Об одном уравнении типа свертки первого рода. Изв. вузов, Матем., 1967, № 2, с. 80–92.
5. Хайкин М. И. Об интегральном уравнении типа свертки первого рода. Изв. вузов, Матем., 1967, № 3, с. 105–116.
6. Дыбин В. Б. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки. Тезисы Междунар. конгресса математиков. Секция 5, М., 1966, с. 47.
7. Чеботарев Г. Н. О нормальной разрешимости неопределенных уравнений в некоторых пространствах. Тезисы Междунар. конгресса математиков. Секция 5, М., 1966, с. 81.
8. Чеботарев Г. Н. Об одном особом случае уравнения Винера — Хопфа в пространстве ограниченных функций. Изв. вузов, Матем., 1967, № 10.
9. Дыбин В. Б. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки. ИАН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1966, № 3, с. 37–45.