Математические заметки

Том 112 выпуск 5 ноябрь 2022

УДК 517.968

Канонический оператор на проколотых лагранжевых многообразиях и формула коммутации с псевдодифференциальными операторами: локальная теория

В. Е. Назайкинский

Канонический оператор Маслова на проколотых лагранжевых многообразиях доставляет решение задачи Коши с начальными данными, сосредоточенными вблизи точки или подмногообразия положительной коразмерности, для уравнений и систем волнового типа, у которых корни характеристического уравнения имеют особенности типа негладкости и/или пересечения кратностей при нулевых значениях импульсов. Теория канонического оператора на проколотых лагранжевых многообразиях была построена в статье С. Ю. Доброхотова, А. И. Шафаревича и автора [1], в которой, однако, не была приведена формула коммутации канонического оператора с псевдодифференциальными операторами. Эта формула доказывается в настоящей статье; кроме того, конструкция канонического оператора на проколотых лагранжевых многообразиях излагается в эквивалентном более удобном виде. Мы ограничиваемся локальной теорией (предканонический оператор, или оператор в отдельной карте лагранжева многообразия, отвечающей некоторой невырожденной фазовой функции), так как переход к глобальной конструкции не содержит ничего нового по сравнению со стандартным случаем.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: проколотое лагранжево многообразие, канонический оператор Маслова, уравнение волнового типа, локализованные начальные данные, пересечение кратностей при нулевых значениях импульсов.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13672

Моему дорогому учителю
Виктору Павловичу Маслову

Введение

Данная статья является продолжением работы [1], в которой можно найти более подробные сведения об истории вопроса и мотивировки.

Для многих линейных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений и систем, описывающих распространение волн, эффективные гамильтонианы –

Работа выполнена в ИПМех РАН по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690131-7).

корни характеристического уравнения – имеют особенности типа негладкости и/или пересечения кратностей при нулевых значениях импульсов p. Типичным примером могут служить волновое уравнение или системы уравнений первого порядка, гиперболические по Петровскому, где эффективные гамильтонианы суть однородные функции первой степени от импульсов, или линеаризованное уравнение волн на воде с учетом дисперсии, в котором эффективные гамильтонианы при малых p отличаются от однородных функций первой степени на $O(p^2)$. Важный класс задач для таких уравнений и систем составляют задачи Коши с начальными данными, локализованными вблизи подмногообразий положительной коразмерности (размер области локализации определяется малым параметром $\mu > 0$). Такие начальные данные представляются каноническим оператором Маслова [2], [3] на конормальных расслоениях к указанным многообразиям, и если строить асимптотическое решение задачи Коши по стандартной схеме в виде канонического оператора на лагранжевых многообразиях, получающихся из этих конормальных расслоений сдвигом по траекториям систем Гамильтона, отвечающих эффективным гамильтонианам, то обнаруживается, что сдвинутые многообразия имеют разрывы при $p = 0$. Эти разрывы были бы совершенно несущественны, если бы речь шла о построении асимптотики по гладкости [2], [4], [5], где выжны только большие $|p|$. Напротив, при построении асимптотик по малому параметру все конечные p нужно принимать во внимание, и возникает вопрос о построении канонического оператора на этих многообразиях с разрывами. В частных случаях решения этого вопроса удалось избежать [6], [7], но построенные там асимптотики имеют весьма сложный и неудобный вид. Интересующий нас класс лагранжевых многообразий с разрывами получил название *проколотых лагранжевых многообразий* в работах [8], [9], а теория канонического оператора на таких многообразиях в общем случае была развита в [1] (см. также обзор [10]). Однако в указанных работах не была доказана формула коммутации канонического оператора с псевдодифференциальными операторами. Это сделано в настоящей статье. Кроме того, конструкция канонического оператора на проколотых лагранжевых многообразиях излагается в эквивалентном, более удобном виде. Мы ограничиваемся локальной теорией (предканонический оператор, или оператор в отдельной карте лагранжева многообразия, отвечающей некоторой невырожденной фазовой функции), так как переход к глобальной конструкции не содержит ничего нового по сравнению со стандартным случаем [1]. Так как глобальная теория не затрагивается, в дальнейшем приставку “пред-” опускаем.

Неформально говоря, суть теории канонического оператора Маслова на проколотых лагранжевых многообразиях заключается в следующем. Класс проколотых лагранжевых многообразий включат в себя конические ($\mathbb{R}_+$-однородные) лагранжевы многообразия в $T_0^*\mathbb{R}^n$ и многообразия, отличающиеся при малых p от однородных на $O(p^2)$. Таким образом, эти многообразия имеют на нулевом сечении особенность весьма специального вида. Решая задачу, в которой возникает проколотое лагранжево многообразие, напишем для канонического оператора на нем формальное выражение, действуя так, как если бы никакой особенности при $p = 0$ у многообразия вовсе не было. Это выражение представляет собой осциллирующий интеграл (или сумму осциллирующих интегралов) вида

$$\frac{e^{i\pi m/4}}{(2\pi\mu)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{(i/\mu)\Phi(x,\theta)} a(x,\theta)\, d\theta,$$

где $\Phi(x,\theta)$ вещественна, носитель $\operatorname{supp} a$ компактен, но функции $\Phi(x,\theta)$ и $a(x,\theta)$, вообще говоря, имеют в точках $\theta = 0$ (отвечающих нулевому сечению $\{p = 0\}$ в $T^*\mathbb{R}^n$) особенность; именно, при $\theta \to 0$ они асимптотически однородны[1]: $\Phi(x,\theta)$ – степени 1, а $a(x,\theta)$ – некоторой степени, зависящей от задачи. “Правильное” выражение для канонического оператора получается, если из области интегрирования удалить шар $\{|\xi| < \mu\}$ – больше ничего делать не нужно! Это по видимости незначительное действие приводит, однако, к интересным последствиям.

1. Заметим, что фазовую функцию можно записать в виде $\Phi(x,\theta) = |\theta|\Psi(x,\theta)$, где Ψ асимптотически однородна степени нуль. Таким образом, экспонента в интеграле имеет вид $e^{(|\theta|/\mu)\Psi(x,\theta)}$, и поэтому неудивительно, что “настоящим” малым параметром в асимптотических разложениях в подынтегральном выражении оказывается не μ, а $h = \mu/|\theta|$. Отметим, что это параметр отнюдь не мал на границе $\{|\theta| = \mu\}$ области интегрирования.

2. Соответственно, если не ограничиваться первым членом асимптотического разложения, то амплитуда a будет разлагаться по степеням именно этого параметра, а вовсе не μ:

$$a = a\left(x, \theta, \frac{\mu}{|\theta|}\right) = a_0(x,\theta) + a_1(x,\theta)\frac{\mu}{|\theta|} + a_2(x,\theta)\frac{\mu^2}{|\theta|^2} + \cdots ,$$

где все $a_j(x,\theta)$ асимптотически однородны одной и той же степени.

3. В теории обычного канонического оператора асимптотические разложения можно строить с любой наперед заданной точностью по степеням малого параметра μ. Для канонического оператора на проколотых лагранжевых многообразиях наличие все возрастающих степеней “полярного радиуса” $|\theta|$ в знаменателях последовательных членов асимптотического разложения подынтегрального выражения приводит к тому, что существует некоторая возможная точность, которую нельзя улучшить, сколько бы членов асимптотического разложения ни взять (ибо при интегрировании по θ возникают отрицательные степени μ, компенсирующие избыточные степени μ в числителе). Эта точность составляет $O(\mu^{k/2})$, где k – коразмерность многообразия, на котором сосредоточены начальные данные.

4. После выхода на предельную точность дальнейшее увеличение числа членов асимптотического разложения приводит лишь к увеличению числа дифференцирований, которые асимптотическое разложение допускает с сохранением точности.

Некоторые обозначения и терминология. Мультипликативная группа положительных чисел обозначается через $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, а ее общий элемент, как правило, через λ. Если группа $\mathbb{R}_+$ действует на множестве A, то действие элемента $\lambda \in \mathbb{R}_+$ на элемент $a \in A$ обозначается через $\lambda \cdot a$ или $\lambda(a)$; обозначение λa используется в том случае, когда A – линейное пространство и элемент $\lambda \in \mathbb{R}_+$ действует как умножение на число λ. Мультипликативная полугруппа неотрицательных чисел обозначается через $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty)$.

Через $\mathbb{R}^m_*$ обозначается пространство $\mathbb{R}^m$ с выброшенным началом координат: $\mathbb{R}^m_* = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Нижний индекс используется также, чтобы указать обозначение стандартных координат на пространстве: так, $\mathbb{R}^n_x$ – это арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $x = (x_1,\dots,x_n)$, а $\mathbb{R}^m_{*\theta}$ – это пространство $\mathbb{R}^m_*$ с координатами $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_m)$, $|\theta| = (\theta_1^2 + \cdots + \theta_m^2)^{1/2} \neq 0$.

[1]В дальнейшем это свойство называем псевдооднородностью, чтобы не путать с асимптотической однородностью на бесконечности.

Через $T^*\mathbb{R}^n$ обозначается кокасательное пространство пространства $\mathbb{R}^n_x$: $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}_{(x,p)} = \mathbb{R}^n_x \oplus \mathbb{R}^n_p$ – $2n$-мерное арифметическое пространство с координатами $(x,p) = (x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_n)$. Далее, $T^*_0\mathbb{R}^n$ – это кокасательное пространство $T^*\mathbb{R}^n$ с выброшенными *нулевым сечением* $\{\mathbf{0}\} = \{(x,p)\in T^*\mathbb{R}^n \mid p=0\}$, т.е. $T^*_0\mathbb{R}^n = T^*\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Стандартная симплектическая структура на пространстве $T^*\mathbb{R}^n$ обозначается через $\omega^2 = dp\wedge dx = dp_1\wedge dx_1 + \dots + dp_n \wedge dx_n$, а фундаментальная 1-форма – через $\omega^1 = p\,dx = p_1\,dx_1 + \dots + p_n\,dx_n$.

Определим пространство быстроосциллирующих функций

$$H^\infty_\mu(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{s=0}^{\infty} H^s_\mu(\mathbb{R}^n),$$

где $H^s_\mu(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций $u(x,\mu)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\mu\in(0,1)$, с конечной нормой

$$\|u\|_s = \sup_{\mu\in(0,1)} \|(1-\mu^2\Delta)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

(здесь Δ – оператор Лапласа).

1. $\mathbb{R}_+$-многообразия и однородные функции

1.1. $\mathbb{R}_+$-многообразия и конические множества. $\mathbb{R}_+$-*многообразием* (или *коническим многообразием*) будем называть гладкое многообразие W без края, на котором задано свободное действие $(\lambda,w)\mapsto\lambda\cdot w$ группы $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$. Простейшими примерами могут служить пространство $\mathbb{R}^m_*$ с действием $\lambda\cdot\theta = \lambda\theta$ и *кокасательное расслоение* $T^*_0\mathbb{R}^n$ *с действием* $\lambda\cdot(x,p) = (x,\lambda p)$ (они используются в дальнейшем).

Коническим (*под*)*множеством* будем называть подмножество $\mathbb{R}_+$-многообразия, инвариантное относительно действия группы $\mathbb{R}_+$ (короче говоря, $\mathbb{R}_+$-инвариантное подмножество).

1.2. Сечения, факторизация и раздутие $\mathbb{R}_+$-многообразия. Пусть W – $\mathbb{R}_+$-многообразие, $\pi_W\colon W\to W/\mathbb{R}_+$ – естественная проекция на пространство орбит. Выбрав произвольное гладкое сечение $s\colon W/\mathbb{R}_+\to W$, можно построить $\mathbb{R}_+$-эквивариантный диффеоморфизм

$$W/\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to W, \qquad (\omega,\rho)\longmapsto\rho\cdot s(\omega), \tag{1.1}$$

т.е. *факторизацию* $W\simeq W/\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, причем на первом сомножителе группа $\mathbb{R}_+$ действует тривиально, а на втором – умножениями. Так, $\mathbb{R}^m_*\simeq\mathbb{S}^{m-1}_\omega\times\mathbb{R}_{+\rho}$; по аналогии с этим примером переменные (ω,ρ) в (1.1) назовем *полярными координатами*.

Раздутием[2] $\mathbb{R}_+$-многообразия W назовем многообразие с краем $\widehat{W} = W/\mathbb{R}_+\times\overline{\mathbb{R}}_+$; на нем гладко действует полугруппа $\overline{\mathbb{R}}_+$, причем край $\partial\widehat{W} = W/\mathbb{R}_+\times\{0\}$ состоит из неподвижных точек этого действия. Например, $\widehat{T^*_0\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n_x\times\mathbb{S}^{n-1}_\omega\times\overline{\mathbb{R}}_{+\rho}$. Зафиксировав изоморфизм (1.1), получим вложение[3] многообразия W в $\widehat{W}$ как внутренности последнего: $W\sim\widehat{W}\setminus\partial\widehat{W}$. Поэтому $\partial\widehat{W}$ будем также обозначать через ∂W.

[2] Не путать с раздутием в алгебраической геометрии.

[3] При выборе другого сечения $\widetilde{s}$ соответствующее вложение $W\subset\widehat{W}$ также будет другим, на каждой орбите $\pi_W^{-1}(\omega)$ оно отличается от первого на действие элемента $\lambda\in\mathbb{R}_+$, такого, что $\widetilde{s}(\omega) = \lambda\cdot s(\omega)$.

1.3. Однородные функции. Гладкая функция f на $\mathbb{R}_+$-многообразии W называется *однородной степени* $s \in \mathbb{R}$, если $f(\lambda \cdot w) = \lambda^s f(w)$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $w \in W$. В этом случае мы пишем $\operatorname{ord} f = s$. В полярных координатах такая функция может быть записана в виде $f(\omega, \rho) = \rho^s g(\omega)$, где g – гладкая функция.

2. Полуконические многообразия и псевдооднородные функции

2.1. Полуконические множества. Подмножество $V \subset W$ $\mathbb{R}_+$-многообразия W будем называть *полуконическим*[4], если $\lambda \cdot V \subset V$ для всех $\lambda \leqslant 1$. Через $V_\infty \subset W$ обозначим наименьшее коническое множество, содержащее V. Очевидно, $V_\infty = \mathbb{R}_+ \cdot V$.

2.2. Раздутия. Если полуконическое множество $V \subset W$ является подмногообразием (без края), то определим его *раздутие* $\widehat{V} \subset \widehat{W}$ как объединение $\widehat{V} = V \cup 0 \cdot V$. Очевидно, $\widehat{V}$ – многообразие с краем $\partial \widehat{V} = 0 \cdot V$, причем конструкция не зависит от выбора многообразия W (в частности, в качестве W можно взять V_∞).

2.3. Псевдооднородные функции и предельные однородные функции. Будем писать $g = O(\lambda^s)$ для гладкой функции $g \in C^\infty(V)$ на полуконическом многообразии V, если для любого дифференциального оператора D на V_∞, коммутирующего с индуцированным действием группы $\mathbb{R}_+$ на функциях, справедлива оценка

$$|(Dg)(\lambda v)| \leqslant C_{K,D} \lambda^s \qquad \text{при } \lambda \leqslant 1 \text{ и } v \in K \text{ для произвольного } K \Subset V.$$

Определение 1. Функцию f на полуконическом многообразии V назовем *псевдооднородной степени* $s \in \mathbb{R}$, если для любого $N = 1, 2, \dots$ имеет место разложение

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} f_j + O(\lambda^{s+N}),$$

где $f_j \in C^\infty(V_\infty)$ – гладкие однородные функции, $\operatorname{ord} f_j = s + j$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Функцию f_0 назовем *главной* (или *главной однородной*) *частью* функции f.

Псевдооднородную функцию степени s можно считать и псевдооднородной степени $s - k$ для любого целого $k > 0$; тогда ее главная часть заведомо будет нулевой.

2.4. Псевдооднородные функции в полярных координатах. В полярных координатах (ω, ρ) псевдооднородная функция f степени s на V записывается в виде $f(\omega, \rho) = \rho^s f_1(\omega, \rho)$, где f_1 – гладкая функция на $\widehat{V}$. В частности, при целом неотрицательном s и сама функция f продолжается до гладкой функции на $\widehat{V}$.

3. Проколотые лагранжевы многообразия в $T^*\mathbb{R}^n$

3.1. Конические лагранжевы многообразия. Следуя Хёрмандеру [4], *коническим лагранжевым многообразием* в $T_0^*\mathbb{R}^n$ назовем лагранжево многообразие, инвариантное относительно действия группы $\mathbb{R}_+$. Заметим сразу же, что для нас основной интерес представляет окрестность нулевого сечения $\{\mathbf{0}\} \subset T^*\mathbb{R}^n$, в то время как в теории Хёрмандера она не играет практически никакой роли.

[4]Альтернативное определение полуконического множества, не использующее объемлющее многообразие W, можно, например, сформулировать так: V – топологическое пространство, снабженное локальным действием группы $\mathbb{R}_+$, причем для любого $v \in V$ множество элементов $\lambda \in \mathbb{R}_+$, для которых действие $\lambda \cdot v$ определено, содержит интервал $(0, 1]$.

3.2. Основное определение. Рассмотрим (погруженное) лагранжево многообразие $\jmath\colon \Lambda \to T^*\mathbb{R}^n$, заданное гладкими функциями $x = X(\alpha)$, $p = P(\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) образ отображения $\jmath$ содержится в $T_0^*\mathbb{R}^n$ (т.е. $P(\alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in \Lambda$);
2) для некоторой трубчатой окрестности U нулевого сечения $\{\mathbf{0}\} \subset T^*\mathbb{R}^n$ на множестве $\Lambda^U = \jmath^{-1}(U)$ существует такая структура полуконического многообразия, что функции $X(\alpha)$ псевдооднородны степени нуль, а функции $P(\alpha)$ псевдооднородны степени один;
3) главные однородные части $(X_0(\alpha), P_0(\alpha))$, $\alpha \in \Lambda_0 := \Lambda_\infty^U$, этих функций задают коническое лагранжево многообразие $\jmath_0\colon \Lambda_0 \to T_0^*\mathbb{R}^n$.

Определение 2. При выполнении указанных условий $\jmath\colon \Lambda \to T^*\mathbb{R}^n$ называется *проколотым лагранжевым многообразием*, а $\jmath_0\colon \Lambda_0 \to T_0^*\mathbb{R}^n$ – его *предельным коническим лагранжевым многообразием.*

В дальнейшем мы опускаем верхний индекс у Λ^U, как если бы структура полуконического многообразия была задана на всем Λ; это не приведет к путанице.

3.3. Соотношение с прежним определением. Продолжая функции $(X(\alpha)$, $P(\alpha))$, задающие отображение $\jmath$, до гладких функций на раздутии $\widehat{\Lambda}$ в соответствии со сказанным в п. 2.4, получаем гладкое отображение $\widehat{\jmath}\colon \widehat{\Lambda} \to T^*\mathbb{R}^n$, продолжающее отображение $\jmath$.

Предложение 1. *Отображение $\widehat{\jmath}$ является проколотым лагранжевым многообразием в смысле* [1; определение 2.2.1]. *Обратно, если $\imath\colon L \to T^*\mathbb{R}^n$ – проколотое лагранжево многообразие в смысле* [1; определение 2.2.1], *то сужение $\jmath = \imath|_\Lambda$ отображения $\imath$ на внутренность $\Lambda = L \setminus \partial L$ многообразия L является проколотым лагранжевым многообразием в смысле определения* 2.

Доказательство проводится непосредственным вычислением.

4. Невырожденные псевдооднородные фазовые функции

4.1. Основное определение. Пусть $\Phi(x, \theta)$ – невырожденная фазовая функция в некоторой области $V \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_{*\theta}^m$, $m > 0$ [11], т.е. гладкая вещественная функция, такая, что на множестве

$$\Lambda_\Phi = \{(x, \theta) \in V \mid \Phi_\theta(x, \theta) = 0\} \tag{4.1}$$

дифференциалы $d(\Phi_{\theta_1}), \dots, d(\Phi_{\theta_m})$ линейно независимы, т.е. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Phi_{\theta\theta} & \Phi_{\theta x}\end{pmatrix} = m$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) область V – полуконическая относительно действия $\lambda \cdot (x, \theta) = (x, \lambda\theta)$ группы $\mathbb{R}_+$ и ограниченная, а функция $\Phi(x, \theta)$ псевдооднородна степени 1;
2) ее главная часть $\Phi_0(x, \theta)$ также является невырожденной фазовой функцией;
3) $\Phi_x(x, \theta) \neq 0$ при всех $(x, \theta) \in V$.

Определение 3. При выполнении указанных условий функция $\Phi(x, \theta)$ называется *невырожденной псевдооднородной фазовой функцией.*

Замечание 1. При условии 2 условие 3 выполнено для достаточно малых $|\theta|$.

4.2. Соотношение с прежним определением. В соответствии с п. 2.4 псевдооднородная степени 1 функция $\Phi(x,\theta)$ на V продолжается до гладкой функции на $\widehat{V}$. Продолжение, записанное в полярных координатах (x,ω,ρ), $\omega\in\mathbb{S}^{m-1}$, $\rho\in\overline{\mathbb{R}}_+$, $\theta=\omega\rho$, обозначим через $\widehat{\Phi}(x,\omega,\rho)=\Phi(x,\omega\rho)$.

Предложение 2. *Функция $\Phi(x,\theta)$ является невырожденной псевдооднородной фазовой функцией в смысле определения 3 тогда и только тогда, когда $\widehat{\Phi}(x,\omega,\rho)$ – невырожденная фазовая функция в смысле* [1; определение 3.3.1].

Доказательство. Под ω будем понимать не только точку на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ но и, при необходимости, некоторый набор $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_{m-1})$ локальных координат на ней же. Функцию $\widehat{\Phi}$ можно записать в виде $\widehat{\Phi}(x,\omega,\rho)=\rho\Psi(x,\omega,\rho)$, где $\Psi(x,\omega,\rho)$ – также гладкая вещественная функция. Главная однородная часть функции Φ имеет вид $\Phi_0(x,\omega,\rho)=\rho\Psi(x,\omega,0)$. Множество $\widehat{\Lambda}_\Phi$ задается уравнениями

$$\widehat{\Lambda}_\Phi=\{(x,\omega,\rho)\in\widehat{V}\mid \Psi_\omega(x,\omega,\rho)=0,\widehat{\Phi}_\rho(x,\omega,\rho)=0\}.$$

Условие невырожденности функции Φ имеет в этих координатах вид

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Phi_{\omega\omega} & \Phi_{\omega\rho} & \Phi_{\omega x}\\ \Phi_{\rho\omega} & \Phi_{\rho\rho} & \Phi_{\rho x}\end{pmatrix}=m \qquad \text{при} \quad (x,\omega,\rho)\in\Lambda_\Phi,$$

что можно также записать в виде

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\widehat{\Phi}_{\omega\omega} & \widehat{\Phi}_{\omega\rho} & \widehat{\Phi}_{\omega x}\\ \widehat{\Phi}_{\rho\omega} & \widehat{\Phi}_{\rho\rho} & \widehat{\Phi}_{\rho x}\end{pmatrix}=m \qquad \text{при} \quad (x,\omega,\rho)\in\widehat{\Lambda}_\Phi, \quad \rho>0. \tag{4.2}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Lambda_{\Phi_0}&=\{(x,\omega,\rho)\in V_\infty\mid \Phi_{0\omega}(x,\omega,\rho)=0,\ \Phi_{0\rho}(x,\omega,\rho)=0\}\\ &=\{(x,\omega,\rho)\in V_\infty\mid \Psi_\omega(x,\omega,0)=0,\ \Psi(x,\omega,0)=0\},\end{aligned}$$

а условие невырожденности функции Φ_0 имеет вид

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Phi_{0\omega\omega} & \Phi_{0\omega\rho} & \Phi_{0\omega x}\\ \Phi_{0\rho\omega} & \Phi_{0\rho\rho} & \Phi_{0\rho x}\end{pmatrix}=m \qquad \text{при} \quad (x,\omega,\rho)\in\Lambda_{\Phi_0}.$$

Заметим, что на Λ_{Φ_0} имеют место равенства

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\Phi_{0\omega\omega} & \Phi_{0\omega\rho} & \Phi_{0\omega x}\\ \Phi_{0\rho\omega} & \Phi_{0\rho\rho} & \Phi_{0\rho x}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\rho\Psi_{\omega\omega}(x,\omega,0) & \Psi_\omega(x,\omega,0) & \rho\Psi_{\omega x}(x,\omega,0)\\ \Psi_\omega(x,\omega,0) & \dfrac{\partial}{\partial\rho}\Psi(x,\omega,0) & \Psi_x(x,\omega,0)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\rho\Psi_{\omega\omega}(x,\omega,0) & 0 & \rho\Psi_{\omega x}(x,\omega,0)\\ 0 & 0 & \Psi_x(x,\omega,0)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

так что условие невырожденности функции Φ_0 можно переписать в виде

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\Psi_{\omega\omega}(x,\omega,\rho) & \Psi_{\omega x}(x,\omega,\rho)\\ 0 & \Psi_x(x,\omega,\rho)\end{pmatrix}=m \qquad \text{при} \quad (x,\omega,\rho)\in\widehat{\Lambda}_\Phi, \quad \rho=0. \tag{4.3}$$

Условие 3 определения 3 совпадает с условием (3.11) (i) в [1; определение 3.3.1], а условия (4.2) и (4.3) – с условиями (3.11) (ii) и (iii) соответственно там же. Предложение доказано.

4.3. Специальные координаты в окрестности множества Λ_Φ. Для краткости обозначим множество Λ_Φ через Λ, а множество

$$\Lambda_{\Phi_0} = \{(x,\theta) \in V_\infty \mid \Phi_{0\theta}(x,\theta) = 0\}, \tag{4.4}$$

отвечающее главной однородной части Φ_0 функции Φ – через Λ_0. Будем вести рассуждения во введенных выше полярных координатах (x,ω,ρ). В этих координатах функции $\Phi_{0\theta}$ имеют вид $\Phi_{0\theta}(x,\omega)$ (как однородные функции степени нуль) и потому дифференциалы их сужения на подмногообразие $\widetilde{V}_\infty = V_\infty \cap \{\rho = 1\}$ линейно независимы в точках множества $\widetilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0 \cap \{\rho = 1\}$. Таким образом, $\widetilde{\Lambda}_0$ – гладкое подмногообразие коразмерности m в $\widetilde{V}_\infty$, и некоторая его трубчатая окрестность $\widetilde{U} \subset \widetilde{V}_\infty$ расслаивается над $\widetilde{\Lambda}_0$ со слоем, диффеоморфным m-мерному диску: $\widetilde{\pi}_0 \colon \widetilde{U} \to \widetilde{\Lambda}_0$. Уменьшая эту трубчатую окрестность и при необходимости само множество V, можно считать, что координатами в каждом слое служат переменные $u = \Phi_{0\theta}$, пробегающие шар $B = \{u \in \mathbb{R}^m \mid |u| < \varepsilon\}$ некоторого радиуса ε. Распространяя эту конструкцию на все значения $\rho \in \mathbb{R}_+$ по однородности, получаем $\mathbb{R}_+$-эквивариантное расслоение $\pi_0 \colon U \to \Lambda_0$ некоторой конической трубчатой окрестности $U \subset V_\infty$ многообразия Λ_0 над Λ_0 и диффеоморфизм

$$U \ni (x,\omega,\rho) \mapsto (\alpha,\rho,u) \in \widetilde{\Lambda}_0 \times \mathbb{R}_+ \times B, \qquad \alpha = \pi_0(x,\omega), \quad u = \Phi_{0\theta}(x,\omega), \quad \rho = \rho,$$

такой, что в координатах (α,ρ,u) на U действие группы $\mathbb{R}_+$ и проекция π_0 задаются формулами

$$\lambda \cdot (\alpha,\rho,u) = (\alpha,\lambda\rho,u), \qquad \pi_0(\alpha,\rho,u) = (\alpha,\rho).$$

Далее, градиент Φ_θ в координатах (α,ρ,u) (при $\rho < R$ для достаточно малого $R > 0$, так что соответствующая точка лежит в V) имеет вид

$$\Phi_\theta(\alpha,\rho,u) = u + \rho\Psi(\alpha,\rho,u), \quad \Psi \in C^\infty(\widehat{\Lambda}_0^R \times B), \qquad \widehat{\Lambda}_0^R = \widehat{\Lambda}_0 \cap \{\rho < R\}.$$

По теореме о неявной функции, быть может, для меньшего R, задающая Λ система уравнений $\Phi_\theta(\alpha,\rho,u) = 0$ имеет относительно u решение вида

$$u = \rho g(\alpha,\rho), \qquad g \in C^\infty(\widehat{\Lambda}_0^R). \tag{4.5}$$

Уравнения (4.5) суть уравнения многообразия Λ в координатах (α,ρ,u) (при достаточно малых ρ). Можно сказать, что оно параметризовано точками многообразия $\Lambda_0^R = \Lambda_0 \cap \{\rho < R\}$. Введем в $U^R = U \cap \{\rho < R\}$ новые координаты (α,ρ,v), где $v = u - \rho g(\alpha,\rho)$; в этих координатах Λ задается уравнениями $v = 0$. При необходимости уменьшая R и заменяя U^R на меньшую трубчатую окрестность многообразия Λ^R, определим на U^R новую структуру полуконического множества, задавая новое действие группы $\mathbb{R}_+$ в новых координатах формулой $\lambda \cdot (\alpha,\rho,v) = (\alpha,\lambda\rho,v)$. Это действие задается псевдооднородными (относительно исходного действия) функциями, главные части которых совпадают с функциями, задающими исходное действие группы $\mathbb{R}_+$; поэтому множества псевдооднородных функции любой заданной степени относительно старого и нового действия одни и те же, а главная однородная часть любой заданной псевдооднородной функции при переходе от одного действия к другому не меняется. Относительно нового действия Λ^R является полуконическим подмногообразием.

5. Фазовые функции и лагранжевы многообразия

5.1. Лагранжево многообразие, отвечающее фазовой функции. Пусть $\Phi(x,\theta)$ – невырожденная псевдооднородная фазовая функция, а $\Phi_0(x,\theta)$ – ее главная однородная часть. По-прежнему обозначая Λ_Φ через Λ, а Λ_{Φ_0} через Λ_0, рассмотрим соответствующие лагранжевы многообразия

$$\begin{aligned} &\jmath\colon\ \Lambda\to T^*\mathbb{R}^n, &&(x,\theta)\mapsto(x,\Phi_x),\\ &\jmath_0\colon \Lambda_0\to T^*_0\mathbb{R}^n, &&(x,\theta)\mapsto(x,\Phi_{0x}). \end{aligned}$$

Теорема 1. *Отображение $\jmath$ является проколотым лагранжевым многообразием, а отображение $\jmath_0$ – соответствующим предельным коническим лагранжевым многообразием.*

Доказательство. Эта теорема эквивалентна [1; предложение 3.3.2 (a)] в силу предложений 1 и 2. Отметим, что при проверке п. 2 определения проколотого лагранжева многообразия используется действие группы $\mathbb{R}_+$ на части Λ^R многообразия Λ, введенное в предыдущем пункте.

5.2. Фазовая функция, отвечающая лагранжеву многообразию. Сформулируем обратное утверждение.

Теорема 2. *Произвольное проколотое лагранжево многообразие в $T^*\mathbb{R}^n$ может быть задано в окрестности произвольной точки нулевого сечения $\{\mathbf{0}\}$ с помощью невырожденной псевдооднородной фазовой функции.*

Доказательство. Эта теорема эквивалентна [1; предложение 3.3.2 (b)] в силу предложений 1 и 2.

6. Осциллирующие интегралы

Пусть задана невырожденная псевдооднородная фазовая функция $\Phi(x,\theta)$ в ограниченной полуконической области $V\subset\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^m_{*\theta}$. Для некоторых специальных классов амплитуд a в области V мы определим осциллирующие интегралы $I[\Phi,a]$ с фазовой функцией Φ и амплитудой a.

6.1. Классы амплитуд. Через $\mathscr{O}^s(V)$ обозначим пространство псевдооднородных функций степени s на V, а через $\mathscr{O}^s_0(V)\subset\mathscr{O}^s(V)$ – подпространство функций a, таких, что замыкание в $\widehat{V}$ множества $\operatorname{supp}a\subset V$ компактно (такие функции будем называть финитными). Будем рассматривать амплитуды из $\mathscr{O}^s_0(V)$, а также более общие амплитуды, задаваемые формальными рядами вида

$$a(x,\theta,\mu)=\sum_{j=0}^\infty a_j(x,\theta)\mu^j,\qquad a_j\in\mathscr{O}^{s-j}_0(V),\qquad \overline{\bigcup_{j=0}^\infty\operatorname{supp}a_j}\ \text{компактно},\tag{6.1}$$

по степеням малого параметра $\mu>0$. Пространство таких рядов будет обозначаться через $\mathscr{O}^s_0(V,\mu)$. Отметим, что $\mu\mathscr{O}^{s-1}_0(V,\mu)\subset\mathscr{O}^s_0(V,\mu)$ есть в точности подпространство рядов вида (6.1) с нулевым главным членом (т.е. с $a_0(x,\theta)\equiv0$).

6.2. Осциллирующие интегралы коразмерности k. Пусть $k>0$ – заданное число, которое мы будем называть *коразмерностью*. Положим $s=(k-m)/2$ и для произвольной функции $a \in \mathscr{O}_0^s(V)$ определим *осциллирующий интеграл*

$$I[\Phi, a](x, \mu) = \frac{e^{i\pi m/4}}{(2\pi\mu)^{m/2}} \int_{|\theta| \geqslant c\mu} e^{(i/\mu)\Phi(x,\theta)} a(x, \theta)\, d\theta, \tag{6.2}$$

где $d\theta = d\theta_1 \dots d\theta_m$, а $c > 0$ – произвольным образом зафиксированная постоянная.

Замечание 2. В [1] осциллирующие интегралы записывались в другом виде, котором получается, если в (6.2) перейти к полярным координатам (x, ρ, θ), при этом степень однородности псевдооднородной амплитуды, естественно, увеличивается на $m - 1$. Можно записывать осциллирующие интегралы и в инвариантном виде, требуя при этом, чтобы условию псевдооднородности степени $(k + m)/2$ удовлетворяла дифференциальная m-форма $a(x, \theta)\, d\theta$, но мы воздерживаемся от такого подхода, так как описание области интегрирования становится значительно менее удобным.

Обозначим через $\widetilde{I}[\Phi, a]$ осциллирующий интеграл, полученный из (6.2) заменой постоянной c на другую постоянную $\widetilde{c} > 0$, и оценим разность $I[\Phi, a] - \widetilde{I}[\Phi, a]$ в пространстве $C(\mathbb{R}^n_x)$ непрерывных функций на $\mathbb{R}^n_x$ с sup-нормой $\|\cdot\|_C$ и пространстве $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ квадратично суммируемых функций с нормой $\|\cdot\|_{L^2}$.

Лемма 1. *Разность $f(x, \mu) = I[\Phi, a] - \widetilde{I}[\Phi, a]$ удовлетворяет оценкам*

$$\left\| \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta} \right\|_C, \left\| \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta} \right\|_{L^2} \leqslant C_\beta \mu^{k/2}, \qquad |\beta| = 0, 1, 2, \dots, \quad \textit{при } \mu \to 0. \tag{6.3}$$

Доказательство. Будем для определенности считать, что $\widetilde{c} > c$. Функция $a(x, \theta)$ и ее производные произвольного порядка по x удовлетворяют оценкам

$$\left| \frac{\partial^\beta a}{\partial x^\beta}(x, \theta) \right| \leqslant c_\beta |\theta|^{(k-m)/2}, \qquad |\beta| = 0, 1, 2, \dots .$$

Поскольку функция $\Phi(x, \theta)$ псевдооднородна степени 1, отсюда следует, что шаровом слое $\widetilde{c}\mu \geqslant |\theta| \geqslant c\mu$ подынтегральное выражение в (6.2) и его производные по x удовлетворяют аналогичным оценкам

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (e^{(i/\mu)\Phi(x,\theta)} a(x, \theta)) \right| \leqslant c_{1\beta} |\theta|^{(k-m)/2}, \qquad |\beta| = 0, 1, 2, \dots ,$$

а значит,

$$\left\| \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}(x, \mu) \right\| \leqslant \frac{c_{1\beta}}{(2\pi\mu)^{m/2}} \int_{\widetilde{c}\mu \geqslant |\theta| \geqslant c\mu} |\theta|^{(k-m)/2}\, d\theta \leqslant C_\beta \mu^{k/2}, \qquad |\beta| = 0, 1, 2, \dots ,$$

откуда следует необходимая оценка в sup-норме. Так как носитель функции $f(x, \mu)$ по x содержится компактном множестве – проекции на $\mathbb{R}^x_n$ компактного множества $\overline{\operatorname{supp} a}$ – не зависящем от μ, оценка в L^2-норме следует из оценки в sup-норме.

Пространство функций $f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, зависящих от малого параметра $\mu > 0$, таких, что на любом компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$ справедливы оценки (6.3) с постоянными C_β, зависящими, вообще говоря, от k, обозначим через $\mathcal{R}^{k/2} = \mathcal{R}^{k/2}(\mathbb{R}^n_x)$.

Рассмотрим теперь более сложный случай амплитуды из $a \in \mathscr{O}_0^s(V,\mu)$. Если ненулевых слагаемых в (6.1) конечное число, то осциллирующий интеграл $I[\Phi,a]$ можно определить как сумму слагаемых $I[\Phi,\mu^j a_j]$, каждое из которых определено формулой (6.2) с заменой a на $\mu^j a_j$. Как и в доказательстве леммы 1, нетрудно убедиться, что в каждом из этих слагаемых замена постоянной c на $\widetilde{c}$ приводит к изменению результата на функцию из $\mathcal{R}^{k/2}(\mathbb{R}^n_x)$ (т.е. "погрешность определения" не уменьшается с ростом j).

Для амплитуды $a \in \mathscr{O}_0^s(V,\mu)$, задаваемой бесконечным рядом (6.1), осциллирующий интеграл $I[\Phi,a]$ определим следующим образом. Рассмотрим формальный ряд

$$b(x,\theta,h)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j(x,\theta)h^j, \quad \text{где} \quad b_j(x,\theta)=|\theta|^j a_j(x,\theta),$$

по степеням переменной h. Так как $b_j \in \mathscr{O}_0^s(V)$ для всех j, то существует функция $B \in C^\infty([0,1],\mathscr{O}_0^s(V))$, для которой этот ряд является рядом Маклорена по h, т.е.

$$b_j(x,\theta)=\frac{1}{j!}\,\frac{\partial^j B(x,\theta,h)}{\partial h^j}\bigg|_{h=0}, \qquad j=0,1,2,\dots .$$

Теперь положим по определению

$$I[\Phi,a]=\frac{e^{i\pi m/4}}{(2\pi\mu)^{m/2}}\int_{|\theta|\geqslant\mu} e^{(i/\mu)\Phi(x,\theta)}B\biggl(x,\theta,\frac{\mu}{|\theta|}\biggr)\,d\theta \tag{6.4}$$

(для конечного ряда (6.1) это определение совпадает с предыдущим, если в качестве B взять соответствующий многочлен). Пусть $\widetilde{B} \in C^\infty([0,1],\mathscr{O}_0^s(V))$ – другая функция с тем же рядом Маклорена, а $\widetilde{I}[\Phi,a]$ – соответствующий интеграл (6.4).

Лемма 2. *Разность $f(x,\mu)=I[\Phi,a]-\widetilde{I}[\Phi,a]$ удовлетворяет оценкам* (6.3).

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

6.3. Оценки осциллирующих интегралов. Итак, выше мы оценили асимптотическую погрешность, с которой определены интегралы $I[\Phi,a]$ коразмерности k. Оценим теперь сами эти интегралы и их производные в пространстве $C(\mathbb{R}^n_x)$ и пространстве $L^2(\mathbb{R}^n_x)$.

Пусть $a \in \mathscr{O}_0^{(k-m)/2}(V,\mu)$ – амплитуда вида (6.1). Пусть $N \geqslant 0$ целое. Рассмотрим функцию $f_N(x,\mu)$, задаваемую одной из следующих формул:

$$f_N(x,\mu)=I[\Phi,\mu^N a_N] \qquad \text{(N-й член разложения);} \tag{6.5}$$

$$f_N(x,\mu)=I[\Phi,a]-\sum_{j=0}^{N-1} I[\Phi,\mu^j a_j] \qquad \text{("хвост" разложения).} \tag{6.6}$$

В частности, при $N=0$ функция (6.6) – это сам интеграл $I[\Phi,a]$.

Теорема 3. *Функции* (6.5) *и* (6.6) *удовлетворяют следующим оценкам*:

$$\left\|\frac{\partial^\beta f_N}{\partial x^\beta}\right\|_C \leqslant C_\beta \begin{cases} \mu^{N-m/2-|\beta|}, & \text{если } N-\dfrac{m}{2}-|\beta|<\dfrac{k}{2}, \text{ т.е. } |\beta|>N-\dfrac{k+m}{2}, \\ \mu^{k/2}\ln\mu^{-1}, & \text{если } N-\dfrac{m}{2}-|\beta|=\dfrac{k}{2}, \text{ т.е. } |\beta|=N-\dfrac{k+m}{2}, \\ \mu^{k/2}, & \text{если } N-\dfrac{m}{2}-|\beta|>\dfrac{k}{2}, \text{ т.е. } |\beta|<N-\dfrac{k+m}{2}; \end{cases} \tag{6.7}$$

$$\left\|\frac{\partial^\beta f_N}{\partial x^\beta}\right\|_{L^2} \leqslant C_\beta \begin{cases} \mu^{N-|\beta|}, & \text{если } N-|\beta|<\dfrac{k}{2}, \text{ т.е. } |\beta|>N-\dfrac{k}{2}, \\ \mu^{k/2}\ln\mu^{-1}, & \text{если } N-|\beta|=\dfrac{k}{2}, \text{ т.е. } |\beta|=N-\dfrac{k}{2}, \\ \mu^{k/2}, & \text{если } N-|\beta|>\dfrac{k}{2}, \text{ т.е. } |\beta|<N-\dfrac{k}{2}. \end{cases} \tag{6.8}$$

Доказательство. Оценки (6.7) доказываются непосредственными вычислениями, вполне аналогичными вычислениям, проведенным в доказательстве леммы 1. Для доказательства оценок (6.8) заметим, что, как следует из теоремы 3.5.1 и доказательства предложения 3.3.2 в [1], достаточно рассмотреть случай, когда $m=n$, фаза имеет вид $\Phi(x,\theta)=x\theta+S(\theta)$, и амплитуда $a(x,\theta,\mu)$ не зависит от x (финитность подынтегрального выражения по x в данном случае несущественна). В этом случае из свойств преобразования Фурье вытекает, что

$$\left\|\frac{\partial^\beta f_N}{\partial x^\beta}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} = \left\|b\left(\theta,\frac{\mu}{\theta}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_\theta\setminus\{|\theta|<\mu\})},$$

где $b(x,h)$ – функция, отвечающая N-му члену или хвосту разложения амплитуды a. Теперь интеграл, задающий квадрат нормы в правой части, можно оценить вычислениями, аналогичными проведенным в доказательстве леммы 1.

Таким образом, ни в соболевских, ни в равномерных нормах оценки не становятся "лучше", чем $O(\mu^{k/2})$ ни при каком N; однако чем больше N, тем большее число производных допускает эту наилучшую возможную оценку. Также не случайно, что неустранимая погрешность определения интегралов $I[\Phi,a]$ задается той же оценкой (только выполненной уже для всех производных).

Обозначим через $\mathcal{I}^s_\Phi$ пространство функций $f(x,\mu)$, представимых в виде

$$f(x,\mu)=I[\Phi,a](x,\mu)+R(x,\mu), \qquad \text{где} \quad a\in\mathscr{O}^s_0(V,\mu), \quad R\in\mathcal{R}^{s+m/2}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $\mu\mathcal{I}^{s-1}_\Phi\subset\mathcal{I}^s_\Phi$. Далее, из оценок (6.3) и (6.8) при $N=0$ вытекает, что

$$\mathcal{I}^s_\Phi\subset H^\infty_\mu(\mathbb{R}^n). \tag{6.9}$$

6.4. Градиентный идеал и интегрирование по частям.

Предложение 3. *Пусть* $a\in\mathscr{O}^s_0(V)$ *– такая функция, что* $a(x,\theta)=0$ *при* $(x,\theta)\in\Lambda_\Phi$. *Тогда существует вектор-функция* $b=(b_1,\dots,b_m)$, $b_j\in\mathscr{O}^s_0(V)$, $j=1,\dots,m$, *такая, что*

$$a(x,\theta)=b(x,\theta)\Phi_\theta(x,\theta)\equiv\sum_{j=1}^m b_j(x,\theta)\Phi_{\theta_j}(x,\theta).$$

Утверждение остается верным, если пространство $\mathscr{O}^s_0(V)$ *заменить на* $\mathscr{O}^s_0(V,\mu)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда носитель функции a содержится в достаточно малой окрестности многообразия Λ_Φ. Во введенных в п. 4.3 координатах (α,ρ,v) имеем равенство $v=\Phi_\theta$, многообразие Λ_Φ задается уравнениями $v=0$, и доказываемое утверждение получается, если представить функцию $a(\alpha,\rho,v)$ в виде разности $a(\alpha,\rho,v)=(\alpha,\rho,v)-(\alpha,\rho,0)$, применить лемму Адамара по переменным v и воспользоваться новым действием $\lambda\cdot(\alpha,\rho,v)=(\alpha,\lambda\rho,v)$ группы $\mathbb{R}_+$, также введенным в п. 4.3.

Теорема 4. *Пусть* $b=(b_1,\dots,b_m)$, $b_j\in\mathscr{O}_0^s(V)$, $j=1,\dots,m$. *Тогда*

$$I[\Phi,b\Phi_\theta]=i\mu I[\Phi,b_\theta]+R,\quad \text{где}\quad b_\theta=\sum_{j=1}^m\frac{\partial b_j}{\partial\theta_j}\in\mathscr{O}_0^{s-1}(V),\quad R\in\mathcal{R}^{s+m/2}(\mathbb{R}^n).$$

Утверждение остается верным, если пространство $\mathscr{O}_0^s(V)$ *заменить на* $\mathscr{O}_0^s(V,\mu)$.

Доказательство непосредственным вычислением (интегрированием по частям в осциллирующем интеграле $I[\Phi,b\Phi_\theta]$).

Следствие 1. *Элемент, определяемый функцией* $I[\Phi,a]$, $a\in\mathscr{O}_0^s(V)$, *в фактор-пространстве* $\mathcal{I}_\Phi^s/\mu\mathcal{I}_\Phi^{s-1}$, *зависит только от сужения функции* $a(x,\theta)$ *на* Λ_Φ.

Замечание 3. Отметим, что оператор сужения $a\mapsto a|_{\Lambda_\Phi}$ действует в пространствах $\mathscr{O}_0^s(V)\to\mathscr{O}_0^s(\Lambda_\Phi)$ и $\mathscr{O}_0^s(V,\mu)\to\mathscr{O}_0^s(\Lambda_\Phi,\mu)$.

Следствие 2. *Если* $a\in\mathscr{O}_0^s(V)$ *и* $a(x,\theta)=0$ *в конической окрестности множества* Λ_Φ, *то*

$$I[\Phi,a]\in\mathcal{R}^{s+m/2}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. В этом случае в интеграле $I[\Phi,a]$ можно интегрировать по частям в соответствии с теоремой 4 сколько угодно раз, что в сочетании с теоремой 3 дает нужные оценки.

7. Канонический оператор

Пусть $\Phi(x,\theta)$ – невырожденная псевдооднородная фазовая функция в ограниченной полуконической области $V\subset\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^m_{*\theta}$, $\Lambda=\Lambda_\Phi$ – многообразие нулей градиента Φ_θ, снабженное действием группы $\mathbb{R}_+$, определенным в п. 4.3, $\jmath\colon\Lambda\to T^*\mathbb{R}^n$ – отвечающее Φ проколотое лагранжево многообразие (теорема 1). В этом разделе предъявим конструкцию канонического оператора на Λ. Зафиксируем некоторую "коразмерность" k.

7.1. Псевдооднородная мера на Λ и функция $F_{\Phi,d\sigma}$. Зафиксируем на Λ некоторую меру (вещественную форму объема) $d\sigma$, псевдооднородную степени k. В точках многообразия Λ определена $(n+m)$-форма

$$d\sigma\wedge d(-\Phi_\theta)\equiv d\sigma\wedge d(-\Phi_{\theta_1})\wedge\dots\wedge d(-\Phi_{\theta_n})$$

– форма объема на касательных пространствах к V в этих точках (в координатах (α,ρ,v) эта форма имеет вид $d\sigma(\alpha,\rho)\wedge(-dv)$), а также $(n+m)$-форма $dx\wedge d\theta$. Отношение этих двух форм обозначим через

$$F_{\Phi,d\sigma}=\frac{d\sigma\wedge d(-\Phi_\theta)}{dx\wedge d\theta}.$$

Это псевдооднородная функция на Λ, причем $\operatorname{ord}F_{\Phi,d\sigma}=k-m$ (разность степеней псевдооднородности числителя и знаменателя).

7.2. Оператор продолжения. Определим оператор продолжения, переводящий гладкие функции на Λ в гладкие функции на V. Для этого используем координаты (α, ρ, v). Зафиксируем срезающую функцию $\chi(v)$, равную нулю вне достаточно малой окрестности начала координат и единице в меньшей окрестности. Для функции $\varphi(\alpha, \rho)$ на Λ положим

$$\varkappa\varphi(\alpha, \rho, v) = \varphi(\alpha, \rho)\chi(v) \tag{7.1}$$

на U^R и доопределим функцию $\varkappa\varphi$ нулем вне U^R. Из явной формы (7.1) оператора продолжения в координатах (α, ρ, v) и свойств функции χ вытекает следующее утверждение:

Предложение 4. *Оператор продолжения $\varkappa$ обладает свойством $(\varkappa\varphi)|_\Lambda = \varphi$ и действует в пространствах*

$$\varkappa\colon \mathscr{O}_0^s(\Lambda) \to \mathscr{O}_0^s(V), \qquad \varkappa\colon \mathscr{O}_0^s(\Lambda, \mu) \to \mathscr{O}_0^s(V, \mu). \tag{7.2}$$

7.3. Канонический оператор. Определим канонический оператор

$$\mathscr{K} \equiv \mathscr{K}_{\Lambda, d\sigma}\colon \mathscr{O}_0^0(\Lambda, \mu) \to H_\mu^\infty(\mathbb{R}^n)$$

формулой

$$\mathscr{K} A = I[\Phi, \varkappa(A\sqrt{F}\,)], \qquad A \in \mathscr{O}_0^0(\Lambda, \mu),$$

где $F = F_{\Phi, d\sigma}$, а ветвь квадратного корня выбрана некоторым образом.

Определение корректно: $\sqrt{F} \in \mathscr{O}^{(k-m)/2}(\Lambda)$, откуда $A\sqrt{F} \in \mathscr{O}_0^{(k-m)/2}(\Lambda, \mu)$ и соответственно $\varkappa(A\sqrt{F}\,) \in \mathscr{O}_0^{(k-m)/2}(V, \mu)$ согласно предложению 4, так что $\mathscr{K} A \in \mathcal{I}_\Phi^{(k-m)/2}$; наконец, $\mathcal{I}_\Phi^{(k-m)/2} \subset H_\mu^\infty(\mathbb{R}^n)$ согласно (6.9).

Замечание 4. Если носитель амплитуды A отделен от $\partial\Lambda$, то условие псевдооднородности становится бессодержательным, а канонический оператор, определенный здесь, совпадает с обычным каноническим оператором [11].

7.4. Выражение осциллирующего интеграла через канонический оператор. Поскольку осциллирующий интеграл $I[\Phi, a]$ согласно следствию 1 определяется в главном члене сужением амплитуды a на Λ, нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$I[\Phi, a] = \mathscr{K}\left(\frac{a|_\Lambda}{\sqrt{F}}\right) \mod \mu\mathcal{I}_\Phi^{s-1}, \qquad a \in \mathscr{O}_0^s(V), \quad s = \frac{k-m}{2}\,.$$

Оказывается, можно построить и дальнейшие члены разложения (в отличие от первого члена, они уже зависят от выбора оператора продолжения $\varkappa$).

Лемма 3. *На множестве V существуют дифференциальные операторы Q_j порядка $\leqslant 2j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $Q_0 = 1$, действующие в пространствах*

$$Q_j\colon \mathscr{O}_0^s(V) \to \mathscr{O}_0^{s-j}(V), \qquad Q_j\colon \mathscr{O}_0^s(V, \mu) \to \mathscr{O}_0^{s-j}(V, \mu), \tag{7.3}$$

и такие, что для любого $a \in \mathscr{O}_0^s(V)$ (или $a \in \mathscr{O}_0^s(V, \mu)$) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} I[\Phi, a] &= \mathscr{K}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} \sum_{j=0}^{N-1} \mu^j (Q_j a)|_\Lambda\right) \mod \mu^N \mathcal{I}_\Phi^{s-N}, \qquad N = 1, 2, \dots, \\ I[\Phi, a] &= \mathscr{K}\left(\frac{1}{\sqrt{F}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j (Q_j a)|_\Lambda\right) \mod \mathcal{R}^{s+m/2}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Доказательство. Заметим, что вторая формула в (7.4) вытекает из первой, поскольку

$$\bigcap_{N=1}^{\infty}(\mu^N\mathcal{I}_{\Phi}^{s-N})=\mathcal{R}^{s+m/2}(\mathbb{R}^n),$$

так что достаточно доказать первую формулу. Вместо $I[\Phi,a]$ будем для краткости писать просто $[a]$, а через ξ обозначим оператор сужения на Λ. Пусть $a\in\mathscr{O}_0^s(V)$. Построим по индукции последовательность элементов $a_j\in\mathscr{O}_0^{s-j}(V)$, $j=1,2,\dots$, таких, что

$$[a]=\sum_{j=1}^{N-1}\mu^j[\varkappa(\xi(a_j))]+\mu^N[a_N] \quad \operatorname{mod}\mathcal{R}^{s+m/2}(\mathbb{R}^n), \qquad N=0,1,2,\dots. \tag{7.5}$$

При $j=1$ можно положить $a_0=a$. Пусть a_j уже построены для $j=0,\dots,N$. Построим такой элемент $a_{N+1}\in\mathscr{O}_0^{s-N-1}(V)$, что

$$[a_N]=[\varkappa(\xi(a_N))]+\mu[a_{N+1}] \quad \operatorname{mod}\mathcal{R}^{s+m/2-N}(\mathbb{R}^n). \tag{7.6}$$

Воспользуемся системой координат (α,ρ,v); координаты α и ρ будем опускать. Тогда

$$[a_N-\varkappa(\xi(a_N))]=[a_N(v)-\chi(v)a_N(0)]=[\chi(v)(a_N(v)-a_N(0))] \quad \operatorname{mod}\mathcal{R}^{s+m/2-N}(\mathbb{R}^n)$$

в силу следствия 2. Далее,

$$a_N(v)-a_N(0)=\sum_{l=1}^{m}v_l\int_0^1\frac{\partial a_N}{\partial v_l}(tv)\,dt,$$

и в силу теоремы 4 можно положить

$$a_{N+1}(v)=\chi(v)\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\theta_l}\int_0^1\frac{\partial a_N}{\partial v_l}(tv)\,dt$$

(член, где дифференцируется $\chi(v)$, можно опустить в силу следствия 2). Оператор $\partial/\partial v_l$ не понижает степень псевдооднородности, а оператор $\partial/\partial\theta_l$ понижает ее на 1, так что $a_{N+1}\in\mathscr{O}_0^{s-N-1}(V)$. Итак, мы построили все функции a_j, причем

$$a_j=D^{j-1}a, \qquad \text{где} \quad (Df)(v)=\chi(v)\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\theta_l}\int_0^1\frac{\partial f}{\partial v_l}(tv)\,dt.$$

Оператор $\widetilde{Q}_j=D^j$ действует в нужных пространствах (7.3), но, к сожалению, не является дифференциальным. Покажем, что существуют дифференциальные операторы Q_j порядка $\leqslant 2j$, действующие в тех же пространствах (7.3), такие, что $\xi(\widetilde{Q}_ja)=\xi(Q_ja)$. Действительно, $\widetilde{Q}_0=\mathrm{id}$, а при $j>1$

$$(D^ja)(\alpha,\rho,v)=\int_0^1\cdots\int_0^1\sum_{|\beta|\leqslant 2j}E_\beta(t_1,\dots,t_j,\alpha,\rho,v)a^{(\beta)}(\alpha,\rho,t_1\cdots t_jv)\,dt_1\dots dt_j,$$

где мультииндекс β отвечает дифференцированиям по всем переменным. Полагая $v=0$ в этой формуле, получаем

$$(D^ja)(\alpha,\rho,0)=(Q_ja)(\alpha,\rho,0),$$

где Q_j – дифференциальный оператор

$$(D^j a)(\alpha,\rho,v)=\sum_{|\beta|\leqslant 2j}\biggl(\int_0^1\cdots\int_0^1 E_\beta(t_1,\dots,t_j,\alpha,\rho,v)\,dt_1\dots dt_j\biggr)a^{(\beta)}(\alpha,\rho,v)$$

с нужными свойствами. Лемма доказана.

8. Формула коммутации ПДО с каноническим оператором

Пусть задана гладкая функция $\mathscr{H}(x,p,\mu)$ переменных $(x,p)\in\mathbb{R}^{2n}$ и $\mu\in[0,1]$, удовлетворяющая для некоторого l оценкам

$$\biggl|\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|+j}\mathscr{H}}{\partial x^\alpha\,\partial p^\beta\,\partial\mu^j}(x,p,\mu)\biggr|\leqslant C_{\alpha\beta j}(1+|x|+|p|)^l,\qquad |\alpha|+|\beta|+j=0,1,2,\dots.$$

Тогда в пространстве $H^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)$ определен *μ-псевдодифференциальный оператор* [5]

$$\widehat{\mathscr{H}}=\mathscr{H}(\overset{2}{x},\overset{1}{\widehat{p}},\mu)\colon H^\infty_\mu(\mathbb{R}^n)\to H^\infty_\mu(\mathbb{R}^n),\qquad \widehat{p}=-i\mu\,\frac{\partial}{\partial x}\,,$$

с полным символом $\mathscr{H}(x,p,\mu)$. В этом пункте мы вычислим асимптотическое разложение функции $\widehat{\mathscr{H}}\mathscr{K}A$.

8.1. Псевдооднородные символы. Будем говорить, что полный символ $\mathscr{H}$ оператора $\widehat{\mathscr{H}}$ *псевдооднороден целой степени* $r\geqslant 0$, если функция $\mathscr{H}$ (рассматриваемая как ряд по степеням μ) лежит в пространстве $\mathscr{O}^r(T^*_0\mathbb{R}^n,\mu)$. Подчеркнем, однако, что функция $\mathscr{H}$ предполагается гладкой на всем пространстве $T^*\mathbb{R}^n$, т.е. не имеет особенностей на нулевом сечении $\{\mathbf{0}\}$. Поэтому условие принадлежности пространству $\mathscr{O}^r(T^*_0\mathbb{R}^n,\mu)$ можно переписать в виде

$$\frac{\partial^j\mathscr{H}}{\partial\mu^j}(x,p,0)\in\mathscr{O}^{r-j}(T^*_0\mathbb{R}^n),\qquad j=0,1,\dots,r.$$

В частности, *главный символ*

$$H(x,p)=\mathscr{H}(x,p,0)$$

оператора $\widehat{\mathscr{H}}$ псевдооднороден степени r, а *субглавный символ*

$$H_{\mathrm{sub}}(x,p)=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mu}(x,p,0)+\frac{i}{2}\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\,\partial p_j}(x,p)$$

– степени $\max\{r-1,0\}$.

8.2. Формула коммутации. Сформулируем теперь основную теорему настоящей работы.

Теорема 5. *Пусть Φ – невырожденная псевдооднородная фазовая функция на полуконическом множестве $V\subset\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^m_{*\theta}$, $\Lambda=\Lambda_\Phi$ – соответствующее проколотое лагранжево многообразие, $d\sigma$ – мера на Λ, псевдооднородная степени k, $\varkappa$ – оператор продолжения* (7.2), *заданный формулой* (7.1). *Пусть $\mathscr{K}$ – построенный* *по этим объектам канонический оператор. Далее, пусть* $\widehat{\mathscr{H}}$ *–* μ*-псевдодифференциальный оператор, полный символ которого псевдооднороден степени* $r \geqslant 0$*. Тогда на многообразии* Λ *существуют дифференциальные операторы* Π_j *порядка* $\leqslant j$*,* $j = 1, 2, \dots$*, действующие в пространствах*

$$\Pi_j \colon \mathscr{O}_0^s(\Lambda) \to \mathscr{O}_0^{s+r-j}(\Lambda),$$

так что, в частности,

$$\Pi = \sum_{j=0}^{\infty} (-i\mu)^j \Pi_j \colon \mathscr{O}_0^s(\Lambda, \mu) \to \mathscr{O}_0^{s+r}(\Lambda, \mu),$$

и такие, что при $A \in \mathscr{O}_0^0(\Lambda, \mu)$ *справедлива формула коммутации*

$$\widehat{\mathscr{H}} \mathscr{K} A = \mathscr{K} \Pi A \quad \operatorname{mod} \mathcal{R}^{k/2+r}(\mathbb{R}^n).$$

Кроме того, $\Pi_0 = H|_\Lambda$ *– оператор умножения на сужение главного символа на* Λ*, а если* $H|_\Lambda = 0$ *(и, как следствие, гамильтоново векторное поле* $V(H)$ *касательно к* Λ*), то*

$$\Pi_1 = V(H) + iH_{\mathrm{sub}}|_\Lambda + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{V(H)}\, d\sigma}{d\sigma}\,.$$

Здесь под $V(H)$ *понимается сужение гамильтонова векторного поля на* Λ*, а через* $\mathcal{L}_{V(H)}$ *обозначена производная Ли вдоль этого сужения.*

Доказательство. Во избежание громоздкости будем считать, что $A \in \mathscr{O}_0^0(\Lambda)$ (переход к рядам $A \in \mathscr{O}_0^0(\Lambda, \mu)$ тривиален). Выполнено $\widehat{\mathscr{H}} \mathscr{K} A = \widehat{\mathscr{H}} I[\Phi, a]$, где $a = \varkappa(A\sqrt{F}\,)$, и далее

$$\widehat{\mathscr{H}} \mathscr{K} A = \frac{e^{i\pi m/4}}{(2\pi\mu)^{m/2}} \int_{|\theta| \geqslant c\mu} \widehat{\mathscr{H}}\bigl(e^{(i/\mu)\Phi(x,\theta)} a(x,\theta)\bigr)\, d\theta. \tag{8.1}$$

Вычислим подынтегральное выражение. Формула коммутации псевдодифференциального оператора с быстроосциллирующей экспонентой с точностью до сколь угодно высоких степеней малого параметра хорошо известна [2], [3]; именно, согласно [3; теорема 2.6]

$$\widehat{\mathscr{H}}\bigl(e^{(i/\mu)\Phi(x,\theta)} a(x,\theta)\bigr) \simeq e^{(i/\mu)\Phi(x,\theta)} \sum_{j=0}^{\infty} (-i\mu)^j L_j\biggl(x, \theta, -i\frac{\partial}{\partial x}\biggr) a(x,\theta), \tag{8.2}$$

где $L_j(x, \theta, -i\,\partial/\partial x)$ – дифференциальные операторы порядка $\leqslant j$. Однако мы должны проследить за степенями псевдооднородности по θ всех слагаемых в этой формуле, поэтому нам нужны несколько более явные выражения для этих слагаемых. Соответствующие вычисления можно проводить по отдельности для каждого из слагаемых в разложении полного символа по степеням параметра μ. Мы проведем их для главного символа $H(x,p)$; для дальнейших членов разложения они полностью аналогичны. Для сокращения записи в последующих выкладках мы опускаем аргумент θ. Согласно формуле Адамара

$$\Phi(x) - \Phi(y) = (x-y)\delta\Phi(x,y), \qquad \text{где} \quad \delta\Phi(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\tau x + (1-\tau)y)\, d\tau.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}e^{-(i/\mu)\Phi(x)}\widehat{H}(e^{(i/\mu)\Phi(x)}a(x)) &= \frac{1}{(2\pi\mu)^n}\iint e^{(i/\mu)(p(x-y)-\Phi(x)+\Phi(y))}H(x,p)a(y)\,dy\,dp\\ &= \frac{1}{(2\pi\mu)^n}\iint e^{(i/\mu)(p-\delta\Phi(x,y))(x-y)}H(x,p)a(y)\,dy\,dp\\ &= \frac{1}{(2\pi\mu)^n}\iint e^{(i/\mu)p(x-y)}H(x,p+\delta\Phi(x,y))a(y)\,dy\,dp\end{aligned}$$

(в одномерном случае это утверждение содержится в [12; с. 213, (III.13)].) Разлагая $H(x,p+\delta\Phi(x,y))$ в ряд по степеням p, получаем асимптотическое разложение функции $e^{-(i/\mu)\Phi(x)}\widehat{H}(e^{(i/\mu)\Phi(x)}a(x))$ по степеням параметра μ:

$$\begin{aligned}&e^{-(i/\mu)\Phi(x)}\widehat{H}(e^{(i/\mu)\Phi(x)}a(x))\\ &\quad\simeq \frac{1}{(2\pi\mu)^n}\iint e^{(i/\mu)p(x-y)}\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{p^\alpha}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha H}{\partial p^\alpha}(x,\delta\Phi(x,y))a(y)\,dy\,dp\\ &\quad= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\biggl[\biggl(-i\mu\frac{\partial}{\partial y}\biggr)^\alpha\frac{\partial^\alpha H}{\partial p^\alpha}(x,\delta\Phi(x,y))a(y)\biggr]_{y=x}.\end{aligned}$$

Сумма членов в правой части с $|\alpha|=j$ представляет собой вклад главного символа $H(x,p)$ в слагаемое $(-i\mu)^jL_j(x,\theta,-i\,\partial/\partial x)a(x,\theta)$ в сумме в (8.2). Этот вклад может быть записан в виде (многомерный вариант формулы Фаа ди Бруно):

$$\begin{aligned}&(-i\mu)^j\sum_{|a|=j}\sum_{\beta<\alpha}\frac{\partial^{\alpha+\beta}H}{\partial p^{\alpha+\beta}}(x,\Phi_x(x))\\ &\qquad\times\sum_{\substack{|\gamma|+|\gamma_1|+\dots\\+|\gamma_{|\beta|}|=|\alpha|-|\beta|}}C_{\alpha\beta\gamma\gamma_1\dots\gamma_{|\beta|}}\frac{\partial^{\gamma_1}\Phi_x}{\partial x^{\gamma_1}}(x)\cdots\frac{\partial^{\gamma_{|\beta|}}\Phi_x}{\partial x^{\gamma_{|\beta|}}}(x)\frac{\partial^\gamma a}{\partial x^\gamma}(x),\end{aligned}$$

где $C_{\alpha\beta\gamma\gamma_1\dots\gamma_{|\beta|}}$ – постоянные, конкретные значения которых нас не интересуют. Порядок псевдооднородности по θ выражения в правой части не ниже, чем

$$r-|\alpha+\beta|+|\beta|+\operatorname{ord}a = r-j+\operatorname{ord}a = r-j+\frac{k-m}{2},$$

и комбинируя это рассуждение с аналогичными рассуждениями для дальнейших членов разложения полного символа по степеням μ, приходим к соотношению

$$\widehat{\mathscr{H}}\mathscr{K}A = I\biggl[\Phi,\sum_{j=0}^{\infty}(-i\mu)^ja_j\biggr]\mod\mathcal{R}^{k/2+r}(\mathbb{R}^n), \tag{8.3}$$

где

$$a_j = L_j\biggl(x,\theta,-i\frac{\partial}{\partial x}\biggr)\varkappa(\sqrt{F}\,A)(x,\theta)\in\mathscr{O}_0^{r-j+(k-m)/2}(V).$$

Применяя лемму 3, приходим к утверждению теоремы с дифференциальными операторами Π_j, которые действуют в нужных пространствах, остается лишь доказать утверждение о том, что порядок оператора Π_j не превосходит j и что операторы Π_0

и Π_1 имеют указанную в теореме форму. Это утверждение достаточно доказать для амплитуд A, носитель которых отделен от края ∂L (но может быть сколь угодно близок к нему). Для таких амплитуд, однако, канонический оператор на проколотом лагранжевом многообразии превращается в стандартный канонический оператор, и соответствующие утверждения получаются из стандартной теоремы о коммутации (см., например, [3; теорема 9.3]).

Теорема доказана.

Автор признателен С. Ю. Доброхотову и А. И. Шафаревичу за многочисленные плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, A. I. Shafarevich, "Canonical operator on punctured Lagrangian manifolds", *Russ. J. Math. Phys.*, **28**:1 (2021), 22–36.

[2] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965.

[3] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.

[4] L. Hörmander, "Fourier integral operators I", *Acta Math.*, **127** (1971), 79–183.

[5] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.

[6] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, "Логарифмическая асимптотика быстро убывающих решений гиперболических по Петровскому уравнений", *Матем. заметки*, **45**:5 (1989), 50–62.

[7] С. Ю. Доброхотов, П. Н. Жевандров, В. П. Маслов, А. И. Шафаревич, "Асимптотические быстроубывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами", *Матем. заметки*, **49**:4 (1991), 31–46.

[8] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, "Propagation of a linear wave created by a spatially localized perturbation in a regular lattice and punctured Lagrangian manifolds", *Russ. J. Math. Phys.*, **24**:1 (2017), 127–133.

[9] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, A. A. Tolchennikov, "Uniform formulas for the asymptotic solution of a linear pseudodifferential equation describing water waves generated by a localized source", *Russ. J. Math. Phys.*, **27**:2 (2020), 185–191.

[10] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. И. Шафаревич, "Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений", *УМН*, **76**:5 (461) (2021), 3–80.

[11] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. И. Шафаревич, "Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:2 (2017), 53–96.

[12] В. Е. Назайкинский, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, *Методы некоммутативного анализа*, Техносфера, М., 2002.

В. Е. Назайкинский
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: nazaikinskii@yandex.ru

Поступило
15.07.2022
Принято к публикации
20.07.2022