

УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА
ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ
ОРНШТЕЙНА — УЛЕНБЕКА
В. И. Богачев, С. В. Шапошников

Аннотация. Рассмотрены операторы Колмогорова с постоянными матрицами диффузии и линейными сносами, т. е. операторы Орнштейна — Уленбека, и показано, что все решения соответствующих стационарных уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова (в том числе знакопеременные) являются инвариантными мерами вырожденных полугрупп. Это дает также относительно явное описание всех решений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.103

Ключевые слова: уравнение Колмогорова, уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова, оператор Орнштейна — Уленбека.

1. Введение

В теории уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова простейшим является случай постоянной матрицы диффузии и линейного сноса, т. е. случай оператора Орнштейна — Уленбека. Если матрица диффузии невырожденная, то в этом случае основные рассматриваемые объекты (решения стационарных уравнений и задач Коши, полугруппы) допускают явные представления, стационарные решения совпадают с инвариантными мерами полугрупп и единственны. Однако ситуация усложняется для вырожденной матрицы диффузии. Здесь некоторые из известных в невырожденном случае фактов оставались невыясненными, и цель данной работы — их обоснование. Хотя справедливость установленных ниже результатов вполне ожидаема для специалистов, доказательства оказываются довольно неочевидными.

Пусть $A = (a^{ij})_{i,j \leq d}$ — неотрицательно определенная симметричная постоянная матрица, b — гладкое векторное поле на \mathbb{R}^d . Напомним, что для дифференциального оператора (называемого *оператором Колмогорова*)

$$L_{A,b}f(x) = \text{tr}(AD^2f(x)) + \langle b(x), \nabla f(x) \rangle = a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(x) + b^i(x) \partial_{x_i} f(x),$$

где подразумевается стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам, возникает стационарное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова

$$L_{A,b}^* \mu = 0 \tag{1.1}$$

Работа поддержана грантом РНФ 22-11-00015 (выполняемым при МГУ имени М. В. Ломоносова).

относительно ограниченных борелевских мер μ на \mathbb{R}^d . Это уравнение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_{A,b} f d\mu = 0 \quad (1.2)$$

для функций f из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ гладких функций с ограниченными носителями, т. е. равенства

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \mu) - \partial_{x_i} (b^i \mu) = 0$$

в смысле обобщенных функций. Если матрица A невырожденная, то мера μ задается гладкой плотностью ρ относительно меры Лебега и эта плотность удовлетворяет уравнению

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \rho) - \partial_{x_i} (b^i \rho) = 0$$

в обычном смысле.

Если поле b линейно, т. е. $b(x) = Bx$, где B — линейный оператор, то будем писать $L_{A,B}$ вместо $L_{A,b}$. Такие операторы называют операторами Орнштейна — Уленбека, им посвящено много работ, в связи с ними возникают весьма нетривиальные вопросы (см., например, [1–4], где можно найти дополнительные ссылки).

Случай невырожденной матрицы A заменой координат сводится к случаю $A = I$. Особый интерес представляет ситуация, когда есть вероятностное решение μ , т. е. $\mu \geq 0$ и $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$. Даже для $A = I$ и гладкого отображения b остается неизвестным, всегда ли наличие ненулевого знакопеременного решения влечет наличие вероятностного решения. Ниже показано, что ответ положительный для линейного коэффициента b и всякой матрицы A .

Если вероятностное решение существует, то даже для $A = I$ и гладкого нелинейного отображения b оно может быть неединственным (см. [5, 6; 7, гл. 4]). Если b линейно и оператор A невырожденный, то вероятностное решение единственно (если оно существует), см. [7, теорема 4.1.6]; более того, нет знакопеременных решений (см. [7, § 4.3]). В случае вырожденного A это неверно. Например, для $A = 0$ и $b = 0$ все меры являются решениями. Если $d = 2$, $A = 0$ и b — поворот на $\pi/2$, т. е. $b(x) = (-x_2, x_1)$, то всякая мера, инвариантная относительно вращений, удовлетворяет уравнению. В самом деле, равенство $\operatorname{div}(b\mu) = b^1 \partial_{x_1} \mu + b^2 \partial_{x_2} \mu = 0$ верно, если μ имеет гладкую плотность, зависящую от $|x|^2$. Поэтому это равенство справедливо для свертков $\mu * p_\varepsilon$, где $p_\varepsilon = (2\pi\varepsilon)^{-1} \exp(-|x|^2/(2\varepsilon^2))$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем равенство и для μ . Из доказанного ниже вытекает, что в данном случае все решения исчерпываются мерами, инвариантными относительно вращений.

В случае общего гладкого b и невырожденной матрицы A существование вероятностного решения μ влечет существование сильно непрерывной полугруппы операторов T_t в $L^1(\mu)$ со следующими свойствами:

- (1) генератор полугруппы является продолжением оператора $L_{A,b}$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,
- (2) $\|T_t\| \leq 1$,
- (3) операторы T_t субмарковские, т. е. $0 \leq T_t f \leq 1$ при $0 \leq f \leq 1$.

Неизвестно, единственна ли полугруппа с перечисленными свойствами, однако если отказаться от (2) и (3), то единственности нет в случае неединственности вероятностного решения уравнения (1.1) (см. [7, гл. 5]). Так называемая каноническая полугруппа $\{T_t^\mu\}_{t \geq 0}$, ассоциированная с $L_{A,b}$, определяется тем, что для ее генератора $L_{A,b}^\mu$ оператор $(I - L_{A,b}^\mu)^{-1}$ задается так: $(I - L_{A,b}^\mu)^{-1} f$ при

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ есть предел решений задач Дирихле $u - L_{A,b}u = f$ с нулевыми граничными условиями на шарах радиуса n с центром в нуле. В случае линейного сноса имеется явно заданная переходная полугруппа $\{T_t\}_{t \geq 0}$ (см. формулу (1.4) ниже).

Появление канонической полугруппы приводит к вопросу об инвариантности меры μ относительно нее, т. е. о справедливости тождества

$$\int_{\mathbb{R}^d} T_t^\mu f d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu$$

для всех функций $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ (в данном случае это равносильно равенству для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$). Однако такая инвариантность имеет место лишь в случае единственности вероятностного решения уравнения (1.1). В этой работе показано, что для линейного коэффициента сноса все решения уравнения (1.1) (в том числе знакопеременные) всегда инвариантны относительно переходной полугруппы $\{T_t\}_{t \geq 0}$.

Оператор Колмогорова порождает задачу Коши для эволюционного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\partial_t \mu_t = L_{A,b}^* \mu_t, \quad \mu_0 = \nu,$$

на отрезке $[0, T]$ с заданным $T > 0$ и начальным условием ν , являющимся ограниченной мерой. *Решением* называется семейство ограниченных мер μ_t (возможно, знакопеременных), борелевски зависящих от t , т. е. функции $t \mapsto \mu_t(E)$ должны быть борелевскими для всех борелевских множеств E , для которого полная вариация $\|\mu_t\|$ меры μ_t интегрируема по t на $[0, T]$ и выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\nu = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L_{A,b} \varphi d\mu_s ds \quad (1.3)$$

для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Вероятностным* называется решение, для которого меры μ_t вероятностные.

С оператором Колмогорова $L_{A,b}$ связано также стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t = \sqrt{2A} dw_t + b(\xi_t) dt$$

с винеровским процессом w_t , которое в случае линейного b имеет линейный вид

$$d\xi_t = \sqrt{2A} dw_t + B\xi_t dt. \quad (1.4)$$

Напомним (см., например, [8, § 8.1; 9, § 5.1]), что для произвольных линейных операторов S и B и винеровского процесса w_t в \mathbb{R}^d стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t = S dw_t + B\xi_t dt, \quad \xi_0 = x,$$

с неслучайным начальным значением x имеет единственное решение

$$\xi_{t,x} = e^{tB} x + \int_0^t e^{(t-s)B} S dw_s,$$

где векторный стохастический интеграл является гауссовским вектором с нулевым средним и ковариационным оператором

$$K_t = \int_0^t e^{sB} S S^* e^{sB^*} ds.$$

Обозначим через G_t центрированную гауссовскую меру с этим ковариационным оператором, т. е. распределение указанного стохастического интеграла в момент t . Переходная полугруппа процесса задается на пространстве $C_b(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$T_t f(x) = \mathbb{E}(f(\xi_{t,x})) = \int_{\mathbb{R}^d} f(e^{tB}x + y) G_t(dy). \quad (1.4)$$

Эта полугруппа является сжимающей на $C_b(\mathbb{R}^d)$, но не сильно непрерывной (см. [7, пример 5.1.2]). Симметричный неотрицательный оператор $A = SS^*/2$ задает дифференциальный оператор $L_{A,B}$, для которого при всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполнено равенство

$$\partial_t T_t f = L_{A,B} T_t f = T_t L_{A,B} f.$$

Полугруппа $\{T_t\}_{t \geq 0}$ порождает полугруппу $\{T_t^*\}_{t \geq 0}$ на пространстве ограниченных мер по формуле

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d(T_t^* \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} T_t f d\nu,$$

иначе говоря, с помощью свертки имеем

$$T_t^* \nu = (\nu \circ S_t^{-1}) * G_t, \quad S_t x = e^{tB},$$

где $\nu \circ S_t^{-1}$ — образ меры ν при отображении S_t . Семейство мер $T_t^* \nu$ дает решение задачи Коши для уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\partial_t \mu_t = L_{A,B}^* \mu_t, \quad \mu_0 = \nu.$$

Известно (см. [10; 7, §9.8(iii)]), что для всякой вероятностной меры ν эта задача Коши имеет единственное решение, состоящее из вероятностных мер, а ниже в замечании 3.2 пояснена единственность и в классе знакопеременных решений.

Для невырожденного оператора A в случае существования вероятностного решения μ уравнения $L_{A,B}^* \mu = 0$ упомянутая выше каноническая полугруппа $\{T_t^\mu\}_{t \geq 0}$ совпадает на $C_b(\mathbb{R}^d)$ с указанной явно заданной полугруппой $\{T_t\}_{t \geq 0}$. В самом деле, давно известно (см. [11]), что задача Коши для прямого уравнения

$$\partial_t u(x, t) = L_{A,B} u(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

с невырожденным оператором A имеет единственное решение в классе $C_b(\mathbb{R}^d)$ для всякой начальной функции из этого класса (единственность есть даже в гораздо более широком классе функций с оценкой $|u(x, t)| \leq C \exp(k|x|^2)$). Совпадение полугрупп вытекает также из единственности решений задачи Коши для уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, так как обе полугруппы порождают сопряженные полугруппы на пространстве ограниченных мер, дающие решения для этой задачи Коши. Сопряженная к канонической полугруппе действует на меры по формуле

$$(T_t^\mu)^* \nu(E) = \int_{\mathbb{R}^d} T_t^\mu I_E d\nu,$$

где используется непрерывная версия функции $T_t^\mu I_E$ (которая существует по свойствам канонических полугрупп, см. [7, теорема 5.4.5]). Действие T_t^* было определено выше. Значит, сопряженные полугруппы равны, что равносильно равенству самих полугрупп.

В общем случае (для нелинейного b) не всякое решение стационарного уравнения $L_{A,b}^* \mu = 0$ инвариантно относительно полугруппы $\{T_t\}_{t \geq 0}$, но в данном случае эти два свойства равносильны, в чем и состоит один из основных результатов работы.

В [12] получено полное описание всех стационарных вероятностных мер процесса $\xi_{x,t}$. Общий вид стационарных распределений процесса таков: $\sigma * G$, где G — центрированная гауссовская мера с ковариационным оператором

$$K = \int_0^\infty e^{sB} S S^* e^{sB^*} ds,$$

равным пределу операторов K_t при $t \rightarrow \infty$ в случае существования стационарных распределений, σ — вероятностная мера, инвариантная для процесса с нулевой диффузией, т. е. для детерминированной динамической системы $x'(t) = Bx(t)$, иначе говоря, вероятностная мера, инвариантная относительно всех операторов e^{tB} . Это равносильно тождеству $\tilde{\sigma}(y) = \tilde{\sigma}(e^{tB^*} y)$ для ее преобразования Фурье. Согласно [12] существование стационарных распределений равносильно существованию неотрицательного симметричного оператора Q , удовлетворяющего равенству

$$BQ + QB^* = -2A = -SS^*. \quad (1.6)$$

В [12, 13] приведены равносильные алгебраические условия. В приведенных результатах оператор S не обязан быть симметричным, но возникающий в уравнении (1.1) оператор $A = SS^*/2$ всегда симметричен и неотрицательно определен, поэтому для наших целей можно считать, что $S = \sqrt{2A}$.

2. Основные результаты

Далее рассматривается уравнение $L_{A,B}^* \mu = 0$ в случае, когда $A = (a^{ij})_{i,j \leq d}$ и $B = (b^{ij})_{i,j \leq d}$ — постоянные линейные операторы на \mathbb{R}^d , причем A симметричен и неотрицательно определен.

Основные результаты работы состоят в следующем.

Теорема 2.1. *Ограниченная борелевская мера μ на \mathbb{R}^d (возможно, знакопеременная) удовлетворяет уравнению $L_{A,B}^* \mu = 0$ в точности тогда, когда мера μ инвариантна относительно введенной выше полугруппы $\{T_t\}_{t \geq 0}$ на пространстве $C_b(\mathbb{R}^d)$.*

Следствие 2.2. *Всякое вероятностное решение уравнения $L_{A,B}^* \mu = 0$ имеет вид*

$$\mu = \sigma * G, \quad (2.1)$$

где G — центрированная гауссовская мера с ковариационным оператором

$$K = 2 \int_0^\infty e^{sB} A e^{sB^*} ds,$$

σ — вероятностная мера, инвариантная относительно всех операторов e^{tB} , причем все меры такого вида удовлетворяют данному уравнению.

Если оператор A невырожденный, то, как уже отмечалось, вероятностное решение уравнения $L_{A,B}^*\mu = 0$ единственно (с точностью до множителя это единственное решение в классе ограниченных мер), поэтому это мера G . Необходимое и достаточное условие существования и единственности вероятностного решения — отрицательность вещественных частей собственных чисел оператора B (см. [12] и более общий результат для непостоянной матрицы A в [14]).

Следствие 2.3. Знакопеременная борелевская мера μ удовлетворяет уравнению $L_{A,B}^*\mu = 0$ в точности тогда, когда она имеет вид $\mu = c_1\mu_1 - c_2\mu_2$, где c_1 и c_2 — неотрицательные постоянные, μ_1 и μ_2 — вероятностные меры, удовлетворяющие тому же уравнению и потому имеющие вид (2.1).

Следствие 2.4. Существование ненулевого (а тогда и вероятностного) решения уравнения $L_{A,B}^*\mu = 0$ равносильно существованию неотрицательного симметричного оператора Q , удовлетворяющего равенству (1.6).

Из сказанного ясно, что полная вариация $|\mu|$ решения уравнения $L_{A,B}^*\mu = 0$ также является решением. Отметим, что если уравнение $L_{I,b}^*\mu = 0$ имеет два разных вероятностных решения μ_1 и μ_2 , то мера $|\mu_1 - \mu_2|$ не может быть решением, ибо меры μ_1 и μ_2 имеют гладкие плотности ϱ_1 и ϱ_2 , поэтому $|\mu_1 - \mu_2|$ задается непрерывной плотностью $|\varrho_1 - \varrho_2|$, причем эта плотность не имеет нулей (см. [7, § 3.4]), что невозможно, так как функция $\varrho_1 - \varrho_2$ имеет нулевой интеграл по всему пространству.

Доказательства даны в следующем разделе.

3. Вспомогательные результаты и доказательства

Приведем сначала простое прямое обоснование частного случая следствия (1.6), а именно покажем, что существование вероятностного решения с конечным вторым моментом равносильно условию (1.1). Предположим, что μ — вероятностное решение (1.1) с конечным вторым моментом, т. е. имеется неотрицательный симметричный оператор $Q = (Q^{jk})_{j,k \leq d}$, для которого

$$\langle Qu, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle u, x \rangle \langle v, x \rangle \mu(dx), \quad u, v \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда, как легко видеть (см. доказательство теоремы) в определяющее тождество (1.2) можно подставлять функции $\varphi(x) = \langle Cx, x \rangle$, где C — симметричный оператор, что в силу равенства

$$L_{A,B}\varphi(x) = 2 \operatorname{trace}(AC) + 2\langle Bx, Cx \rangle$$

приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}(AC) &= - \int_{\mathbb{R}^d} \langle Bx, Cx \rangle \mu(dx) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{trace}[Q(CB + B^*C)] - \frac{1}{2} \operatorname{trace}[(BQ + QB^*)C], \end{aligned}$$

из которых вытекает равенство (1.1). Таким образом, существование неотрицательно определенного оператора Q , удовлетворяющего этому равенству, является необходимым условием существования вероятностного решения с конечным

вторым моментом. Обратное, если такой оператор существует, то симметричная гауссовская мера σ_Q с ковариационным оператором Q удовлетворяет уравнению (1.1). В самом деле, для гауссовской меры тождество (1.2) достаточно проверить на функциях вида $\varphi(x) = \exp(i\langle x, y \rangle)$, так как это влечет равенство для функций φ , представляющих собой периодические продолжения гладких функций с носителями в кубах, откуда нетрудно вывести равенство для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Для функций указанного вида

$$L_{A,B}\varphi(x) = -\langle Ay, y \rangle \exp(i\langle x, y \rangle) + i \exp(i\langle x, y \rangle) \langle Bx, y \rangle,$$

причем интеграл от первого слагаемого равен $-\langle Ay, y \rangle \widetilde{\sigma}_T(y)$. Поэтому остается вычислить интеграл

$$i \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x, y \rangle) \langle Bx, y \rangle \sigma_Q(dx),$$

который равен

$$\begin{aligned} i \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x, y \rangle) \langle x, B^*y \rangle \sigma_Q(dx) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x, y + tB^*y \rangle) \sigma_Q(dx) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle Q(y + tB^*y), y + tB^*y \rangle\right) = -\frac{1}{2} \widetilde{\sigma}_T(y) [\langle Qy, B^*y \rangle + \langle QB^*y, y \rangle]. \end{aligned}$$

В силу равенства (1.6) сумма интегралов от слагаемых в указанном выражении для $L_{A,B}\varphi(x)$ равна нулю.

Если оператор B отрицательно определен, т. е. $\langle Bx, x \rangle \leq -\alpha|x|^2$, где $\alpha > 0$, то существует единственное вероятностное решение, причем оно имеет все моменты. В общем случае это не так, например, как уже было сказано, если $d = 2$, $A = 0$ и B — оператор поворота на $\pi/2$, то все инвариантные относительно вращений меры являются решениями, так что есть и решения, не имеющие моментов. В следствии 2.4 утверждается равносильность условия (1.6) и существования ненулевого и возможно знакопеременного решения, относительно которого $|x|^2$ может и не быть интегрируемым. В этом случае приведенное выше простое рассуждение не годится и требуется иное обоснование (1.6). Оно будет состоять в следующем: покажем, что, хотя не все решения имеют второй момент, наличие какого-то ненулевого решения дает гауссовское решение.

Нам понадобится следующее очевидное утверждение. Через $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ обозначим пространство непрерывных функций на \mathbb{R}^d с нулевым пределом на бесконечности, наделенное суп-нормой, через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — стандартное пространство гладких быстро убывающих функций.

Лемма 3.1. (i) Пусть γ — гауссовская мера на \mathbb{R}^d , Λ и T — линейные операторы на \mathbb{R}^d , причем Λ обратим, f — борелевская функция на \mathbb{R}^d и

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-k}$$

при некоторых $C, k > 0$. Тогда функция

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\Lambda x + Ty) \gamma(dy)$$

удовлетворяет оценке

$$|g(x)| \leq C_1(1 + |x|)^{-k}, \quad C_1 = C2^{k+1}(1 + \|\Lambda^{-1}\|)^k(1 + I_k), \quad I_k = \int_{\mathbb{R}^d} |Ty|^k \gamma(dy).$$

Если $f \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$, то $g \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Если дано семейство операторов Λ_t на \mathbb{R}^d с равномерно ограниченными обратными Λ_t^{-1} , то для соответствующих функций g_t число C_1 можно выбрать общим. В частности, если $\Lambda_t = e^{tB}$, где B — линейный оператор и $t \in [0, T]$, то для всякой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ полученная функция $g_t(x)$ на $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ дважды непрерывно дифференцируема, причем ее первые и вторые производные по x оцениваются через функции вида $C_m(1 + |x|)^{-m}$ при всех $m > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $|Ty| \leq |\Lambda x|/2$. Тогда $|\Lambda x + Ty| \geq |\Lambda x|/2$ и

$$|f(\Lambda x + Ty)| \leq C(1 + |\Lambda x|/2)^{-k}.$$

Значит,

$$|g(x)| \leq C(1 + |\Lambda x|/2)^{-k} + C\gamma(y : |Ty| \geq |\Lambda x|/2).$$

Первое слагаемое не больше $C2^k(1 + |\Lambda x|)^{-k}$. Второе слагаемое при $|\Lambda x| \geq 1$ по неравенству Чебышёва оценивается через $C2^k|\Lambda x|^{-k}I_k \leq C2^{k+1}I_k(1 + |\Lambda x|)^{-k}$. При $|\Lambda x| \leq 1$ второе слагаемое не превосходит $C2^k(1 + |\Lambda x|)^{-k}$. Таким образом, имеем

$$|g(x)| \leq C2^{k+1}(1 + I_k)(1 + |\Lambda x|)^{-k}.$$

Поскольку справедливо неравенство $|x| \leq \|\Lambda^{-1}\||\Lambda x|$, получаем

$$\frac{1}{1 + |\Lambda x|} \leq (1 + \|\Lambda^{-1}\|)\frac{1}{1 + |x|},$$

что дает объявленную оценку.

Аналогично получаем $g \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ при $f \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то

$$\partial_{x_i}g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(\Lambda x + Ty), Se_i \rangle \gamma(dy),$$

где $\{e_i\}$ — стандартный базис в \mathbb{R}^d , откуда по индукции заключаем, что $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Утверждение (ii) очевидно из доказательства. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть μ — ограниченная мера на \mathbb{R}^d , $L_{A,B}^*\mu = 0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. В силу формулы (1.4) и леммы 3.1, применяемой к обратимому оператору $\Lambda = e^{tB}$, имеем $\psi = T_t\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Проверим, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_{A,B}\psi d\mu = 0.$$

Возьмем функцию $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, равную 1 на единичном шаре. Положим $\eta_n(x) = \eta(x/n)$. Интегралы от функций $L_{A,B}(\eta_n\psi)$ по мере μ равны нулю. При этом

$$L_{A,B}(\eta_n\psi) = \eta_n L_{A,B}\psi + \psi L_{A,B}\eta_n + 2\langle A\nabla\psi, \nabla\eta_n \rangle.$$

Функция $L_{A,B}\psi$ ограничена и интеграл от $\eta_n L_{A,B}\psi$ по мере μ стремится к интегралу от $L_{A,B}\psi$. Функции $\psi L_{A,B}\eta_n$ поточечно сходятся к нулю и равномерно ограничены, ибо $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Поэтому интеграл от $\psi L_{A,B}\eta_n$ по мере μ стремится к нулю. Это неверно и для равномерно ограниченных функций $2\langle A\nabla\psi, \nabla\eta_n \rangle$. Итак, интеграл от $L_{A,B}T_t\varphi$ по мере μ равен нулю. Из этого следует, что интеграл от $T_t\varphi$ постоянен, так как $\partial_t(T_t\varphi) = L_{A,B}T_t\varphi$, причем функции $L_{A,B}T_t\varphi = T_t L_{A,B}\varphi$ равномерно ограничены из-за компактности носителя φ . В силу произвольности φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ можно заключить, что меры μ и

$T_t^* \mu$ равны. Из этих же рассуждений видно, что из тождества $T_t^* \mu = \mu$ следует равенство $L_{A,B}^* \mu = 0$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.2. Пусть μ — вероятностная мера, удовлетворяющая уравнению $L_{A,B}^* \mu = 0$, G_t — центрированная гауссовская мера с ковариационным оператором

$$K_t = 2 \int_0^t e^{sB} A e^{sB^*} ds.$$

В силу теоремы интегралы от функций $\exp(i\langle x, y \rangle)$ по мерам $T_t^* \mu$ не зависят от t , т. е. для преобразования Фурье меры μ имеет место тождество

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle e^{tB} x + u, y \rangle) G_t(du) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle e^{tB} x, y \rangle) \tilde{G}_t(y) \mu(dx) = \tilde{G}_t(y) \tilde{\mu}(e^{tB^*} y). \end{aligned}$$

Покажем, что операторы K_t при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к некоторому неотрицательному симметричному оператору K . Достаточно убедиться, что возрастающие неотрицательные квадратичные формы $\langle K_t y, y \rangle$ имеют конечный предел при каждом $y \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что при некотором y предел бесконечен. Тогда

$$\tilde{G}_t(y) = \exp(-\langle K_t y, y \rangle / 2) \rightarrow -\infty.$$

Поскольку $|\tilde{\mu}(e^{tB^*} y)| \leq 1$, из полученного выше тождества заключаем, что $\tilde{\mu}(y) = 0$. Это остается в силе и для всех векторов αy с $\alpha > 0$. Итак, $\tilde{\mu}(\alpha y) = 0$, откуда при $\alpha \rightarrow 0$ получаем $\tilde{\mu}(0) = 0$; противоречие, ибо $\tilde{\mu}(0) = 1$.

Обозначим через G центрированную гауссовскую меру с ковариационным оператором K . Из доказанного вытекает, что функции $\tilde{\mu}(e^{tB^*} y)$, т. е. преобразования Фурье мер $\mu \circ S_t^{-1}$, поточечно сходятся к непрерывной функции $\tilde{\mu}(y) \exp(\langle Ky, y \rangle / 2)$. Значит, по теореме Бохнера эта функция есть преобразование Фурье некоторой вероятностной меры ν (см. [15, теорема 7.13.1]). Итак, $\tilde{\mu}(y) = \tilde{\nu}(y) \tilde{G}(y)$, откуда $\mu = \nu * G$. При этом мера ν инвариантна для уравнения с нулевой матрицей диффузии, т. е. $\tilde{\nu}(e^{tB^*} y) = \tilde{\nu}(y)$ при всех $y \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$. В самом деле,

$$\tilde{\nu}(e^{tB^*} y) = \frac{\tilde{\mu}(e^{tB^*} y)}{\tilde{G}(e^{tB^*} y)} = \frac{\tilde{\mu}(e^{tB^*} y) \tilde{G}_t(y)}{\tilde{G}(e^{tB^*} y) \tilde{G}_t(y)} = \frac{\tilde{\mu}(y)}{\tilde{G}(y)} = \tilde{\nu}(y),$$

так как

$$\begin{aligned} \tilde{G}(e^{tB^*} y) \tilde{G}_t(y) &= \exp \left(- \int_0^\infty \langle e^{sB} A e^{sB^*} e^{tB^*} y, e^{tB^*} y \rangle ds - \int_0^t \langle e^{sB} A e^{sB^*} y, y \rangle ds \right) \\ &= \exp \left(- \int_0^\infty \langle e^{sB} A e^{sB^*} y, y \rangle ds \right) \end{aligned}$$

в силу равенства

$$\int_0^\infty \langle e^{sB} A e^{sB^*} e^{tB^*} y, e^{tB^*} y \rangle ds = \int_0^\infty \langle e^{(s+t)B} A e^{(s+t)B^*} y, y \rangle ds = \int_t^\infty \langle e^{sB} A e^{sB^*} y, y \rangle ds,$$

полученного заменой переменной. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.3. В силу теоремы мера μ инвариантна относительно полугруппы $\{T_t\}_{t \geq 0}$, поэтому ее положительная и отрицательная части также инвариантны (см. [7, лемма 5.1.4(iii)]). Следовательно, они пропорциональны вероятностным мерам указанного вида. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.4. Ввиду уже доказанного наличие ненулевого решения уравнения (1.1) влечет существование гауссовского решения, что в силу сказанного в начале этого раздела дает соотношение (1.6). Конечно, здесь можно было бы просто сослаться на [12], поскольку показано, что это гауссовское решение инвариантно для полугруппы, но данное нами обоснование доказывает (1.6) непосредственно. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Для всякой меры ν на \mathbb{R}^d задача Коши (1.3) на отрезке $[0, 1]$ имеет единственное решение в классе мер ограниченной вариации на $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$ вида $\mu(dx dt) = \mu_t(dx) dt$. Это вытекает из более общего результата о единственности знакопеременных решений, доказанного в нашей отдельной работе, но в рассматриваемом частном случае доказывается более просто. Для этого заметим, что при $\nu = 0$ в силу [7, предложение 6.1.2] для всякой непрерывной функции ψ на $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$ с двумя непрерывными производными, равной нулю для всех x вне некоторого шара, верно равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x, t) \mu_t(dx) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} [\partial_s \psi(x, s) + L_{A,B} \psi(x, s)] \mu_s(dx) ds.$$

Это равенство остается в силе и для дважды непрерывно дифференцируемых функций ψ , для которых условие ограниченности носителя по x заменено оценками через $C_2(1 + |x|)^{-2}$ для самой функции и первых и вторых производных по x . Действительно, как и выше, с помощью этих оценок в равенстве для функций $\eta_n(x)\psi(x, t)$ можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и воспользоваться тем, что интегралы с членами $\psi(x, t)L_{A,B}\eta_n(x)$ и $\langle A\nabla_x \psi, \nabla \eta_n \rangle$ стремятся к нулю. В частности, в силу леммы в качестве ψ можно брать функции $\psi(x, t) = T_{\tau-t}\varphi(x)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\tau \in [0, 1]$. Тогда правая часть равна нулю, значит, интеграл от $\psi(x, \tau) = \varphi(x)$ по мере μ_τ равен нулю, что в силу произвольности τ дает равенство $\mu_\tau = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arnold A., Schmeiser C., Signorello B. Propagator norm and sharp decay estimates for Fokker–Planck equations with linear drift // Commun. Math. Sci. 2022. V. 20, N 4. P. 1047–1080.
2. Богачев В. И. Операторы и полугруппы Орнштейна — Уленбека // Успехи мат. наук. 2018. Т. 73, № 2. С. 3–74.
3. Metafuno G., Pallara D., Priola E. Spectrum of Ornstein–Uhlenbeck operators in L^p spaces with respect to invariant measures // J. Funct. Anal. 2002. V. 196, N 1. P. 40–60.
4. Metafuno G., Prüss J., Rhandi A., Schnaubelt R. The domain of the Ornstein–Uhlenbeck operator on an L^p -space with invariant measure // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5). 2002. V. 1, N 2. P. 471–485.
5. Bogachev V. I., Röckner M., Stannat W. Uniqueness of invariant measures and maximal dissipativity of diffusion operators on L^1 // Infinite Dimensional Stochastic Analysis (Proceedings of the Colloquium, Amsterdam, 11–12 February, 1999), Ph. Clément, F. den Hollander, J. van Neerven and B. de Pagter eds., Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, pp. 39–54, Amsterdam, 2000.
6. Богачев В. И., Рёкнер М., Штаннат В. Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий // Мат. сб. 2002. Т. 197, № 7. С. 3–36.

7. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M., Shaposhnikov S. V. Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2015.
8. Da Prato G. Introduction to stochastic analysis and Malliavin calculus. Pisa: Edizioni della Normale, 2014.
9. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions. 2nd ed.. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2014.
10. Bogachev V. I., Röckner M., Shaposhnikov S. V. Uniqueness problems for degenerate Fokker–Planck–Kolmogorov equations // J. Math. Sci. (New York). 2015. V. 20, N 2. P. 147–165.
11. Смирнова Г. Н. Задачи Коши для параболических уравнений, вырождающихся на бесконечности // Мат. сб. 1966. Т. 112, № 4. С. 591–604.
12. Zakai M., Snyders J. Stationary probability measures for linear differential equations driven by white noise // J. Differ. Equ. 1970. V. 8. P. 27–33.
13. Snyders J., Zakai M. On nonnegative solutions of the equation $AD + DA' = -C$ // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. P. 704–714.
14. Zhang X. S. Existence and uniqueness of invariant probability measure for uniformly elliptic diffusion // Dirichlet forms and stochastic processes (Beijing, 1993), pp. 417–423, de Gruyter, Berlin, 1995.
15. Bogachev V. I. Measure theory. Berlin: Springer, 2007. V. 1, 2.

Поступила в редакцию 4 сентября 2023 г.

После доработки 4 сентября 2023 г.

Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Богачев Владимир Игоревич (ORCID 0000-0001-5249-2965),
Шапошников Станислав Валерьевич (ORCID 0000-0002-3281-7061)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
факультет математики,
ул. Усачева, 6, Москва 119048
vibogach@mail.ru,