Л. Г. Рыбников, Централизаторы некоторых квадратичных элементов в алгебрах Пуассона–Ли и метод сдвига инвариантов, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 2, 173–174

DOI: 10.4213/rm1421

# ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В АЛГЕБРАХ ПУАССОНА–ЛИ И МЕТОД СДВИГА ИНВАРИАНТОВ

Л. Г. Рыбников

**1.** Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая комплексная алгебра Ли и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – ее картановская подалгебра. Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ имеет возрастающую фильтрацию по степени выражения через образующие. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта ассоциированная градуированная алгебра есть симметрическая алгебра $S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$. Коммутатор в $U(\mathfrak{g})$ задает скобку Пуассона–Ли $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$ в $S(\mathfrak{g})$. На образующих $x, y \in \mathfrak{g}$ имеем $\{x, y\} = [x, y]$.

*Метод сдвига инвариантов* позволяет строить коммутативные (относительно $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$) подалгебры в $S(\mathfrak{g})$. Этот метод состоит в следующем. Для любого регулярного элемента $h_0 \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ подалгебра $A(h_0) \subset S(\mathfrak{g})$, порожденная $\mathfrak{g}$-инвариантами в $S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ и их производными всех порядков вдоль $h_0$, коммутативна и имеет максимально возможную степень трансцендентности, равную $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g})$ (см. [1]). Более того, подалгебры $A(h_0)$ являются максимальными коммутативными подалгебрами в $S(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона–Ли [2]. Подалгебры $A(h_0)$ названы в [3] *подалгебрами Мищенко–Фоменко*.

Пусть $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ – система корней алгебры $\mathfrak{g}$, $\Delta_+$ – множество положительных корней, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ – простые корни. Зафиксируем инвариантное невырожденное скалярное умножение $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ на $\mathfrak{g}$ и выберем в каждом корневом пространстве $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, элемент $e_\alpha$ так, чтобы $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. Положим $h_\alpha := [e_\alpha, e_{-\alpha}]$, тогда для любого $h \in \mathfrak{h}$ имеем $(h_\alpha, h) = \alpha(h)$. Элементы $e_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ вместе с элементами $h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_l} \in \mathfrak{h}$ образуют базис пространства $\mathfrak{g}$.

Линейная и квадратичная части подалгебр Мищенко–Фоменко допускают следующее описание [4]: $A(h_0) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, $A(h_0) \cap S^2(\mathfrak{g}) = S^2(\mathfrak{h}) \oplus Q(h_0)$, где $Q(h_0) = \bigl\{\sum_{\alpha\in\Delta_+} \frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)} e_\alpha e_{-\alpha} \mid h \in \mathfrak{h}\bigr\}$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *При общих значениях параметра $h_0 \in \mathfrak{h}$ (т.е. для $h_0$, лежащих в дополнении счетного числа собственных замкнутых по Зарисскому подмножеств в $\mathfrak{h}$) алгебра $A(h_0)$ есть централизатор пространства $Q(h_0)$ в $S(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона–Ли.*

В [5], [6] подалгебры Мищенко–Фоменко были подняты в универсальную обертывающую алгебру, т.е. построены такие коммутативные подалгебры $\mathscr{A}(h_0) \subset U(\mathfrak{g})$, что $\operatorname{gr} \mathscr{A}(h_0) = A(h_0)$. Мы выведем из теоремы 1 следующее утверждение.

Теорема 2. *При общих значениях параметра $h_0 \in \mathfrak{h}$ существует не более одной коммутативной подалгебры $\mathscr{A}(h_0) \subset U(\mathfrak{g})$, для которой $\operatorname{gr} \mathscr{A}(h_0) = A(h_0)$.*

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ это было доказано А. А. Тарасовым [7] для любого регулярного $h_0 \in \mathfrak{h}$.

**2.** Докажем теорему 1. Заметим, что для любого $n$ множество $E_n \subset \mathfrak{h}$ таких $h_0 \in \mathfrak{h}$, что централизатор подпространства $Q(h_0)$ в $S^n(\mathfrak{g})$ относительно скобки Пуассона–Ли имеет размерность, большую $\dim A(h_0) \cap S^n(\mathfrak{g})$ (т.е. строго содержит пространство $A(h_0) \cap S^n(\mathfrak{g})$), замкнуто по Зарисскому в $\mathfrak{h}$. Поэтому достаточно доказать, что $E_n \neq \mathfrak{h}$ для любого $n$. Иначе говоря, достаточно доказать *существование* $h_0 \in \mathfrak{h}$, удовлетворяющего условию теоремы.

Лемма 1. *Существуют такие $h_0, h \in \mathfrak{h}$, что числа $\frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)}$ $(\alpha \in \Delta_+)$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Выберем $h_0$ так, чтобы для простых корней $\alpha_i$ значения $\alpha_i(h_0)$ были алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. Так как никакие два положительных корня не пропорциональны, то числа $\frac{1}{\alpha(h_0)}$, $\alpha \in \Delta_+$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Выберем $h$ так, чтобы значения $\alpha(h)$ были ненулевыми рациональными числами. Тогда числа $\frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)}$, $\alpha \in \Delta_+$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

---

Работа выполнена при поддержке фонда CRDF (грант RM1-2543).

Выберем элемент $\gamma \in \mathfrak{g}^*$ такой, что $\gamma(h_{\alpha_i}) = 1$ для простых корней $\alpha_i$ и $\gamma(e_\alpha) = 0$ для $\alpha \in \Delta$. Зададим скобку Пуассона $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}_\gamma$ на $S(\mathfrak{g})$ следующим образом: для образующих $x, y \in \mathfrak{g}$ положим $\{x,y\}_\gamma = \gamma([x,y])$. При любом $t \in \mathbb{C}$ линейная комбинация $t\{\,\cdot\,,\cdot\,\} + (1-t)\{\,\cdot\,,\cdot\,\}_\gamma$ является скобкой Пуассона на $S(\mathfrak{g})$, причем для $t \neq 0$ соответствующие алгебры Пуассона изоморфны. А именно, пусть $S(\mathfrak{g})_t$ – алгебра $S(\mathfrak{g})$ со скобкой Пуассона $t\{\,\cdot\,,\cdot\,\}+(1-t)\{\,\cdot\,,\cdot\,\}_\gamma$; тогда при $t \neq 0$ изоморфизм $\psi_t\colon S(\mathfrak{g})_1 \to S(\mathfrak{g})_t$ задается на образующих $x \in \mathfrak{g}$ следующим образом: $\psi_t(x) = t^{-1}x + t^{-2}(1-t)\gamma(x)$. Очевидно, что $\psi_t(Q(h_0)) = Q(h_0)$.

Лемма 2. *Для некоторого $h_0 \in \mathfrak{h}$ централизатор пространства $Q(h_0)$ в $S(\mathfrak{g})_0$ имеет степень трансцендентности не больше $\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \operatorname{rk}\mathfrak{g})$.*

Доказательство. Выберем $h_0$ и $h$ как в лемме 1 и положим $q = \sum_{\alpha\in\Delta_+} \frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)} e_\alpha e_{-\alpha} \in Q(h_0)$. Для любого $f \in S(\mathfrak{g})$ имеем $\{q,f\}_\gamma = \sum_{\alpha\in\Delta_+} \gamma(h_\alpha)\frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)}\bigl(e_{-\alpha}\frac{\partial f}{\partial e_{-\alpha}} - e_\alpha\frac{\partial f}{\partial e_\alpha}\bigr)$. В частности,

$$\Bigl\{q, \prod_{i=1}^{l} h_{\alpha_i}^{m_i} \prod_{\alpha\in\Delta_+} e_\alpha^{n_\alpha} e_{-\alpha}^{n_{-\alpha}}\Bigr\}_\gamma = \sum_{\alpha\in\Delta_+} \gamma(h_\alpha)\frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)}(n_{-\alpha} - n_\alpha) \prod_{i=1}^{l} h_{\alpha_i}^{m_i} \prod_{\alpha\in\Delta_+} e_\alpha^{n_\alpha} e_{-\alpha}^{n_{-\alpha}}. \tag{1}$$

Для каждого $\alpha = \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i \in \Delta_+$ имеем $\gamma(h_\alpha) = \sum_{i=1}^{l} m_i \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Так как числа $\frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то правая часть равенства (1) равна нулю тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \Delta_+$ выполнено $n_\alpha - n_{-\alpha} = 0$. Это значит, что централизатор элемента $q$ в $S(\mathfrak{g})_0$ состоит из линейных комбинаций мономов, имеющих равную степень по $e_\alpha$ и $e_{-\alpha}$ для любого $\alpha \in \Delta_+$, т.е. порожден элементами $h_{\alpha_i}$ и $e_\alpha e_{-\alpha}$ ($\alpha \in \Delta_+$), и, следовательно, имеет степень трасцендентности $\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \operatorname{rk}\mathfrak{g})$.

Из леммы 2 следует, что централизатор пространства $Q(h_0)$ в $S(\mathfrak{g})_t$ имеет степень трансцендентности не больше $\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \operatorname{rk}\mathfrak{g})$ при общем $t$, а значит, и при любом $t$, так как при $t \neq 0$ пуассоновы алгебры $S(\mathfrak{g})_t$ изоморфны. Пусть $Z \subset S(\mathfrak{g})$ – централизатор пространства $Q(h_0)$ в $S(\mathfrak{g})_1$. Поскольку $\operatorname{tr}\deg(Z) \leqslant \operatorname{tr}\deg(A(h_0))$ и $A(h_0) \subset Z$, любой элемент алгебры $Z$ алгебраичен над $A(h_0)$. Следовательно, так как алгебра $A(h_0)$ коммутативна относительно скобки Пуассона–Ли, алгебра $Z$ также коммутативна (см., например, [8; лемма 1]). Но $A(h_0)$ – *максимальная* коммутативная подалгебра в $S(\mathfrak{g})$, поэтому $Z = A(h_0)$. Теорема 1 доказана.

**3.** Докажем теорему 2. В [3] доказано, что пространство $A(h_0)^{(2)} = \mathbb{C}+\mathfrak{h}+S^2(\mathfrak{h})+Q(h_0)$ может быть поднято до коммутативного подпространства $\mathscr{A}(h_0)^{(2)} \subset U(\mathfrak{g})^{(2)}$ единственным способом (при помощи отображения симметризации). Из теоремы 1 следует, что при общем $h_0$ любое поднятие $\mathscr{A}(h_0) \subset U(\mathfrak{g})$ алгебры $A(h_0)$ есть централизатор пространства $\mathscr{A}(h_0)^{(2)}$ в алгебре $U(\mathfrak{g})$. Теорема 2 доказана.

Я благодарю Э. Б. Винберга за внимание к работе и полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1979. Т. 19. С. 3–94. [**2**] А. А. Тарасов // УМН. 2002. Т. 57. № 5. С. 165–166. [**3**] Э. Б. Винберг // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 1. С. 3–25. [**4**] А. Т. Фоменко // Матем. сб. 1981. Т. 115. № 2. С. 263–280. [**5**] M. Nazarov, G. Olshanski // Comm. Math. Phys. 1996. V. 178. № 2. P. 433–506; arXiv: q-alg/9507003. [**6**] А. А. Тарасов // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 115–122. [**7**] А. А. Тарасов // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 7. С. 155–160. [**8**] Л. Г. Рыбников // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37. № 2. С. 41–51.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
*E-mail*: `leo_rybnikov@mtu-net.ru`

Представлено Э. Б. Винбергом
Принято редколлегией 25.01.2005