Л. Я. Савельев, О векторных счетно аддитивных мерах, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 758–759

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 517.397:519.53:513.88

МАТЕМАТИКА

Л. Я. САВЕЛЬЕВ

О ВЕКТОРНЫХ СЧЕТНО АДДИТИВНЫХ МЕРАХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 3 VII 1965)

1. Введение. Рассмотрим: 1) класс $\mathscr{P}$ всех частей множества U и обычными структурой кольца, порядком и so-топологией $\mathbf{S}$ ((1), § 2); 2) кольцо $\mathscr{R}$ в $\mathscr{P}$; 3) систему $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathscr{R})$ $(\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathscr{R}))$ всех конечных (счетных) дизъюнктивных частей $\mathscr{R}$ $(\mathbf{K} \subseteq \mathbf{D})$; 4) полное отделимое вещественное локально выпуклое пространство G.

Определение 1. Назовем отображение a кольца $\mathscr{R}$ в G счетно аддитивным в $\mathscr{R}$, если для каждого $\mathscr{D} \in \mathbf{D}$, для которого $\Sigma\mathscr{D} \in \mathscr{R}$, семейство $a\mathscr{D}$ суммируемо и $\Sigma a\mathscr{D} = a\Sigma\mathscr{D}$.

Обозначим $A = A(\mathscr{R}, G)$ множество всех счетно аддитивных в $\mathscr{R}$ отображений $\mathscr{R}$ в G.

Определение 2. Назовем отображение $a \in A$ счетно аддитивным, если для каждого $\mathscr{D} \in D$ семейство $a\mathscr{D}$ суммируемо.

Обозначим $C = C(\mathscr{R}, G)$ множество всех $a \in A$, являющихся счетно аддитивными отображениями.

Обозначим Γ множество полунорм на G, определяющих топологию в G. Для каждых $\gamma \in \Gamma$, $a \in A$, $X \in \mathscr{R}$ определим $v_{\gamma a}X = \sup\{\Sigma\gamma a\mathscr{K}\colon \mathscr{K} \in \mathbf{K}, \Sigma\mathscr{K} \subseteq X\}$; назовем отображения $v_{\gamma a}\colon X \to v_{\gamma a}X$ вариациями для a.

Обозначим $V = V(\mathscr{R}, G)$ множество всех $a \in A$, имеющих ограниченные вариации; $S = S(\mathscr{R}, G)$ — **являющихся непрерывными отображениями** $\mathscr{R}$ в G; $B = B(\mathscr{R}, G)$ — являющихся ограниченными отображениями $\mathscr{R}$ в G; $E = E(\mathscr{R}, G)$ — имеющих продолжение $\bar{a} \in A(\overline{\mathscr{R}}, G)$ ($\overline{\mathscr{R}}$ — замыкание кольца $\mathscr{R}$ в $\mathscr{P}$).

Заметка посвящена описанию связи между выделенными классами счетно аддитивных отображений. Основной результат выражается следующим образом:

Теорема 1. $V \subseteq S(E) \subseteq C \subseteq B$.

2. Топология $\mathbf{V}_a$. Для каждых $a \in V$, $\gamma \in \Gamma$, $K \in \mathscr{K}$ ($\mathscr{K}$ — класс всех конечных частей множества Γ), $\varepsilon > 0$ определим $\mathscr{U}(\gamma, \varepsilon) = \{X \in \mathscr{P}\colon X \subseteq \Sigma\mathscr{D}_0 (\mathscr{D}_0 \in \mathbf{D}), \Sigma v_{\gamma a}\mathscr{D}_0 < \varepsilon\}$; $\mathscr{U}(K, \varepsilon) = \bigcap_{\in K} \mathscr{U}(\gamma, \varepsilon)$.

Для каждых $\gamma \in \Gamma$, $a \in V$ вариация $v_{\gamma a} \in B(\mathscr{R}, R)$. Следовательно, существует топология $\mathbf{V}_{\gamma a}$ в $\mathscr{P}$, согласованная со структурой кольца в $\mathscr{P}$, для которой $\{\mathscr{U}(\gamma, \varepsilon)\}_\varepsilon$ является фундаментальной системой окрестностей нуля ((2), § 1). Рассмотрим топологию $\mathbf{V}_a$ в $\mathscr{P}$, порожденную объединением $\bigcup(\mathbf{V}_{\gamma a})_\gamma$. Следующие предложения описывают некоторые общие свойства $\mathbf{V}_a$.

Предложение 1. *Топология $\mathbf{V}_a$ согласована со структурой кольца в $\mathscr{P}$ и $\{\mathscr{U}(K, \varepsilon)\}_{K, \varepsilon}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля.*

Предложение 2. *Каждый класс $\mathscr{D} \in \mathbf{D}(\overline{\mathscr{R}})$ суммируем, и его сумма равна объединению $\Sigma\mathscr{D}$.*

Обозначим $\overline{\mathscr{R}}_a$ замыкание кольца $\mathscr{R}$ в топологии $\mathbf{V}_a$.

Предложение 3. $\overline{\mathscr{R}} \subseteq \overline{\mathscr{R}}_a$.

Предложение 4. *Каждое $a \in V$ равномерно непрерывно* $(\mathbf{V}_a)$.

3. Схема доказательства теоремы 1. Теорема 1 является объединением следующих предложений.

Предложение 5. $V \subseteq S$.

Для каждых $\gamma \in \Gamma$, $a \in V$ $v_{\gamma a} \in B(\mathscr{R}, R)$. Отсюда $v_{\gamma a} \in S(\mathscr{R}, R)$ ((1), § 3, теорема 3). Отсюда непрерывность a в $O(\mathbf{S})$ и непрерывность a.

Предложение 6. $S \subseteq C$.

Для каждого $a \in C'$ индуктивно с использованием критерия Коши ((3), гл. 3, § 4, п. 2, теорема 1) определяется последовательность (D_n) такая, что $\{D_n\} \in \mathbf{D}$ и $(aD_n) \to 0$.

Предложение 7. $V \subseteq E$.

Для каждого $a \in V$ существует равномерно непрерывное продолжение $\bar{a}$ (предложение 4; (3), гл. 2, § 3, п. 4, теорема 1). $\bar{a}$ конечно аддитивно (ср. (2), § 2, лемма 5). Для каждого $\mathscr{D} \in \mathbf{D}(\bar{\mathscr{R}})$ по предложению 2 $\Sigma\mathscr{D} \in \bar{\mathscr{R}}_a$. Следовательно, $\bar{a} \in \mathbf{A}(\bar{\mathscr{R}}_a, G)$ и $a \in E$ (предложение 3).

Предложение 8. $E \subseteq C$.

Следует непосредственно из определений.

Предложение 9. $C \subseteq B$.

Следует из частного случая для числовых отображений; предложения 5, п. 5, § 4, гл. 3 (3) и следствия теоремы 3, п. 4, § 2, гл. 4 (4).

4. Некоторые следствия.

Следствие 1. *Если G конечномерно, то $V = E = S = C = B$.*

Достаточно доказать, что $B \subseteq V$ и рассматривать случай $G = R^n$ (теорема 1; (4), гл. 1, § 2, п. 3, теорема 2). Доказательство сводится к оценке вариации с помощью неравенства (1), п. 1, § 3, гл. 7 (5).

Следствие 2. *Если G монтелевское, то $C = B$.*

Достаточно доказать, что $B \subseteq C$, (теорема 1). Для каждых $a \in B$, $\mathscr{D} \in \mathbf{D}$ семейство $a\mathscr{D}$ суммируемо в ослабленной топологии ((5), гл. 4, § 6, теорема 1, следствие; § 7, п. 2, теорема 3, следствие) и, следовательно, суммируемо ((4), гл. 4, § 3, п. 4, предложение 6).

Следствие 3. *Если G слабо секвенциально полное банахово пространство, то $C = B$.*

Достаточно доказать, что $B \subseteq C$. Для каждых $a \in B$, $\mathscr{D} \in \mathbf{D}$ семейство $a\mathscr{D}$ суммируемо в ослабленной топологии. Каждая последовательность (aD_n), для которой $\{aD_n\} = a\mathscr{D}$, сходится по подпоследовательностям в ослабленной топологии ((3), гл. 3, § 4, п. 7, предложение 9; (6), гл. 4, § 1, п. 1д) и, следовательно, сходится по подпоследовательностям ((6), гл. 4, § 1, теорема 1). Следовательно, $a\mathscr{D}$ суммируемо ((3), гл. 3, § 4, п. 7, предложение 9; (6), гл. 4, § 1, п. 1в).

Следствие 4. ***Если $\mathscr{R}$ замкнуто (S), то $C = B = A$.***

Вытекает непосредственно из определений, теоремы 1 и следствия предложения 5, § 2, (1).

5. Замечания.

Замечание 1. Существуют $\mathscr{R}$, G такие, что $V \neq C$.

Пусть U — множество всех натуральных чисел, $\mathscr{R}$ — класс всех частей множества U, G — бесконечномерное банахово пространство. Рассмотрим отображение a': $n \to a'n$, где $|a'n| = 1/n$ и $(a'n)_{n \in U}$ суммируемо ((6), гл. 4, § 1, теорема 2). Для каждого $X \in \mathscr{R}$ определим $aX = \Sigma(a'n)_{n \in X}$ ((3), гл. 3, § 4, п. 3, предложение 2). $a \in C$, $a \notin V$.

Замечание 2. Существуют $\mathscr{R}$, G такие, что $C \neq B$.

Следующий пример предложен С. В. Нагаевым. Пусть U — множество натуральных чисел, $\mathscr{R}$ — класс всех конечных частей множества U, G — банахово пространство всех непрерывных функций на интервале $[0, 1]$. Рассмотрим отображение a': $a'n = \{X \to X^n - X^{n+1}\}$. Для каждого $X \in \mathscr{R}$ определим $aX = \Sigma(a'n)_{n \in X}$; $a \in B$, $a \notin C$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступило
28 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Савельев, Сибирск. матем. журн., 6, 6 (1965). [2] Л. Савельев, Сибирск. матем. журн., 5, 3 (1964). [3] Н. Бурбаки, Общая топология (основные структуры), 1958. [4] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, 1959. [5] Н. Бурбаки, Общая топология (числа и связанные с ними группы и пространства), 1959. [6] М. Дэй, Нормированные линейные пространства, 1961.