

Общероссийский математический портал

Е. Б. Кузнецов, В. Н. Микрюков, Численное интегрирование системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007, том 47, номер 1, 83–95

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

22 марта 2025 г., 05:11:45



УДК 519.624

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ¹⁾

© 2007 г. Е. Б. Кузнецов, В. Н. Микрюков

(125993 Москва, Волоколамское ш., 4, МАИ (ГТУ))

e-mail: kuznetsov@mai.ru; v-mikryukov@mail.ru

Поступила в редакцию 22.06.2006 г.

На основе метода продолжения решения по параметру исследуется численное решение начальной задачи для системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом. Получены необходимые и достаточные условия преобразования этой задачи к наилучшему аргументу, обеспечивающему наилучшую обусловленность соответствующей системы уравнений продолжения. Таким аргументом является длина дуги, отсчитываемая вдоль интегральной кривой задачи. Разработаны алгоритмы и программы численного интегрирования задачи, основанные на методах непрерывного и дискретного продолжения. Тестовые примеры демонстрируют эффективность предложенного преобразования. Библ. 17. Фиг. 4.

Ключевые слова: система дифференциально-алгебраических уравнений, запаздывающий аргумент, наилучший параметр, непрерывное и дискретное продолжения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим решение начальной задачи для системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом. Проблема заключается в том, что требуется найти решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, \dot{x}_\tau, t), \\ G(y, x, t) &= 0, \quad t \in [t_0, t_*], \end{aligned} \quad (1.1)$$

удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} y(t) &= \phi(t), \quad \dot{y}(t) = \psi(t), \quad x(t) = v(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ y(t_0) &= \phi(t_0) = y_0, \quad x(t_0) = v(t_0) = x_0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\phi(t)$, $\psi(t)$, $v(t)$ – заданные непрерывные функции $y_\tau(t) = y(t - \tau)$, $\dot{y}_\tau = \dot{y}(t - \tau)$, $x_\tau(t) = x(t - \tau)$, $\tau > 0$,

$$f: \mathbb{R}^{3n+2m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad G: \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Точка означает дифференцирование по переменной t . Начальные условия (1.2) должны быть согласованными, т.е. в начальной точке t_0 должно выполняться равенство

$$G(y(t_0), x(t_0), t_0) = 0.$$

При отсутствии запаздывания ($\tau = 0$) задача (1.1), (1.2) является задачей Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений, численное решение которой исследуется во многих работах (см., например, [1]). Преобразование этой задачи к наилучшему (в смысле метода продолжения решения по параметру) аргументу приводится в [2]–[4].

При отсутствии недифференциальных соотношений (вектор-функции G) задача (1.1), (1.2) является начальной задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запазды-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 06-01-00239, 06-08-00371).

вающим аргументом, численное решение которой исследуется, например, в [5]. Преобразование этой задачи к наилучшему аргументу получено в [4], [6].

В то же время численное решение начальной задачи (1.1), (1.2), по мнению авторов, не изучено.

2. НАИЛУЧШИЙ АРГУМЕНТ ЗАДАЧИ

Пусть решение задачи (1.1), (1.2) задается соотношением

$$F(y, x, t) = 0, \quad F: \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \quad (2.1)$$

которое в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n+m+1} $\{y, x, t\}$ определяет единственную гладкую интегральную кривую с началом в точке

$$y = y_0, \quad x = x_0, \quad t = t_0. \quad (2.2)$$

Соотношения (2.1) можно рассматривать как систему нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, содержащих параметр t , который, очевидно, является аргументом задачи (1.1), (1.2).

Используя метод продолжения решения по параметру, строим кривую множества решений системы уравнений (2.1) с началом в точке (2.2). Эта кривая получается, если решать систему (2.1) при различных значениях параметра задачи $t \in [t_0, t_*]$. Полагая, что переменные y_i ($i = \overline{1, n}$), x_j , ($j = \overline{1, m}$) являются функциями параметра задачи t , уравнения продолжения строим дифференцированием соотношений (2.1) по t :

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (2.3)$$

Для построения кривой множества решений, описываемой соотношениями (2.1), систему линейных уравнений (2.3) следует разрешить относительно производных dy/dt , dx/dt , т.е. привести ее к нормальной форме Коши. При этом, учитывая начальные условия (2.2), получаем начальную задачу для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} dy/dt \\ dx/dt \end{pmatrix} = - \left[\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

При разрешении системы уравнений (2.3), линейных относительно производных, могут возникнуть значительные вычислительные трудности, если матрица системы является плохо обусловленной, поэтому параметр t , по которому производится дифференцирование, не всегда может оказаться удачным. Следовательно, можно поставить вопрос о выборе наилучшего в некотором смысле параметра продолжения решения системы (2.1), а значит, наилучшего аргумента задачи (1.1), (1.2).

Пусть величины y, x, t являются функциями некоторого аргумента μ , отсчитываемого от точки (2.2), приращение которого в каждой точке интегральной кривой задачи (1.1), (1.2) представим в виде

$$\Delta \mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta y_i + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+n} \Delta x_j + \alpha_{n+m+1} \Delta t. \quad (2.4)$$

Здесь α_k ($k = \overline{1, n+m+1}$) – компоненты вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+m+1})^T \in \mathbb{R}^{n+m+1}$, задающего направление оси, вдоль которой отсчитывается аргумент μ .

Для того чтобы все направления были равноправными, вектор α должен иметь постоянную длину. Пусть это будет единичный вектор, т.е.

$$\alpha^2 = \sum_{k=1}^{n+m+1} \alpha_k^2 = 1. \quad (2.5)$$

Правую часть равенства (2.4) можно рассматривать как скалярное произведение вектора α на вектор приращения функций. Придавая компонентам вектора α различные значения, можно рас-

смотреть все возможные параметры продолжения, а значит, и аргументы. Так, при $\alpha = (0, \dots, 0, 1)^T$ в качестве параметра продолжения принимается переменная t .

Уравнения продолжения решения не могут быть получены дифференцированием (2.1) по параметру μ , так как эти соотношения до решения задачи (1.1), (1.2) неизвестны.

Но уравнения продолжения могут быть получены другим способом. Пусть задача (1.1), (1.2) имеет единственную гладкую интегральную кривую. Тогда системы уравнений (1.1) и (2.1) с учетом начальных условий задают одну и ту же кривую и, следовательно, в качестве уравнений продолжения решения может быть использована система (1.1). Уравнения продолжения получим, если равенство (2.4) разделим на $\Delta\mu \rightarrow 0$, а систему (1.1), продифференцировав функцию G по μ , перепишем с учетом равенства

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy/d\mu}{dt/d\mu}.$$

Тогда приходим к следующей системе уравнений продолжения:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{i,\mu} + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+n} x_{j,\mu} + \alpha_{n+m+1} t_{,\mu} &= 1, \\ y_{,\mu} - f(y(\mu), y(t(\mu) - \tau), \dot{y}(t(\mu) - \tau), x(\mu), x(t(\mu) - \tau), t(\mu))t_{,\mu} &= 0, \\ G_{,y}y_{,\mu} + G_{,x}x_{,\mu} + G_{,t}t_{,\mu} &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$y_{i,\mu} = \frac{dy_i}{d\mu}, \quad x_{i,\mu} = \frac{dx_i}{d\mu}, \quad t_{,\mu} = \frac{dt}{d\mu}, \quad G_{,y} = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad G_{,x} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad G_{,t} = \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Кривая (2.1), являясь решением задачи (1.1), (1.2), в то же время является интегральной кривой системы уравнений (2.6). Для нахождения этой кривой систему (2.6) следует разрешить относительно производных $y_{i,\mu}, x_{j,\mu}, t_{,\mu}$. Успех этой операции зависит от обусловленности системы. Обусловленность же зависит от выбора параметра μ , который определяется вектором α .

В качестве меры обусловленности системы линейных уравнений примем (см. [7]) величину определителя этой системы Δ , деленную на произведение квадратичных норм его строк d . Обозначим меру обусловленности через D . В силу неравенства Адамара, для определителей абсолютная величина D удовлетворяет условию $0 \leq |D| \leq 1$. Значение $D = 0$ соответствует вырожденной матрице системы, а $|D| = 1$ означает, что система уравнений является, в терминологии [7], идеально обусловленной.

Назовем наилучшим такой аргумент задачи, который доставляет системе уравнений (2.6) наилучшую обусловленность, т.е. наибольшее абсолютное значение меры обусловленности D .

Раскрыв определитель системы Δ по элементам его первой строки, получим

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n+m+1} (-1)^{k+1} \alpha_k \Delta_k. \tag{2.7}$$

Здесь Δ_k – определитель, получающийся при вычеркивании в матрице системы последних $n + m$ уравнений k -го столбца.

Тогда $D = \Delta/d$, где $d = d_1 \dots d_{n+m+1} > 0$. Здесь

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n+m+1} \alpha_k^2} = 1, \\ d_{\beta+1} &= \sqrt{1 + f_{\beta}^2}, \quad \beta = \overline{1, n}, \\ d_{\nu+n+1} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n G_{\nu, y_i}^2 + \sum_{j=1}^m G_{\nu, x_j}^2 + G_{\nu, t}^2}, \quad \nu = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Заметим, что так как α – единичный вектор, то в равенствах (2.8) имеем $d_1 = 1$, а величина d не зависит от компонент α_k ($k = \overline{1, n+m+1}$).

Согласно правилу Крамера, решение системы (2.6) можно представить следующим образом:

$$\frac{dy_i}{d\mu} = (-1)^{i+1} \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \frac{dx_j}{d\mu} = (-1)^{n+j+1} \frac{\Delta_{n+j}}{\Delta}, \quad \frac{dt}{d\mu} = (-1)^{n+m} \frac{\Delta_{n+m+1}}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.9)$$

Начальные условия примут вид

$$\begin{aligned} y(\mu) &= \phi(\mu), \quad \dot{y}(\mu) = \psi(\mu), \quad x(\mu) = v(\mu), \quad \mu \in [-\mu_\tau, 0), \\ y(0) &= \phi(t_0) = y_0, \quad x(0) = v(t_0) = x_0, \quad t(0) = t_0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где величина μ_τ находится из решения уравнения $t_0 - \tau = t(-\mu_\tau)$.

В условиях (2.10) переменная μ отсчитывается от начальной точки задачи (1.1), (1.2).

Теорема. Пусть начальная задача (1.1), (1.2) для системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом имеет единственную гладкую интегральную кривую. Для того чтобы эту задачу преобразовать к наилучшему аргументу, необходимо и достаточно выбрать в качестве такового длину дуги λ , отсчитываемую от начальной точки вдоль интегральной кривой. Тогда задача (1.1), (1.2) преобразуется к виду (2.9), (2.10) при $\mu = \lambda$.

Доказательство. Необходимость. Для нахождения экстремума функции D при условии (2.5) составим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n+m+1} (-1)^{k+1} \alpha_k \Delta_k + \gamma \left(1 - \sum_{k=1}^{n+m+1} \alpha_k^2 \right).$$

Здесь γ – множитель Лагранжа.

Необходимые условия экстремума функции L задаются соотношениями

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = (-1)^{k+1} \frac{\Delta_k}{d} - 2\gamma \alpha_k = 0, \quad k = \overline{1, n+m+1},$$

которые удовлетворяются при $\alpha_k = (-1)^{k+1} \frac{\Delta_k}{2\gamma d}$.

Из условия $\alpha^2 = 1$ определяется множитель Лагранжа

$$\gamma = \pm \frac{\left(\sum_{i=1}^{n+m+1} \Delta_i^2 \right)^{1/2}}{2d}. \quad (2.11)$$

Таким образом, экстремум функции Лагранжа достигается при

$$\alpha_k = \pm (-1)^{k+1} \frac{\Delta_k}{\left(\sum_{i=1}^{n+m+1} \Delta_i^2 \right)^{1/2}}, \quad k = \overline{1, n+m+1}.$$

Если выражения для α_k подставить в равенство (2.7), то определитель системы будет удовлетворять равенству

$$\Delta = \pm \left(\sum_{i=1}^{n+m+1} \Delta_i^2 \right)^{1/2} \quad (2.12)$$

и экстремум функции Лагранжа достигается при значениях

$$\alpha_k = (-1)^{k+1} \frac{\Delta_k}{\Delta}. \quad (2.13)$$

Сравнивая эти значения с правыми частями системы (2.9), видим, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} \alpha_i &= y_{i,\mu}, \quad i = \overline{1, n}, \\ \alpha_{j+n} &= x_{j,\mu}, \quad j = \overline{1, m}, \\ \alpha_{n+m+1} &= t_\mu, \end{aligned} \tag{2.14}$$

которые показывают, что направление, в котором отсчитывается наилучший аргумент λ , должно быть касательным к интегральной кривой задачи (1.1), (1.2).

С учетом равенств (2.14) первое уравнение системы (2.6) можно записать в виде

$$d\mu^2 = \sum_{i=1}^n dy_i^2 + \sum_{j=1}^m dx_j^2 + dt^2, \tag{2.15}$$

откуда следует, что

$$d\mu = d\lambda = \left(\sum_{i=1}^n dy_i^2 + \sum_{j=1}^m dx_j^2 + dt^2 \right)^{1/2}$$

является дифференциалом длины дуги λ интегральной кривой задачи (1.1), (1.2). Если положить, что начальной точке этой задачи соответствует значение $\lambda = 0$, то параметр продолжения λ будет равен длине интегральной кривой, отсчитываемой от этой точки.

Покажем, что при значениях компонент вектора α , определяемых формулами (2.13), абсолютная величина функции D принимает наибольшее значение. В этом легко убедиться, учитывая, что знакоопределенность второго дифференциала функции Лагранжа $d^2L = -\gamma \sum_{k=1}^{n+m+1} d\alpha_k^2$ зависит от знака множителя Лагранжа γ . Знак же множителя γ совпадает со знаком определителя Δ , так как, согласно (2.11), (2.12), $\gamma = \Delta/2d$.

Следовательно, при значениях α_k , вычисляемых по формулам (2.13), функция $|D|$, определяющая меру обусловленности системы (2.6), принимает наибольшее значение, а это значит, что система (2.6) будет наилучшим образом обусловленной. Необходимость доказана.

Достаточность. Выберем в качестве аргумента системы уравнений (1.1) длину дуги λ , вычисляемую вдоль интегральной кривой задачи (1.1), (1.2). Вектор τ , касательный к этой кривой, будет равен $\tau = (y_{i,\lambda}, x_{j,\lambda}, t_\lambda)^T$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$). Как отмечалось ранее, смысл единичного вектора α заключается в том, что он определяет направление выбора аргумента задачи (1.1), (1.2). Следовательно, векторы α и τ должны быть коллинеарными. Однако они не только коллинеарны, но и равны, так как вектор τ , как и α , является единичным. В самом деле, дифференциал длины интегральной кривой задачи (1.1), (1.2) должен удовлетворять равенству (2.15), в котором следует положить $d\mu = d\lambda$. Если обе части этого равенства разделить на $d\lambda^2$, то получим

$$\tau^2 = \sum_{i=1}^n y_{i,\lambda}^2 + \sum_{j=1}^m x_{j,\lambda}^2 + t_\lambda^2 = 1.$$

Из равенства векторов следует равенство компонент (2.14).

Компоненты же $y_{i,\lambda}, x_{j,\lambda}, t_\lambda$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$) при любом параметре продолжения μ должны удовлетворять системе уравнений (2.6), т.е. определяться в соответствии с формулами (2.9). Из соотношений (2.14) и (2.9) вытекают равенства (2.13), левая часть которых доставляет наибольшее значение функции $|D|$, а следовательно, наилучшую обусловленность системе (2.6). Теорема доказана.

Основываясь на этом обстоятельстве, сформулируем алгоритмы решения систем дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом.

3. МЕТОД НЕПРЕРЫВНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Идея метода непрерывного продолжения решения по параметру, по-видимому, впервые была предложена Д.Ф. Давиденко (см. [8], [9]).

Запишем для задачи (1.1), (1.2) уравнения продолжения решения по параметру t , т.е. без преобразования ее к наилучшему параметру.

Продифференцируем вектор-функцию G по переменной t и запишем систему (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_i - f_i &= 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ G_{,y_i} \dot{y}_i + G_{,x_j} \dot{x}_j + G_{,t} &= 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам в оговоренных пределах.

Разрешив систему (3.1) относительно функций \dot{y}_i ($i = \overline{1, n}$) и \dot{x}_j ($j = \overline{1, m}$), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= F_{y_i}(y(t), y_\tau(t), \dot{y}_\tau(t), x(t), x_\tau(t), t), \quad i = \overline{1, n}, \\ \dot{x}_j &= F_{x_j}(y(t), y_\tau(t), \dot{y}_\tau(t), x(t), x_\tau(t), t), \quad j = \overline{1, m}, \\ t &\in [t_0, t_*], \end{aligned} \quad (3.2)$$

которую следует решать при начальных условиях (1.2).

Функции, стоящие в правой части системы (3.2), имеют вид

$$F_{y_i} = \Delta_{y_i} / \Delta, \quad F_{x_j} = \Delta_{x_j} / \Delta.$$

Здесь Δ – определитель матрицы системы (3.1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} E & \mathbf{0} \\ G_{,y} & G_{,x} \end{vmatrix} = |G_{,x}|,$$

Δ_{y_i} – определитель матрицы, полученной заменой в матрице системы i -го столбца, а Δ_{x_j} – заменой $(n + j)$ -го столбца вектором правой части системы $(f, -G_{,t})^T$.

Нетрудно видеть, что

$$F_{y_i}(y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, t) = f_i(y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, t).$$

Преобразуем задачу (1.1), (1.2) к наилучшему аргументу, которым, как отмечалось ранее, является длина дуги λ , вычисляемая вдоль интегральной кривой задачи. Пусть кривая, задаваемая функциями $y = y(\lambda)$, $x = x(\lambda)$, $t = t(\lambda)$, является гладкой. Введем обозначения

$$\frac{dy}{d\lambda} = Y, \quad \frac{dx}{d\lambda} = X, \quad \frac{dt}{d\lambda} = T, \quad (3.3)$$

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T, \quad X = (X_1, \dots, X_m)^T.$$

После дифференцирования по λ вектор-функции G , принимая во внимание соотношения (3.3) и смысл наилучшего аргумента, записываем систему (1.1) в виде

$$\begin{aligned} Y_i - f_i T &= 0, \\ G_{,y_i} Y_i + G_{,x_j} X_j + G_{,t} T &= 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$Y^2 + X^2 + T^2 = 1.$$

Разрешая нелинейную систему (3.4) относительно Y_i , X_j , T , получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу λ :

$$\begin{aligned} Y_i &= \Phi_{y_i}(y(\lambda), y_\tau(\lambda), \dot{y}_\tau(\lambda), x(\lambda), x_\tau(\lambda), t(\lambda)), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \\ X_j &= \Phi_{x_j}(y(\lambda), y_\tau(\lambda), \dot{y}_\tau(\lambda), x(\lambda), x_\tau(\lambda), t(\lambda)), \\ T &= \Phi_t(y(\lambda), y_\tau(\lambda), \dot{y}_\tau(\lambda), x(\lambda), x_\tau(\lambda), t(\lambda)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\lambda \in [0, \Lambda],$$

которую следует интегрировать при начальных условиях

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= \phi(\lambda), \quad \dot{y}(\lambda) = \psi(\lambda), \quad x(\lambda) = v(\lambda), \quad \lambda \in [-\lambda_\tau, 0), \\ y(0) &= \phi(t_0) = y_0, \quad x(0) = v(t_0) = x_0, \quad t(0) = t_0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где величина λ_τ находится из решения уравнения $t_0 - \tau = t(-\lambda_\tau)$, а константа Λ удовлетворяет соотношению $t(\Lambda) = t_*$, $y_\tau(\lambda) = y(t(\lambda) - \tau)$, $\dot{y}_\tau(\lambda) = \dot{y}(t(\lambda) - \tau)$, $x_\tau(\lambda) = x(t(\lambda) - \tau)$.

Правые части системы (3.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{y_i} &= \pm \Delta_{y_i} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_{y_i}^2 + \sum_{j=1}^m \Delta_{x_j}^2 + \Delta^2 \right)^{-1/2}, \quad \Phi_{x_j} = \pm \Delta_{x_j} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_{y_i}^2 + \sum_{j=1}^m \Delta_{x_j}^2 + \Delta^2 \right)^{-1/2}, \\ \Phi_t &= \pm \Delta \left(\sum_{i=1}^n \Delta_{y_i}^2 + \sum_{j=1}^m \Delta_{x_j}^2 + \Delta^2 \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Выбор знака + или – определяет направление изменения параметра λ вдоль интегральной кривой в процессе решения задачи (3.5), (3.6).

Принципиальной особенностью систем дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом является наличие у аналитического решения начальной задачи угловых точек – точек, в которых производные решения, начиная с некоторого порядка, не являются непрерывными функциями. Этот факт может иметь место вне зависимости от гладкости правой части уравнений и начальных функций ϕ и ψ , а устраняется, только если начальные функции удовлетворяют специальным условиям согласования (см. [10]).

Построение надежного алгоритма численного решения начальной задачи для системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом требует для обеспечения необходимого порядка гладкости создания методики учета недостаточной гладкости точного решения. Наиболее эффективной и распространенной методикой из известных является включение угловых точек в число точек сетки численного интегрирования. Такой подход позволяет сохранить порядки используемого метода интерполяции решения в момент с запаздыванием и адаптируемого метода численного интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что если значения в угловых точках, соответствующих переменной t решения системы уравнений (1.1), могут быть определены до начала решения, то их значения, соответствующие переменной λ , не могут быть определены до начала решения, поскольку вид зависимости $t(\lambda)$ неизвестен (см. [11]). Ниже будет показан способ преодоления этих трудностей.

Для численного решения как непреобразованной, так и преобразованной к наилучшему аргументу системы дифференциальных уравнений применим метод Эйлера–Коши, имеющий второй порядок точности.

Расчетные формулы метода Эйлера–Коши численного интегрирования задачи (3.2), (1.2) имеют вид

$$\begin{aligned} y_i^{(k+1)} &= y_i^{(k)} + \frac{h_{ik}}{2} (F_{y_i}^{(k)} + F_{y_i}(y^{(k)} + h_{ik}F_{y_i}^{(k)}, y_\tau^{(k+1)}, \dot{y}_\tau^{(k+1)}, x^{(k)} + h_{ik}F_{x_j}^{(k)}, x_\tau^{(k+1)}, t^{(k+1)})), \\ x_j^{(k+1)} &= x_j^{(k)} + \frac{h_{jk}}{2} (F_{x_j}^{(k)} + F_{x_j}(y^{(k)} + h_{ik}F_{y_i}^{(k)}, y_\tau^{(k+1)}, \dot{y}_\tau^{(k+1)}, x^{(k)} + h_{ik}F_{x_j}^{(k)}, x_\tau^{(k+1)}, t^{(k+1)})), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned} t^{(k+1)} &= t^{(k)} + h_{ik}, \\ F_{y_i}^{(k)} &= F_{y_i}(y^{(k)}, y_\tau^{(k)}, \dot{y}_\tau^{(k)}, x^{(k)}, x_\tau^{(k)}, t^{(k)}), \quad F_{x_j}^{(k)} = F_{x_j}(y^{(k)}, y_\tau^{(k)}, \dot{y}_\tau^{(k)}, x^{(k)}, x_\tau^{(k)}, t^{(k)}), \\ y_\tau^{(k)} &= y(t^{(k)} - \tau), \quad \dot{y}_\tau^{(k)} = \dot{y}(t^{(k)} - \tau), \quad x_\tau^{(k)} = x(t^{(k)} - \tau). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для преобразованной задачи (3.5), (3.6) формулы Эйлера–Коши примут вид

$$\begin{aligned} y_i^{(k+1)} &= y_i^{(k)} + \frac{h_{\lambda k}}{2} (\Phi_{y_i}^{(k)} + \Phi_{y_i}(y^{(k)} + h_{\lambda k} \Phi_{y_i}^{(k)}, y_{\tau}^{(k+1)}, \dot{y}_{\tau}^{(k+1)}, x^{(k)} + h_{\lambda k} \Phi_{x_j}^{(k)}, x_{\tau}^{(k+1)}, t^{(k)} + h_{\lambda k} \Phi_t^{(k)})), \\ x_j^{(k+1)} &= x_j^{(k)} + \frac{h_{\lambda k}}{2} (\Phi_{x_j}^{(k)} + \Phi_{x_j}(y^{(k)} + h_{\lambda k} \Phi_{y_i}^{(k)}, y_{\tau}^{(k+1)}, \dot{y}_{\tau}^{(k+1)}, x^{(k)} + h_{\lambda k} \Phi_{x_j}^{(k)}, x_{\tau}^{(k+1)}, t^{(k)} + h_{\lambda k} \Phi_t^{(k)})), \quad (3.9) \\ t^{(k+1)} &= t^{(k)} + \frac{h_{\lambda k}}{2} (\Phi_t^{(k)} + \Phi_t(y^{(k)} + h_{\lambda k} \Phi_{y_i}^{(k)}, y_{\tau}^{(k+1)}, \dot{y}_{\tau}^{(k+1)}, x^{(k)} + h_{\lambda k} \Phi_{x_j}^{(k)}, x_{\tau}^{(k+1)}, t^{(k)} + h_{\lambda k} \Phi_t^{(k)})), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda^{(k+1)} &= \lambda^{(k)} + h_{\lambda k}, \\ \Phi_{y_i}^{(k)} &= \Phi_{y_i}(y^{(k)}, y_{\tau}^{(k)}, \dot{y}_{\tau}^{(k)}, x^{(k)}, x_{\tau}^{(k)}, t^{(k)}), \quad \Phi_{x_j}^{(k)} = \Phi_{x_j}(y^{(k)}, y_{\tau}^{(k)}, \dot{y}_{\tau}^{(k)}, x^{(k)}, x_{\tau}^{(k)}, t^{(k)}), \\ \Phi_t^{(k)} &= \Phi_t(y^{(k)}, y_{\tau}^{(k)}, \dot{y}_{\tau}^{(k)}, x^{(k)}, x_{\tau}^{(k)}, t^{(k)}), \\ y_{\tau}^{(k)} &= y(t^{(k)} - \tau), \quad \dot{y}_{\tau}^{(k)} = \dot{y}(t^{(k)} - \tau), \quad x_{\tau}^{(k)} = x(t^{(k)} - \tau); \end{aligned} \quad (3.10)$$

здесь $y^{(k)}, x^{(k)}, t^{(k)}, \lambda^{(k)}$ – значения переменных y, x, t, λ , вычисленные на k -м шаге.

Рассмотрим вопрос выбора шага интегрирования задач (3.2), (1.2) и (3.5), (3.6). Пусть на интервале $(t^{(k)}, t^{(k+1)})$ аналитическое решение исходной задачи (1.1), (1.2) не имеет угловых точек (здесь $t^{(k+1)}$ получено по формуле (3.8) с шагом $h_{ik} = \tilde{h}$, где \tilde{h} – заданное значение шага интегрирования), тогда решение $(y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^{(k+1)})$ преобразованной задачи (3.2), (1.2) будем искать по формулам (3.7), (3.8) с шагом $h_{ik} = \tilde{h}$, в противном случае – с шагом $h_{ik} = t^* - t^{(k)}$, где t^* – угловая точка, содержащаяся в интервале $(t^{(k)}, t^{(k+1)})$.

Решение $(y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^{(k+1)})$ преобразованной задачи (3.5), (3.6) в случае, если на интервале $(t^{(k)}, t^{(k+1)})$ нет угловых точек (здесь $t^{(k+1)}$ получено по формуле (3.9) с шагом $h_{\lambda k} = \tilde{h}$), будем искать по формулам (3.9), (3.10) с шагом $h_{\lambda k} = \tilde{h}$. Если же на интервале $(t^{(k)}, t^{(k+1)})$ содержится угловая точка, то решение $(y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^{(k+1)})$ преобразованной задачи будем искать по формулам (3.7), (3.8) с шагом $h_{\lambda k} = t^* - t^{(k)}$, где t^* – угловая точка, содержащаяся в интервале $(t^{(k)}, t^{(k+1)})$.

Правые части уравнений (3.7), (3.9) зависят от функций $y(t^{(k)} - \tau)$, $\dot{y}(t^{(k)} - \tau)$, $x(t^{(k)} - \tau)$, причем в общем случае точки $\theta = t^{(k)} - \tau$ не входят в состав точек сетки интегрирования, т.е. $t^{(k-N_{\tau})} < \theta \leq t^{(k-N_{\tau}+1)}$. Здесь $N_{\tau} \in \mathbb{N}$, $t^{(k)}$ – значение переменной t на текущем шаге интегрирования. В качестве значений $y(\theta)$, $\dot{y}(\theta)$, $x(\theta)$ будем брать результаты процедур интерполяции решения. Причем, так как погрешность интерполирования существенно зависит от гладкости функции (см. [12]), узлы интерполирования будем выбирать так, чтобы между ними не было угловых точек функций y и x .

При решении задачи (1.1), (1.2) будем строить интерполяционные полиномы второго порядка. Этого достаточно для того, чтобы метод Эйлера–Коши, определенный формулами (3.7)–(3.10), был методом второго порядка.

4. МЕТОД ДИСКРЕТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Идея метода дискретного продолжения решения по параметру впервые была предложена Лаэем (см. [13], [14]).

Рассмотрим дискретное продолжение решения по наилучшему параметру (см. [15], [16]). В этом случае очередная точка $(y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^{(k+1)})$ решения задачи (1.1), (1.2) определяется как точка пересечения интегральной кривой K и гиперболы S с центром в ранее найденной точке $(y^{(k)}, x^{(k)}, t^{(k)})$ интегральной кривой. Радиус гиперболы равен h_k и соответствует изменению параметра λ в $(n + m + 1)$ -мерном пространстве $\mathbb{R}^{n+m+1}\{y, x, t\}$.

При выполнении условия непрерывности интегральной кривой K и выборе достаточно малого радиуса h_k сферы S такая задача определения точки пересечения кривой K со сферой S имеет два решения. Будем искать точку $(y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^{(k+1)})$, соответствующую большему значению длины интегральной кривой K , отсчитываемой от начальной точки. Так же как и в методе непрерывного продолжения, будем включать угловые точки решения в число точек сетки.

В предположении дифференцируемости функций $y(\lambda)$ и $t(\lambda)$ и с учетом равенства $\frac{dy}{dt} = \frac{dy/d\lambda}{dt/d\lambda}$ перепишем систему уравнений (1.1), дополнив ее уравнением сферы радиуса h_k с центром в найденной на предыдущем шаге точки $(y^{(k)}, x^{(k)}, t^{(k)})$, причем дифференциальное соотношение запишем в точке $(y^{(k+1/2)}, x^{(k+1/2)}, t^{(k+1/2)})$, где

$$y^{(k+1/2)} = \frac{y^{(k)} + y^{(k+1)}}{2}, \quad x^{(k+1/2)} = \frac{x^{(k)} + x^{(k+1)}}{2}, \quad t^{(k+1/2)} = \frac{t^{(k)} + t^{(k+1)}}{2},$$

заменяв производные $\left. \frac{dy}{d\lambda} \right|_{\lambda = \lambda^{(k)} + h/2}$ и $\left. \frac{dt}{d\lambda} \right|_{\lambda = \lambda^{(k)} + h/2}$ разностной аппроксимацией второго порядка вида

$$\left. \frac{dy}{d\lambda} \right|_{\lambda = \lambda^{(k)} + h/2} = \frac{y^{(k+1)} - y^{(k)}}{h_k}, \quad \left. \frac{dt}{d\lambda} \right|_{\lambda = \lambda^{(k)} + h/2} = \frac{t^{(k+1)} - t^{(k)}}{h_k}. \quad (4.1)$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{d\lambda} \right|_{\lambda^{(k)} + h/2} &= f^{(k+1/2)} \left. \frac{dt}{d\lambda} \right|_{\lambda^{(k)} + h/2}, \\ G(y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^{(k+1)}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)})^2 + \sum_{j=1}^m (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)})^2 + (t^{(k+1)} - t^{(k)})^2 &= h_k^2, \\ y^{(0)} = y(t_0), \quad x^{(0)} = x(t_0), \quad t^{(0)} = t_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} f^{(k+1/2)} &= f(y^{(k+1/2)}, y_\tau^{(k+1/2)}, \dot{y}_\tau^{(k+1/2)}, x^{(k+1/2)}, x_\tau^{(k+1/2)}, t^{(k+1/2)}), \\ y_\tau^{(k+1/2)} &= y(t^{(k+1/2)} - \tau), \quad \dot{y}_\tau^{(k+1/2)} = \dot{y}(t^{(k+1/2)} - \tau), \quad x_\tau^{(k+1/2)} = x(t^{(k+1/2)} - \tau), \end{aligned}$$

а производные $\left. \frac{dy}{d\lambda} \right|_{\lambda^{(k)} + h/2}$ и $\left. \frac{dt}{d\lambda} \right|_{\lambda^{(k)} + h/2}$ определены в соответствии с формулами (4.1).

Система (4.2) является системой нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^{(k+1)}, k = 0, 1, \dots, N_T - 1$ (здесь N_T удовлетворяет неравенству $t^{(N_T)} \geq t_*$). Будем решать ее методом Ньютона с заданной точностью. В качестве шага h_k примем заданное значение \tilde{h} . Если на интервале $(t^{(k)}, t^{(k+1)})$, где $t^{(k+1)}$ – решение системы (4.2) с шагом $h_k = \tilde{h}$, содержится угловая точка, то точку $(y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^{(k+1)})$ интегральной кривой будем искать, как решение системы

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{d\lambda} \right|_{\lambda^{(k)} + h/2} &= \left[\left. f^{(k+1/2)} \frac{dt}{d\lambda} \right|_{\lambda^{(k)} + h/2} \right]_{t^{(k+1)} = t^*}, \\ G(y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^{(k+1)}) \Big|_{t^{(k+1)} = t^*} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

в гиперплоскости $t = t^*$, где t^* – угловая точка, содержащаяся на интервале $(t^{(k)}, t^{(k+1)})$, а производные $\left. \frac{dy}{d\lambda} \right|_{\lambda^{(k)} + h/2}$ и $\left. \frac{dt}{d\lambda} \right|_{\lambda^{(k)} + h/2}$ определены по формулам (4.1). В этом случае мы не можем определить значение h_k , так как не знаем значения переменной λ , соответствующего угловой точке t^* . Поэтому в качестве шага h_k можно взять приближенное значение расстояния между точками

$(y^{(k)}, x^{(k)}, t^{(k)})$ и $(y^{(k+1)}, x^{(k+1)}, t^*)$, вычисляемое следующим образом:

$$h_k = h_{k-1} \frac{t^* - t^{(k)}}{t^{(k)} - t^{(k-1)}}.$$

Решение системы (4.3) также будем искать при помощи метода Ньютона с заданной точностью.

Для того чтобы метод Ньютона эффективно сходился к искомому решению, необходимо выбрать начальное приближение максимально близко к точному решению системы. Пусть на предыдущих шагах нами найдены точки $(y^{(k-1)}, x^{(k-1)}, t^{(k-1)})$ и $(y^{(k)}, x^{(k)}, t^{(k)})$ и k -я точка не является угловой точкой решения. Тогда в качестве начального приближения на $(k+1)$ -м шаге выберем точку на прямой, проходящей через точки $(y^{(k-1)}, x^{(k-1)}, t^{(k-1)})$ и $(y^{(k)}, x^{(k)}, t^{(k)})$ и находящуюся на расстоянии h_k от точки $(y^{(k)}, x^{(k)}, t^{(k)})$ в сторону увеличения длины интегральной кривой, координаты которой вычисляются по формулам (см. [16])

$$\begin{aligned} y_{i(0)} &:= \frac{h_k}{h_{k-1}}(y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)}) + y_i^{(k)}, \\ x_{j(0)} &:= \frac{h_k}{h_{k-1}}(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}) + x_j^{(k)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \\ t_{(0)} &:= \frac{h_k}{h_{k-1}}(t^{(k)} - t^{(k-1)}) + t^{(k)}. \end{aligned}$$

Если же $(y^{(k)}, x^{(k)}, t^{(k)})$ – угловая точка, то начальное приближение будем искать как решение системы

$$\begin{aligned} y' - [f(y_{(0)}, y_{\tau(0)}, \dot{y}_{\tau(0)}, x_{(0)}, x_{\tau(0)}, t_{(0)}) \cdot t'] \Big|_{t=t^{(k)}+\Delta t} &= 0, \\ G(y_{(0)}, x_{(0)}, t_{(0)}) \Big|_{t=t^{(k)}+\Delta t} &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

в гиперплоскости $t = t^{(k)} + \Delta t$, где Δt – заданная малая величина порядка малости h . В системе уравнений (4.4) соотношения

$$y' = \frac{y_{(0)} - y^{(k)}}{h_k}, \quad t' = \frac{t_{(0)} - t^{(k)}}{h_k}$$

определяют разностные аппроксимации первого порядка производных $dy/d\lambda$ и $dt/d\lambda$ соответственно, а

$$y_{\tau(0)} = y(t_{(0)} - \tau), \quad \dot{y}_{\tau(0)} = \dot{y}(t_{(0)} - \tau), \quad x_{\tau(0)} = x(t_{(0)} - \tau).$$

В качестве начального приближения для метода Ньютона при решении системы уравнений (4.4) принимается значение $(y^{(k)}, x^{(k)})$, а функции $y(t^{(k)} - \tau)$, $\dot{y}(t^{(k)} - \tau)$ и $x(t^{(k)} - \tau)$ определяются так же, как и в методе непрерывного продолжения.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим результаты численного решения, полученные методами непрерывного и дискретного продолжения.

В первых двух примерах продемонстрированы результаты решения задач, описываемых уравнением с запаздывающим аргументом нейтрального типа (см. [17]) при различных начальных данных.

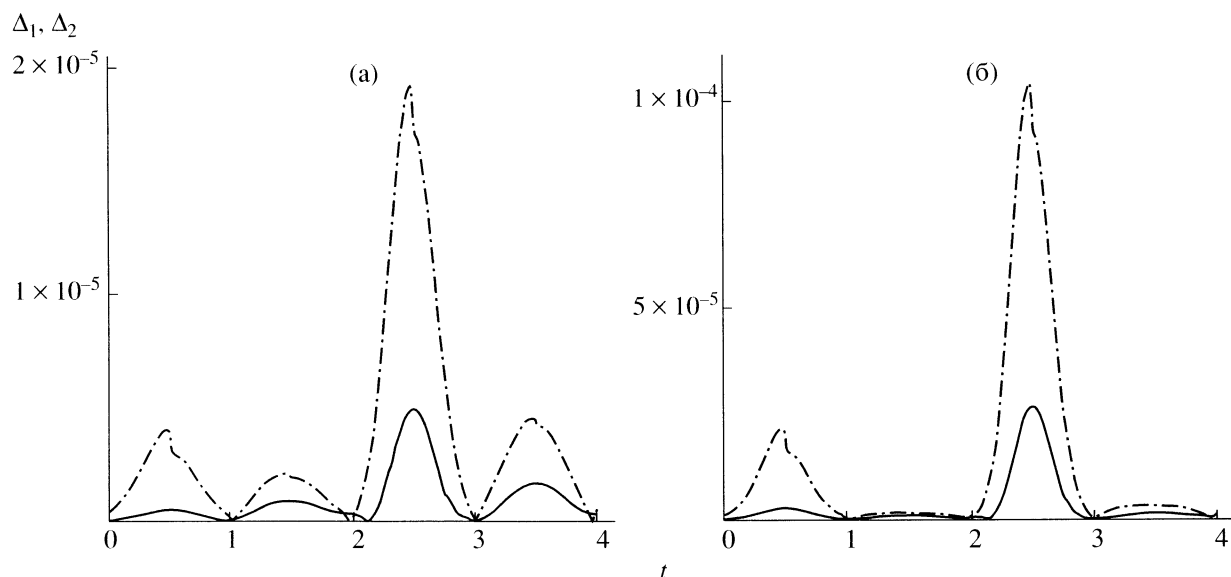
Пример 1. Рассмотрим решение задачи

$$\dot{y}(t) = -x(t)\dot{y}(t-1), \quad (5.1)$$

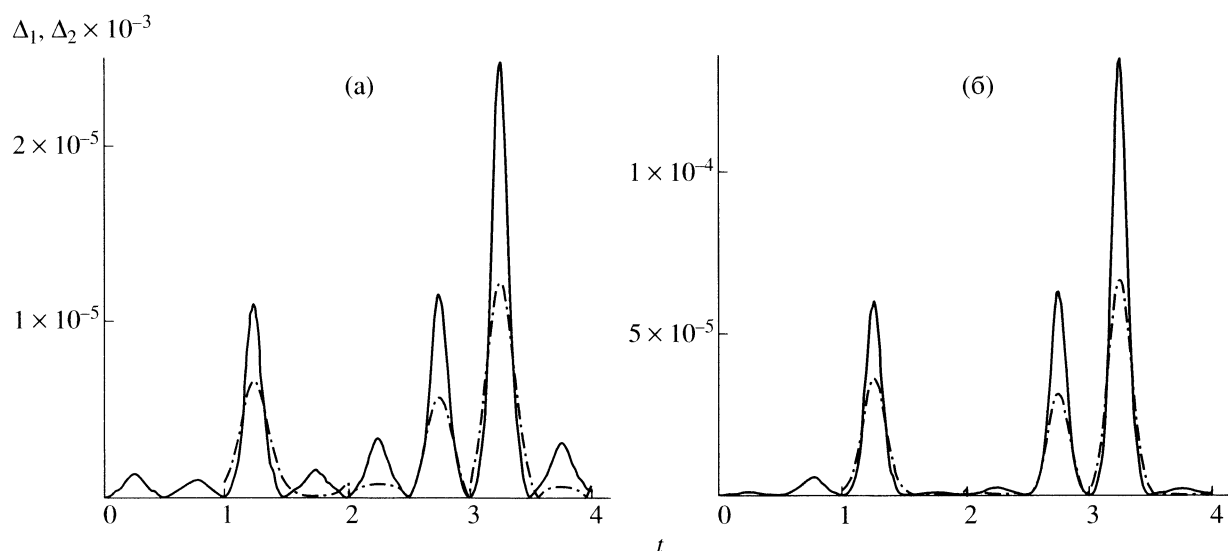
$$y(t)^2 - x(t) = 0, \quad t \in (0, 4),$$

$$y(t) = e^{\sin(\pi t)}, \quad t \in [-1, 0], \quad (5.2)$$

$$x(0) = 1.$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Точным решением задачи (5.1), (5.2) являются функции $y(t) = e^{\sin(\pi t)}$, $x(t) = e^{2\sin(\pi t)}$; таким образом, для первого уравнения системы (5.1) выполнены условия согласования любого порядка и, в частности, первого:

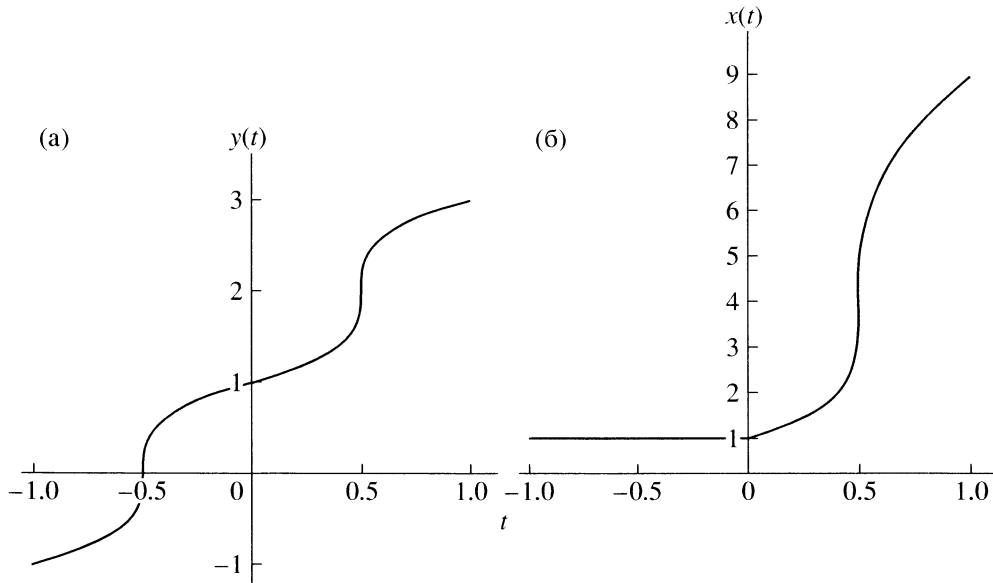
$$\pi \cos(\pi t) e^{\sin(\pi t)} \Big|_{t=0} = -e^{2\sin(\pi t)} \Big|_{t=0} \pi \cos(\pi t) e^{\sin(\pi t)} \Big|_{t=-1}.$$

Пример 2. Рассмотрим решение системы (5.1) с начальным условием

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\sin(2\pi t)}, \quad t \in [-1, 0], \\ x(0) &= 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Задача (5.1), (5.3) имеет точное решение $y(t) = e^{2\cos(\pi t)|\sin(\pi t)|}$, $x(t) = e^{4\cos(\pi t)|\sin(\pi t)|}$ и для нее не выполнены условия согласования даже первого порядка:

$$2\pi \cos(2\pi t) e^{\sin(2\pi t)} \Big|_{t=0} \neq -2e^{2\sin(2\pi t)} \Big|_{t=0} \pi \cos(2\pi t) e^{\sin(2\pi t)} \Big|_{t=-1}.$$



Фиг. 3.

Задачи (5.1), (5.2) и (5.1), (5.3) решались методами непрерывного и дискретного продолжения с постоянным шагом $h = 0.002$.

Поскольку известно точное решение, мы можем вычислить погрешность численного решения как модуль разности между точным и численным решением.

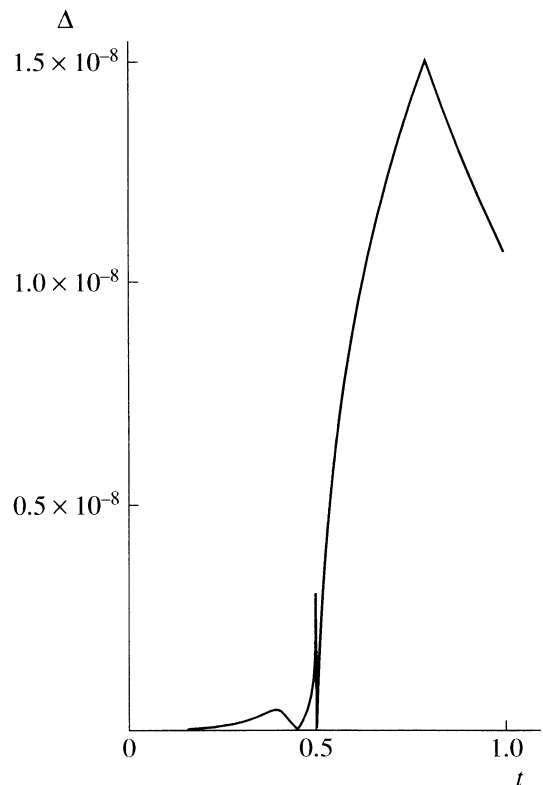
На фиг. 1, 2 (соответственно, для примеров 1, 2) представлены графики погрешности решений, полученных методами дискретного и непрерывного продолжения. Здесь Δ_1 – погрешность решения методом дискретного продолжения изображена сплошной линией, а Δ_2 – погрешность решения методом непрерывного продолжения изображена штрихпунктирной линией. На фиг. 1а, 2а представлены погрешности численного решения для функции $y(t)$, а на фиг. 1б, 2б – погрешности численного решения для функции $x(t)$.

Пример 3. Задача

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{2}{3y^2(t-1)}x(t-1), \\ y(t)^2 - x(t) &= 0, \quad t \in (0, 1), \\ y(t) &= \sqrt[3]{2t+1}, \\ x(t) &= 1, \quad t \in [-1, 0], \end{aligned} \tag{5.4}$$

примечательна тем, что ее интегральная кривая содержит точку $t = 0.5$, в которой правая часть дифференциального уравнения теряет смысл. Графики решения задачи представлены на фиг. 3а – функция $y(t)$ и фиг. 3б – функция $x(t)$.

При численном интегрировании этого примера вычислялась невязка решения, равная модулю второго уравнения системы (5.4). На фиг. 4 приводится график невязки при решении задачи методом непрерывного продолжения. При решении задачи методом дискретного продолжения невязка получилась на несколько порядков меньше (порядка 10^{-15}) и на гра-



Фиг. 4.

фике не приводится. При попытке решить задачу без использования метода продолжения по наилучшему параметру вычислительный процесс прерывался, так как программа выдавала ошибку: деление на ноль в точке $t = 0.5$.

6. ВЫВОДЫ

Предложенное преобразование обладает рядом достоинств, которые для систем обыкновенных дифференциальных уравнений отмечены в [4]. Численные исследования показали, что преобразование начальной задачи для системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом к наилучшему аргументу также обладает рядом преимуществ, причем дискретное продолжение решения требует времени счета примерно в два раза меньшего, чем непрерывное продолжение.

Из анализа численных результатов следует, что применение дискретного продолжения особенно целесообразно в случае, когда решение задачи теряет гладкость, т.е. имеет на отрезке интегрирования точки излома.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
2. Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Решение дифференциально-алгебраических уравнений с выбором наилучшего аргумента // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 6. С. 711–722.
3. Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Решение дифференциально-алгебраических уравнений методом продолжения по наилучшему параметру // Дифференц. ур-ния. 1999. Т. 35. № 3. С. 379–387.
4. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
5. Ким А.В., Пименов В.Г. i -гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Ижевск: Изд-во PXD R&C Dynamics, 2004.
6. Кузнецов Е.Б. Преобразование уравнений с запаздывающими аргументом к наилучшему аргументу // Матем. заметки. 1998. Т. 63. Вып. 1. С. 62–68.
7. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
8. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 601–602.
9. Давиденко Д.Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. матем. журнал. 1953. Т. 5. № 2. С. 196–206.
10. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
11. Feldstein A., Neves K.W. High order methods for state-dependent delay differential equation with nonsmooth solutions // SIAM J. Numer. Anal. 1984. V. 21. P. 844–863.
12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
13. Lahaye M.E. Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Compt. rend. hebdomadaires des seances de L'Acad. sci. 1934. V. 198. № 21. P. 1840–1842.
14. Lahaye M.E. Solution of system of transcendental equations // Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci. 1948. V. 5. P. 805–822.
15. Кузнецов Е.Б. Наилучшая параметризация при построении кривой итерационным методом // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 6. С. 746–748.
16. Кузнецов Е.Б. Наилучшая параметризация при построении кривых // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1540–1551.
17. Каменский Г.А. Общая теория уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 4. С. 697–700.