И. П. Митюк, А. Ю. Солынин, Упорядочивание систем областей и конденсаторов в пространстве,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 8, 54–59

10. Мирзоян В. А. Подмногообразия с параллельной фундаментальной формой высшего порядка.— М., 1978.— 47 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 20.06.78, № 2074 — 78.

11. Мирзоян В. А. О локальном строении подмногообразия с параллельной фундаментальной формой α_k ($k \geqslant 3$): Тез. докл. VI прибалт. геометр. конф.— Таллинн, 1984.— С. 83.

12. Мирзоян В. А. Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем // Учен. зап. Ереванск. ун-та.— 1981.— № 3.— С. 9—16.

13. Лумисте Ю. Г., Чакмазян А. В. Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем // Изв. вузов Математика.— 1974.— № 5.— С. 148—157.

14. Лумисте Ю. Г., Чакмазян А. В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1981.— Т. 12.—С. 3—30.

15. Рыжков В. В. Сопряженные системы на многомерных поверхностях // Тр. Моск. матем. о-ва.— 1958.— Т. 7.— С. 179—226.

16. Акивис М. А., Рыжков В. В. Многомерные поверхности специальных проективных типов // Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда.— 1964.— Т. 2.— С. 159—164.

17. Акивис М. А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР.— 1966.— Т. 1.— С. 7—31.

18. Акивис М. А. О строении сопряженных систем на многомерных поверхностях // Изв. вузов. Математика.— 1979.— № 10.— С. 3—11.

19. Moore J. D. Isometric immersions of riemannian products // J. Different. Geom.— 1971.— V. 5.— № 1—2.— P. 159—168.

20. Lumiste Ü. Decomposition of semi-symmetric submanifolds // Уч. зап. Тартуск. ун-та.— 1988.— № 803.— С. 69—78.

21. Мирзоян В. А. Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем // ДАН АрмССР.— 1981.— Т. 72.— № 1.— С. 14—17.

22. Walden R. Untermannigfaltigkeiten mit paralleler zweiter Fundamentalform in euklidischen Räumen und Sphären // Manuscr. math.— 1973.— V. 10.— № 1.— P. 91—102.

г. Ереван

Поступила
06.12.1989

И. П. Митюк, А. Ю. Солынин УДК 517.518

УПОРЯДОЧИВАНИЕ СИСТЕМ ОБЛАСТЕЙ И КОНДЕНСАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

В данном сообщении будет введено преобразование системы пространственных конденсаторов и областей. Техника, связанная с оценками емкостей, модулей семейств поверхностей или кривых и других аналогичных величин, широко используется при изучении различных классов пространственных отображений [1], [2]. Для получения же самих этих оценок чаще всего применяют те или иные геометрические преобразования. В основном это различные виды симметризации или усреднение. Важное преобразование пространственных конденсаторов, называемое поляризацией, введено В. Н. Дубининым [3].

§ 1. Упорядочивание систем конденсаторов и областей

Конденсатором в $\overline{R^n} = R^n \bigcup \{\infty\}$, $n \geqslant 2$, называется упорядоченная пара $C = (E_0, E_1)$ непересекающихся непустых замкнутых множеств. Множества E_0 и E_1 называются пластинами, а $D = \overline{R^n} \setminus (E_0 \bigcup E_1)$—полем конденсатора C (см., напр., [1]).

Рассмотрим систему конденсаторов $C_k = (E_0^k, E_1^k)$, $k = \overline{1, m}$, пластины которых удовлетворяют условиям

$$\bigcap_{k=1}^{m} E_s^k \neq \varnothing, \quad s = 0, 1. \tag{1}$$

Введем обозначения: F_1^k — пересечение всевозможных объединений по k множеств из системы $E_1^1, \ldots, E_1^m$; F_0^k — пересечение всевозможных объединений по $m + 1 - k$ множеств из системы $E_0^1, \ldots, E_0^m$.

Множества F_0^k, F_1^k непустые и замкнутые. Пересечения $F_0^k \bigcap F_1^k$ пусты для всех $k = \overline{1, m}$. Поэтому имеет смысл рассматривать конденсаторы

$\widetilde{C}_k=(F_0^k, F_1^k)$, $k=\overline{1,m}$. Отметим, что для пластин $\widetilde{C}_k$ выполняются включения $F_1^k \subset F_0^{k+1}$, $F_0^{k+1} \subset F_0^k$, $k=\overline{1,m-1}$, т. е. F_1^k образуют расширяющуюся систему множеств, а пластины F_0^k — сужающуюся.

Упорядочиванием системы конденсаторов $\{C_k\}$ назовем переход от $\{C_k\}$ к системе конденсаторов $\{\widetilde{C}_k\}$, $k=\overline{1,m}$.

Определим операцию упорядочивания системы областей $\{G_k\}$, $x^0 \in G_k \subset \overline{R}^n$, $k=\overline{1,m}$. Для этого рассмотрим систему конденсаторов $\{C_k(x^0)\}$, $C_k(x^0)= =(\overline{R}^n \setminus G_k, x^0)$. Через $G_k(x^0)$ обозначим ту связную компоненту поля конденсатора $\widetilde{C}_k(x^0)$, которая имеет на границе точку x^0. Пусть $\widetilde{G}_k=G_k(x^0) \cup \{x^0\}$. Отметим, что $G_k \subset G_{k+1}$, $k=\overline{1,m-1}$, т. е. $\{\widetilde{G}_k\}$ — система вложенных областей.

Упорядочиванием системы областей $\{G_k\}$ назовем переход от $\{G_k\}$ к системе областей $\{\widetilde{G}_k\}$, $k=\overline{1,m}$.

Описанное выше преобразование для двух компактов на плоскости введено Ренгли в [4], где получено неравенство, связывающее трансфинитные диаметры исходных и преобразованных компактов. Позже в работе [5] Клейн распространил это преобразование и неравенство для трансфинитных диаметров на систему из m плоских компактов и получил некоторые приложения для однолистных функций. В серии работ [6] — [8] первый из авторов ввел преобразование упорядочивания для систем плоских областей и конденсаторов, показал, как меняются сумма емкостей или произведение внутренних радиусов при упорядочивании и дал различные приложения к регулярным функциям. Методы доказательства из работ [4] — [8] на n-мерный случай, по-видимому, не переносятся. Поэтому в данной работе при доказательстве основных результатов используется другая методика, которая даже в плоском случае позволяет получить некоторые обобщения (см., напр., теорему 4). Основным моментом здесь является понятие упорядочивания системы функций.

Рассмотрим отображение $f:\overline{R}^n \to R^m$; $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))$. При фиксированном $x \in \overline{R}^n$ через $(g_1(x), \ldots, g_m(x))$ обозначим неубывающую перестановку множества чисел $\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$.

Отображение $g:\overline{R}^n \to R^m$ назовем упорядочиванием отображения f, если $g(x)=(g_1(x), \ldots, g_m(x))$. Будем применять также термин „упорядочивание системы функций $(f_1(x), \ldots, f_m(x))$“.

§ 2. Упорядочивание и емкости конденсаторов

С конденсатором $C=(E_0, E_1)$ связывается семейство допустимых функций $\widetilde{W}_p(C)$, $p \geqslant 1$, состоящее из функций $v:\overline{R}^n \to R$ класса $C^\infty(R^n)$, для каждой из которых существуют такие открытые множества U_0 и U_1, что $E_k \subset U_k$, $k=0, 1$; $v(x)=0$ при $x \in U_0$, $v(x)=1$ при $x \in U_1$, $0 \leqslant v(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \overline{R}^n$ и интеграл $I_{R^n}(v)$ конечен. Через $I_D(v)$ здесь обозначается интеграл

$$I_D(v)=\int_D |\nabla v(x)|^p dx. \tag{2}$$

Отображение $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ назовем допустимым для семейства конденсаторов C_k, если $f_k \in \widetilde{W}_p(C_k)$, $k=\overline{1,m}$.

Точная нижняя граница (2) на множестве $\widetilde{W}_p(C)$ называется p-емкостью C и обозначается через $\operatorname{cap}_p C$ (см., напр., [1], с. 52). В случае $p=n$ n-емкость называется конформной емкостью.

Замыкание класса $\widetilde{W}_p(C)$ относительно нормы $\|v\|=(I_{R^n}(v))^{1/p}$ обозначим через $W_p(C)$. Отображение $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ принадлежит классу $W_p(C_k)$, $k=\overline{1,m}$, если для любого k компонента $f_k(x) \in W_p(C_k)$.

Лемма 1. *Если отображение* $f:\overline{R}^n \to R^m$ *принадлежит классу* $W_p(C_k)$, $k=\overline{1,m}$, *то и его упорядочивание* $g:\overline{R}^n \to R^m$ *принадлежит классу* $W_p(\widetilde{C}_k)$, $k=\overline{1,m}$.

Доказательство. Пусть $g(x)=(g_1(x), \ldots, g_m(x))$. Вначале рассмотрим случай $m=2$. При этом выполняются соотношения $g_1(x)=\min\{f_1(x), f_2(x)\}$, $g_2(x)=\max\{f_1(x), f_2(x)\}$. Утверждение леммы следует теперь из следствия 1 ([1], с. 107) и теоремы 1.8 ([1], с. 17). В общем случае воспользуемся индукцией по m и следующим замечанием. Пусть $\{g_{k,j}(x)\}$, $k=\overline{1,j}$, — результат упорядочивания системы $\{f_k\}$, $k=\overline{1,j}$ и $j>2$. Тогда

$$g_{m+1,\,m+1}(x)=\max\{g_{m,m}(x),\ g_{m+1}(x)\};\quad \widetilde{g}_{m+1,\,m+1}(x)=\min\{g_{m,m}(x),\ g_{m+1}(x)\};$$

$$g_{m,\,m+1}(x)=\max\{g_{m-1,\,m}(x),\ g_{m+1,\,m+1}(x)\};$$

$$\widetilde{g}_{m,\,m+1}(x)=\min\{g_{m-1,\,m}(x),\ \widetilde{g}_{m+1,\,m+1}(x)\};$$

если $g_{k,m+1}$ и $\widetilde{g}_{k,m+1}$ уже определены, то

$$g_{k-1,\,m+1}=\max\{g_{k-2,\,m},\ \widetilde{g}_{k,\,m+1}\};\quad \widetilde{g}_{k-1,\,m+1}=\min\{g_{k-2,\,m}, \widetilde{g}_{k,\,m+1}\}.$$

Отсюда так же, как и выше, получаем утверждение леммы.

Функция $W_p(x,\ C)\in W_p(C)$, на которой реализуется инфимум в (2), называется p-потенциальной функцией конденсатора C. Известно ([1], с. 55), что p-потенциальная функция (если она существует) единственна и удовлетворяет внутри поля конденсатора C уравнению Эйлера для функционала (2):

$$\operatorname{div}\left[|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right]=0. \tag{3}$$

При $p=2$ соотношение (3) обращается в уравнение Лапласа, следовательно, $W_2(x,\ C)$ гармоническая в поле C.

Пусть $C_k=(E_0^k,\ E_1^k)$, $k=\overline{1,m}$, — система конденсаторов, удовлетворяющих (1); G_k и $\widetilde{G}_k$ — поля конденсаторов C_k и $\widetilde{C}_k$ соответственно. Через $G_k^l(\widetilde{G}_k^l)$, $l=1, 2, \ldots$, обозначим связные компоненты G_k $(\widetilde{G}_k)$, замыкание которых имеет непустое пересечение с обеими пластинами E_0^k и E_1^k (F_0^k и F_1^k).

Теорема 1. *Если система конденсаторов* $C_k=(E_0^k,\ E_1^k)$, $k=\overline{1,m}$, *удовлетворяет* (1), *то для любого* $p\geqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m}\operatorname{cap}_p C_k \geqslant \sum_{k=1}^{m}\operatorname{cap}_p \widetilde{C}_k. \tag{4}$$

Если $p=2$ *и конденсаторы* C_k, $k=\overline{1,m}$, *имеют непрерывные 2-потенциальные функции, то равенство в* (4) *имеет место тогда и только тогда, когда множества областей* $\{G_k^l\}$ *и* $\{\widetilde{G}_k^l\}$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть отображение $v(x)=(v_1(x), \ldots, v_m(x))$ допустимо для системы $\{C_k\}$ и $u(x)=(u_1(x), \ldots, u_m(x))$ — упорядочивание $v(x)$. Введем обозначения:

$$D_{l;\,j_1,\,j_2,\ldots,\,j_s}=\{x: v_i(x)=u_{j_1}(x)=\ldots=u_{j_s}(x);\quad v_i(x)\neq u_j(x),\quad j\neq j_l,\quad l=\overline{1,s}\};$$

$$G_{l;\,j_1,\ldots,\,j_s}=\{x: u_i(x)=v_{j_1}(x)=\ldots=v_{j_s}(x);\quad u_i(x)\neq v_j,\ j\neq j_l,\ l=\overline{1,s}\}.$$

Отметим, что при $s\geqslant 1$ существует ровно s индексов i_r таких, что множества $D_{i_r;\,j_1,\ldots,\,j_s}$ совпадают и выполняется равенство $D_{i_r;\,j_1,\ldots,\,j_s}=G_{j_k;\,i_1,\ldots,\,i_s}$, $r=\overline{1,s}$, $k=\overline{1,s}$. Рассмотрим разности $\Delta(i_r,\ j_k)=v_{i_p}(x)-u_{j_k}(x)$. На множестве $D_{i_r;\,j_1,\ldots,\,j_s}$ $\Delta(i_r,\ j_k)=0$, поэтому так же, как в следствии 2 ([1], с. 108), получаем, что на $D_{i_r;\,j_1,\ldots,\,j_s}$ почти всюду выполняются соотношения $\nabla v_{i_r}=$ $=\nabla u_{j_k}$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m} I_{R^n}(v_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum\nolimits_1' I_{D_k;\, j_1, \ldots, j_s}(v_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum\nolimits_1' I_{G_k;\, j_1, \ldots, j_s}(u_k) = \sum_{k=1}^{m} I_{R^n}(u_k). \tag{5}$$

Знак $\sum_1'$ означает, что суммирование ведется по всевозможным наборам индексов $j_1, \ldots, j_s$ из множества $\{1, \ldots, m\}$.

Из (5) и леммы 1 получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} I_{R^n}(v_k) = \sum_{k=1}^{m} I_{R^n}(u_k) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cap}_p \widetilde{C}_k. \tag{6}$$

Переходя в (6) к инфимуму по отображениям $v(x) \in \widetilde{W}_p(C_k)$, получаем (4).

Пусть в (4) имеет место равенство и $p = 2$. Тогда равенство должно выполняться и в (6), если $v_k(x)$ есть 2-потенциальная функция конденсатора C_k. Отсюда следует, что $u_k(x)$ есть 2-потенциальная функция для $\widetilde{C}_k$. Так как при $p = 2$ 2-потенциальные функции гармоничны в поле соответствующего конденсатора, то из условия равенства $v_k(x)$ и $u_i(x)$ на некотором открытом шаре из $G_k^l \cap \widetilde{G}_i^s$ следует совпадение компонент G_k^l и $\widetilde{G}_i^s$. Этим теорема 1 полностью доказана.

Для плоских конденсаторов при $p = 2$ теорема 1 доказана в [8].

Конденсатор $C_1 = (E_0^1, E_1^1)$ называется вложенным в $C_2 = (E_0^2, E_1^2)$, если $E_k^2 \subset E_k^1$, $k = 0, 1$. Отсюда вытекает, что класс допустимых функций для C_2 шире, чем для C_1. Следовательно, $\operatorname{cap}_p C_2 \leqslant \operatorname{cap}_p C_1$.

Рассмотрим систему конденсаторов $C_k = (E_0^k, E_1)$, $k = \overline{1, m}$. В этом случае $\{\widetilde{C}_k\}$ — система вложенных конденсаторов. Кроме того, $\widetilde{C}_1$ вложен в C_k, а C_k вложен в $\widetilde{C}_m$. Следовательно, выполняются неравенства

$$\operatorname{cap}_p \widetilde{C}_m \leqslant \operatorname{cap}_p C_k \leqslant \operatorname{cap}_p \widetilde{C}_1, \quad k = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Пусть $G_k(\widetilde{G}_k)$ — поле конденсатора $C_k(\widetilde{C}_k)$. Для любого j, $1 \leqslant j \leqslant m$, через $\{C_{j,k}\}$ обозначим результат упорядочивания подсистемы $\{C_k\}$, $k = \overline{1, j}$; через $G_{j,k}$ — поле $C_{j,k}$, через $C_{j,k}^p$, $j < p \leqslant m$, обозначим конденсатор, имеющий второй пластиной множество E_1 и полем множество $G_{j,k} \cap G_p$.

Из легко проверяемых соотношений $G_{j,k-1} \cup (G_{j,k} \cap G_{j+1}) = G_{j+1,k}$; $G_{j,k-1} \cap \cap (G_{j,k} \cap G_{j+1}) = G_{j,k} \cap G_{j+1}$ получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Результатом упорядочивания системы из двух конденсаторов* $\{C_{j,k-1};\ C_{j,k}^{j+1}\}$ *является пара* $\{C_{j,k-1}^{j+1};\ C_{j+1,k}\}$.

Для системы конденсаторов вида $C_k = (E_0^k, E_1)$, $k = \overline{1, m}$, теорему 1 можно существенно усилить.

Теорема 2. *Пусть* $C_k = (E_0^k, E_1)$, $k = \overline{1, m}$, — *система конденсаторов, удовлетворяющих* (1). *Если* $\Phi(t)$ — *выпуклая невозрастающая при* $t > 0$ *функция, то*

$$\sum_{k=1}^{m} \Phi(\operatorname{cap}_p C_k) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \Phi(\operatorname{cap}_p \widetilde{C}_k). \tag{8}$$

Равенство в (8) *для системы допустимых конденсаторов и строго выпуклой функции* $\Phi(t)$ *имеет место только в случае совпадения систем конденсаторов* $\{C_k\}$ *и* $\{\widetilde{C}_k\}$.

Доказательство теоремы 2 проведем индукцией по m. При $m = 2$ требуемое утверждение следует из теоремы 1, неравенств (7) и следующей леммы о выпуклых функциях.

Лемма 3. *Пусть* $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d < \infty$ *и* $a + d \leqslant b + c$. *Если* $\Phi(t)$ — *выпуклая при* $t > 0$ *функция и* $\Phi(a) \geqslant \Phi(d)$, *то* $\Phi(b) + \Phi(c) \leqslant \Phi(a) + \Phi(d)$.

Равенство для строго выпуклой функции возможно только в случае $a=b$ и $c=d$.

Пусть теперь $m>2$. Предположим, что при всех j, $j\leqslant m$, утверждение теоремы 2 выполняется. Тогда для системы конденсаторов C_k, $k=\overline{1, m+1}$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{m+1} \Phi(\operatorname{cap}_p C_k) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \Phi(\operatorname{cap}_p C_{m,k}) + \Phi(\operatorname{cap}_p C_{m+1}). \tag{9}$$

К паре конденсаторов $C_{m,m}$; C_{m+1} применим преобразование упорядочивания. В результате получим пару конденсаторов $C_{m,m}^{m+1}$; $C_{m+1,m+1}$. Затем упорядочиваем пару $C_{m,m-1}$; $C_{m,m}^{m+1}$. В итоге согласно лемме 2 получаем конденсаторы $C_{m,m+1}^{m+1}$; $C_{m+1,m}$. Продолжая этот процесс и на каждом шаге применяя лемму 3, получим неравенство (8).

Докажем утверждение о равенстве. Если равенство имеет место в (8), то оно выполняется и в (9) и выполняется на каждом шаге описанных выше преобразований. В этом случае согласно индуктивному предположению системы конденсаторов $\{C_k\}$ и $\{C_{m,k}\}$, $k=\overline{1,m}$, совпадают с точностью до нумерации конденсаторов. Кроме этого совпадают пары конденсаторов (опять с точностью до нумерации) и на каждом шаге преобразований. Следовательно, совпадают и системы $\{C_k\}$, $\{\widetilde{C}_k\}$. Теорема полностью доказана.

§ 3. Некоторые следствия

Приведем некоторые следствия из теорем 1 и 2. Через $\Gamma_1^k(\widetilde{\Gamma}_1^k)$ обозначим семейство кривых, лежащих в поле G_k $(\widetilde{G}_k)$ конденсатора $C_k=(E_0^k, E_1^k)$ $(\widetilde{C}_k=(\widetilde{E}_0^k, \widetilde{E}_1^k))$ и соединяющих пластины E_0^k и E_1^k ($\widetilde{E}_0^k$ и $\widetilde{E}_1^k$).

Известно, что $M(\Gamma_1^k)=\operatorname{cap}_n C_k$ (см. [1], с. 150). Через $M(\Gamma)$ здесь и далее обозначим n-модуль соответствующего семейства кривых или поверхностей.

Пусть $\Gamma_2^k(\widetilde{\Gamma}_2^k)$ — семейство $(n-1)$-мерных поверхностей, лежащих в G_k $(\widetilde{G}_k)$ и отделяющих E_0^k $(\widetilde{E}_0^k)$ от $E_1^k(\widetilde{E}_1^k)$. Каждая поверхность этих семейств может состоять из конечного или счетного числа компонент. Модули Γ_1^k и Γ_2^k связаны соотношением $M(\Gamma_2^k)=(M(\Gamma_1^k))^{-1}$.

Теорема 3. *В предположениях теоремы 2 выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} \Phi(M(\Gamma_1^k)) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \Phi(M(\widetilde{\Gamma}_1^k)). \tag{10}$$

В частности, если $\Phi(t)=t^{-\alpha}$, $\alpha>0$, то

$$\sum_{k=1}^{m} M^{\alpha}(\Gamma_2^k) \leqslant \sum_{k=1}^{m} M^{\alpha}(\widetilde{\Gamma}_2^k). \tag{11}$$

Утверждение о равенстве в (10) и (11) такое же, как и в теореме 2. Эта теорема — простое следствие теоремы 2.

Рассмотрим систему областей G_k на комплексной сфере $\overline{C}$. Пусть $z_0\in G_k$, $k=\overline{1,m}$, и $r(G_k, z_0)$ — внутренний радиус области G_k относительно точки z_0.

Теорема 4. *Если $\Phi(t)$ — выпуклая неубывающая на R функция, то*

$$\sum_{k=1}^{m} \Phi\left(\frac{1}{2\pi}\log r(G_k, z_0)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \Phi\left(\frac{1}{2\pi}\log r(\widetilde{G}_k, z_0)\right). \tag{12}$$

Для допустимых областей G_k и строго выпуклой функции $\Phi(t)$ равенство в (12) имеет место только в случае совпадения систем областей $\{G_k\}$ и $\{\widetilde{G}_k\}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ достаточно мало, $U_\varepsilon(z_0)=\{z:|z-z_0|<\varepsilon\}$. Рассмотрим систему конденсаторов $C_k(\varepsilon)=(\overline{C}\setminus G_k, \overline{U_\varepsilon(z_0)})$. Пусть $\{\widetilde{C}_k(\varepsilon)\}$ — результат упорядочивания системы $\{C_k(\varepsilon)\}$. Функция $\Phi(1/t+a)$ при $t>0$ удовлетворяет условиям теоремы 2, поэтому выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{m}\Phi\left(\frac{1}{\operatorname{cap}_2 C_k(\varepsilon)}+\frac{1}{2\pi}\log\varepsilon\right)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\Phi\left(\frac{1}{\operatorname{cap}_2\widetilde{C}_k(\varepsilon)}+\frac{1}{2\pi}\log\varepsilon\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$ и учитывая асимптотическую формулу ([9], с. 103):

$$\frac{1}{\operatorname{cap}_2 C_k(\varepsilon)}+\frac{1}{2\pi}\log\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\log r(G_k, z_0)+o(1),$$

получим неравенство (12).

Утверждение о равенстве в (12) доказывается так же, как и утверждение о равенстве в теореме 2. При этом используется вспомогательное утверждение, аналогичное лемме 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением.— Новосибирск, 1982.— 285 с.
2. Сычев А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения.— Новосибирск, 1983.— 152 с.
3. Дубинин В. Н. Преобразование конденсаторов в пространстве // ДАН СССР.— 1987.— Т. 296.— № 1.— С. 18—20.
4. Renggli H. An inequality for logarithmic capacities // Pacif. J. Math.— 1961.— V. 11.— № 1.— P. 313—314.
5. Klein M. Estimates for the transfinite diameter with applications to conformal mapping // Pacif. J. Math.— 1967.— V. 22.— № 2.— P. 267—279.
6. Митюк И. П. Оценка сверху для произведения внутренних радиусов областей и теоремы покрытия // Изв. вузов. Математика. — 1987.— № 8.— С. 39—47.
7. Митюк И. П. Конденсаторы и теоремы покрытия // Сиб. матем. журн.— Новосибирск, 1987.— 15 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 02.09.87, № 6423— В 87.
8. Митюк И. П. Оценка снизу суммы емкости конденсаторов // Укр. матем. журн.— 1989.— Т. 41.— № 10.— С. 1442—1444.
9. Хейман В. Многолистные функции.— М.: Ин. лит., 1960.— 179 с.

г. Краснодар

Поступила 16.05.1990

Р. Г. Мухарлямов УДК 517.933

О МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПРОГРАММНЫМИ СВЯЗЯМИ

Из [1], [2] известно, что полная энергия механической системы (МС) с сервосвязями убывает или возрастает в зависимости от принуждений. Изменение полной энергии является следствием возмущения сервосвязей, которое связано с затратой или прибавлением дополнительной энергии и которое не отражено в выражении для кинетической энергии системы. Если в выражении для кинетической энергии учесть отклонения от сервосвязей или, формулируя более определенно, от программных связей [3], то можно выявить условия, при соблюдении которых полная энергия МС будет оставаться постоянной.

В данной работе составляются уравнения движения МС с голономными и неголономными программными связями и определяются условия, накладываемые на уравнения программных связей, при выполнении которых полная энергия системы, вычисленная с учетом возмущений связей, остается постоянной или убывает с заданной скоростью.

1. *Уравнения Лагранжа первого рода.* Рассмотрим МС, состоящую из N материальных точек с массами $m_{3\nu}$ и координатами $x_{3\nu-2}$, $x_{3\nu-1}$, $x_{3\nu}$, $\nu=1,\ldots,N$,