

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. V. Olekhova, Effective properties of a composite beam subjected to torsion,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 2010, Number 2, 30–35

<https://www.mathnet.ru/eng/vmumm764>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.84

April 19, 2025, 02:33:50



полученного в результате применения метода усреднения и линеаризации. Найдем явное выражение критической угловой скорости колесной пары ω^* . Имеем

$$\omega^{*2} = \frac{mg[(1 - k_1) \cos \beta + bl^{-1} \operatorname{tg} \beta]}{k_2[l^{-1}(Ak_1 - B) \sin \beta + mr(1 - k_1)^2 \cos \beta]}.$$

Критическая угловая скорость определяется геометрическими параметрами конструкции колеса и рельса, а также радиусами инерции колесной пары ρ_1, ρ_2 ($A = m\rho_1^2, B = m\rho_2^2$). Упругая податливость в зоне контакта колеса с рельсом не влияет на характер устойчивости прямолинейного движения, а обуславливает величину производной от амплитуды боковых колебаний центра масс колесной пары. Значение величины упругой податливости, обратно пропорциональной величине жесткости в зоне контакта колеса и рельса, может быть получено на основе эксперимента или численного расчета контактной задачи теории упругости. Согласно второму уравнению усредненной системы, фаза колебаний точек контакта в возмущенном движении не изменяется.

Замечание. Полученные результаты справедливы для углов $\beta > 0$, так как при $\beta = 0$ поверхности колес становятся цилиндрическими, угол $\theta = 0$, а угол ψ при любом движении постоянен. В этом случае центр масс колесной пары движется по прямой с постоянной скоростью, если момент внешних сил относительно центра масс колесной пары отсутствует.

В качестве примера рассмотрим следующие числовые значения параметров [2]: $r = 0,5$ м, $l = 0,84$ м, $b = 0,3$ м, $\beta = 0,17$ рад, $m = 1300$ кг, $A = 825$ кг·м², $B = 75$ кг·м². Тогда

$$k_1 = 0,102; \quad k_2 = 1,06; \quad \omega^* = 4,68 \text{ с}^{-1} \Rightarrow V^* = r\omega^* = 2,34 \text{ м/с}.$$

Если принять, что величина вертикальной нагрузки, действующей на колесную пару, в девять раз превосходит ее вес, то критическая скорость увеличится в три раза и будет равна 7,02 м/с.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00134, 08-08-00553, 08-01-00600).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.
2. *Slivsgaard E.C.* On the Interaction between Wheels and Rails in Railway Dynamics. Lyngby, Denmark, 1995.
3. *Carter F.W.* On the Stability of Running of Locomotives // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1928. **121**. 585–611.
4. *Rocard Y.* L'instabilité en mécanique. Automobiles. Avions. Ponts suspendus. Paris: Masson, 1954 (пер. с фр.: *Рокар И.* Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: ИЛ, 1959).
5. *Kalker J.J.* Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.

Поступила в редакцию
20.11.2007

УДК 539.3

ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПРИ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Л. В. Олехова¹

В работе рассмотрена проблема отыскания эффективных характеристик в задаче о чистом кручении прямолинейного стержня. Задача сводится к определению функции напряжений при кручении, которая находится из решения краевой задачи в поперечном сечении для уравнения с частными производными с переменными коэффициентами. Для

¹ Олехова Любовь Владимировна — асп. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: olekhova@gmail.com.

отыскания эффективных характеристик формулируются две специальные краевые задачи. Показано, что эффективные коэффициенты в случае кручения неоднородного по толщине слоя взаимно обратны. В двумерном случае задача решается методом конечных элементов. Рассмотрены случаи квадратного стержня с одним и несколькими включениями. Приведены зависимости эффективных характеристик от объемной доли включения.

Ключевые слова: эффективные характеристики, кручение стержня, композиционный материал, функция напряжений.

The problem of finding the effective characteristics of a rectilinear beam under pure torsion is considered. The problem is reduced to finding the torsional stress function determined from the solution of a boundary-value problem in the cross section of the beam for a partial differential equation with variable coefficients. Two special boundary-value problems are formulated to find the effective characteristics. It is shown that the effective coefficients are reciprocal in the case of torsion of a layer with nonuniform thickness. In the two-dimensional case, the problem is solved by a finite element method. The cases of a square beam with single and multiple inclusions are discussed. The dependence of the effective characteristics on the inclusion's volume fraction is analyzed.

Key words: effective characteristics, beam torsion, composite material, stress function.

Рассматривается чистое кручение призматического стержня постоянного по длине сечения. Один торец стержня закреплен, а на другом усилия приводятся к скручивающему моменту. Предполагается, что материал стержня упругий, анизотропный и неоднородный в поперечном сечении, обладает перпендикулярной к оси стержня плоскостью упругой симметрии. В настоящей работе рассматривается задача вычисления эффективных свойств стержня при кручении.

1. Постановка задачи. Направим ось x_3 декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ по оси стержня, проходящей через центры тяжести всех сечений. Оси x_I расположим в плоскости левого закрепленного торца. Здесь и далее большие латинские индексы принимают значения 1, 2, а малые — значения 1, 2, 3.

При принятых ограничениях на анизотропию и в случае односвязного поперечного сечения задача о чистом кручении сводится к следующей краевой задаче в области поперечного сечения [1, 2]:

$$(b_{IJ}\psi_{,J})_{,I} = -2 \quad \text{при} \quad x \in F; \quad \psi|_{\Gamma} = 0, \tag{1}$$

где F — область поперечного сечения, Γ — граница сечения, ψ — функция напряжений при кручении.

Коэффициенты $b_{IJ} = b_{JI}$ являются функциями координат точек поперечного сечения и связаны с компонентами $J_{I_3J_3}(x_1, x_2)$ тензора податливостей материала стержня:

$$b_{IJ} = 4\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}J_{KL}, \quad (J_{KL}) \equiv \begin{pmatrix} J_{1313} & J_{1323} \\ J_{2313} & J_{2323} \end{pmatrix}.$$

Здесь ϵ_{IK} — двумерные символы Леви-Чивиты [3]. Напряжения при кручении имеют вид $\sigma_{3J} = \vartheta\epsilon_{JK}\psi_{,K}$. Константа ϑ представляет собой относительный угол закручивания сечений стержня вокруг оси x_3 и определяется по формуле $\vartheta = M/D$, где M — заданный крутящий момент, а D — жесткость стержня при кручении:

$$D = 2 \int_F \psi dF = \int_F b_{IJ}\psi_{,I}\psi_{,J} dF > 0$$

в силу положительной определенности коэффициентов b_{IJ} .

Если коэффициенты b_{IJ} разрывны, то предполагается, что на поверхностях разрыва выполнены условия идеального контакта для напряжений и перемещений. В этом случае уравнение (1) понимается в обобщенном смысле [4, 5].

2. Эффективные характеристики при кручении. Для левой части уравнения (1) рассмотрим краевую задачу вида

$$q_{I,I} = 0, \quad q_I \equiv b_{IJ}(x)\eta_J, \quad \eta_J \equiv \psi_{,J}; \quad \psi|_{\Gamma} = \gamma_I y_I, \quad \gamma_I = \text{const} \quad (x \in F, y \in \Gamma). \tag{2}$$

Назовем эту задачу первой специальной краевой задачей (СКЗ) [6]. Очевидно, что в этом случае $\langle \eta_J \rangle = \gamma_J$, где угловые скобки обозначают среднее значение функции в области F . Наряду с первой СКЗ в

механике композитов рассматривается вторая СКЗ, в которой, в отличие от задачи (2), граничные условия имеют вид

$$q_I n_I|_{\Gamma} = \lambda_I n_I, \quad \lambda_I = \text{const.}$$

Во второй СКЗ $\langle q_I \rangle = \lambda_I$.

Следуя [7], величины \widehat{b}_{IJ} и \widehat{a}_{IJ} назовем эффективными коэффициентами. В случае первой СКЗ имеем $\langle q_I \rangle = \widehat{b}_{IJ} \langle \eta_J \rangle = \widehat{b}_{IJ} \gamma_J$, а в случае второй СКЗ

$$\langle \gamma_I \rangle = \widehat{a}_{IJ} \langle q_J \rangle = \widehat{a}_{IJ} \lambda_J. \quad (3)$$

Эффективные коэффициенты симметричны и положительно определены. Их можно выразить через функцию Грина соответствующей краевой задачи [8–10]. Решение первой СКЗ может быть представлено в виде $\psi(x) = [x_K + N_K(x)] \gamma_K$. Отсюда и из уравнений (2) первой СКЗ вытекает краевая задача для N -функций:

$$(b_{IK} + b_{IJ} N_{K,J})_{,I} = 0, \quad N_K|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

решив которую, эффективные коэффициенты \widehat{b}_{IK} можно найти по формуле

$$\widehat{b}_{IK} = \langle b_{IK} + b_{IJ} N_{K,J} \rangle = 4 \epsilon_{IP} \epsilon_{KQ} \langle J_{PQ} + J_{PM} N_{Q,M} \rangle = 4 \epsilon_{IP} \epsilon_{KQ} \widehat{J}_{PQ}.$$

Тогда $\widehat{J}_{PQ} = \langle J_{PQ} + J_{PM} N_{Q,M} \rangle$.

Для второй СКЗ имеет место следующее представление:

$$q_I = (\delta_{IK} + \epsilon_{IM} L_{K,M}) \lambda_K \Rightarrow \epsilon_{IM} L_{K,M} n_I|_{\Gamma} = 0, \quad \eta_I = b_{IL}^{-1} q_L = (a_{IK} + \epsilon_{LM} a_{IL} L_{K,M}) \lambda_K.$$

Здесь a_{IJ} — симметричная матрица коэффициентов, обратная к матрице b_{IJ} :

$$a_{IJ} = b_{IJ}^{-1} = \frac{1}{4} \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} C_{KL}, \quad (C_{KL}) = (J_{KL})^{-1}. \quad (5)$$

Уравнения для L -функций следуют из условия разрешимости уравнений $\psi_{,I} = \eta_I$ относительно функции ψ . Это условие имеет вид (см. [11, с. 51]) $\epsilon_{IJ} \eta_{I,J} = 0$. Отсюда получаем

$$\epsilon_{IJ} (a_{IK} + \epsilon_{LM} a_{IL} L_{K,M})_{,J} = 0, \quad L_K|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Однородное граничное условие для L -функций следует из того, что

$$\epsilon_{IM} L_{K,M} n_I|_{\Gamma} = \epsilon_{IM} L_{K,M} \epsilon_{IL} \frac{dx_L}{ds} \Big|_{\Gamma} = \frac{dL_K}{ds} \Big|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow L_K|_{\Gamma} = \text{const.}$$

В случае односвязной области константу можно положить равной нулю. N - и L -функции определяются только функциональной зависимостью тензоров \underline{b} и \underline{a} от координат и обращаются в нуль для однородного материала. Если в (6) подставить коэффициенты a_{IJ} , выраженные через C_{IJ} по формуле (5), то задачу (6) легко можно преобразовать к виду

$$(C_{IJ} \epsilon_{KJ} + C_{IJ} L_{K,J})_{,I} = 0, \quad L_K|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

Положим далее $L_K = \epsilon_{KS} N_S^*$, тогда для новых функций из (7) получим краевую задачу, аналогичную задаче (4), только с другими коэффициентами:

$$(C_{IK} + C_{IJ} N_{K,J}^*)_{,I} = 0, \quad N_K^*|_{\Gamma} = 0.$$

Решив задачу (6), найдем L -функции, а затем по формуле (3) вычислим эффективные величины \widehat{a}_{IK} :

$$\widehat{a}_{IK} = \langle a_{IK} + \epsilon_{JM} a_{IJ} L_{K,M} \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_{IP} \epsilon_{KQ} \langle C_{PQ} + C_{PM} N_{Q,M}^* \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_{IP} \epsilon_{KQ} \widehat{C}_{PQ}.$$

Отсюда получим $\widehat{C}_{PQ} = \langle C_{PQ} + C_{PM} N_{Q,M}^* \rangle$.

В изотропном случае $b_{IJ} = \delta_{IJ}/G(x)$, $a_{IJ} = \delta_{IJ}G(x)$, $C_{IJ} = 4\delta_{IJ}G(x)$, где G — переменный по сечению модуль сдвига материала стержня. Уравнения для N - и N^* -функций примут вид

$$\left(\frac{1}{G}\delta_{KI} + \frac{1}{G}N_{K,I}\right)_{,I} = 0, \quad (G\delta_{KI} + GN^*_{K,I})_{,I} = 0, \tag{8}$$

а эффективные характеристики будут определяться по формулам

$$\hat{b}_{IK} = \left\langle \frac{1}{G}\delta_{IK} + \frac{1}{G}N_{K,I} \right\rangle, \quad \hat{a}_{IK} = \langle G\delta_{IK} + G\epsilon_{IM}L_{K,M} \rangle = \epsilon_{IM}\epsilon_{KS}\langle G\delta_{SM} + GN^*_{S,M} \rangle. \tag{9}$$

Таким образом, для вычисления эффективных характеристик при кручении стержня из композиционного материала с изотропными включениями необходимо решить первое из уравнений (8) с прямыми и обратными коэффициентами. Из этих двух решений определяются N_K - и N^*_K -функции. После этого по формулам (9) находятся два типа эффективных характеристик, и вовсе не очевидно, что они взаимно обратны.

В случае кручения бесконечного по x_1 и неоднородного по x_2 слоя N -функции зависят от x_2 . Уравнения (8) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые легко решаются, и для производных от N -функций имеем

$$N'_K(x_2) = \left(\frac{G(x_2)}{\langle G \rangle} - 1\right)\delta_{K2}, \quad N^*_{K'}(x_2) = \left(\frac{1}{G(x_2)\langle 1/G \rangle} - 1\right)\delta_{K2}.$$

Подставив эти функции в выражения (9), найдем эффективные коэффициенты \hat{b}_{IJ} и \hat{a}_{IJ} :

$$(\hat{b}_{IJ}) = \begin{pmatrix} \langle 1/G \rangle & 0 \\ 0 & 1/\langle G \rangle \end{pmatrix}, \quad (\hat{a}_{IJ}) = \begin{pmatrix} 1/\langle 1/G \rangle & 0 \\ 0 & \langle G \rangle \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что эффективные коэффициенты в случае кручения неоднородного по толщине слоя взаимно обратны. Угловые скобки обозначают среднее значение функции по толщине слоя.

В двумерном случае уравнения (8) решаются численно.

3. Применение метода конечных элементов для расчета эффективных свойств. Рассмотрим квадратный стержень из изотропного материала с одним, четырьмя, девятью и шестнадцатью квадратными включениями из другого изотропного материала (рис. 1).

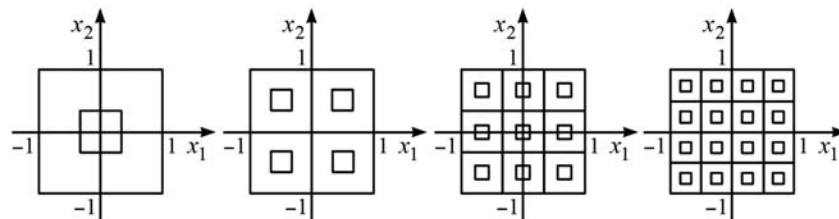


Рис. 1. Квадратный стержень с квадратными включениями

Объемная доля включений во всех четырех случаях оставалась одинаковой. Матрицу свойств материала обозначим через b^M , а матрицу свойств включений — через $b^{вкл}$. Матрица b_{IJ} бралась следующая: в случае *a*

$$b^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{вкл} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{pmatrix} \equiv b^{(001)};$$

в случае *б*

$$b^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{вкл} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \equiv b^{(100)},$$

т.е. $b^{(001)} = (b^{(100)})^{-1} = a^{(100)}$, или $b^{(100)} = (b^{(001)})^{-1} = a^{(001)}$.

На рис. 2 представлены графики N_1 -функции для всех областей с нулевыми граничными условиями, а также для области, имеющей одно включение, с периодическими граничными условиями. Под периодическим граничным условием понимается, что значения N -функции совпадают на верхней и нижней границе и на левой и правой границе. N_1 - и N_2 -функции симметричны относительно осей x_1 и x_2 , т.е. при замене x_1 на x_2 N_1 -функция переходит в N_2 -функцию и наоборот. N_1 -функция нечетна по x_1 и четна по x_2 , поэтому на рисунке представлена только N_1 -функция.

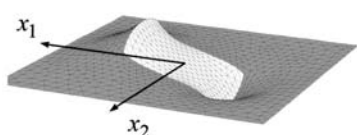

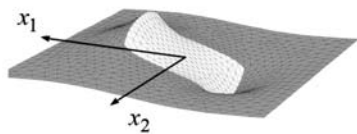

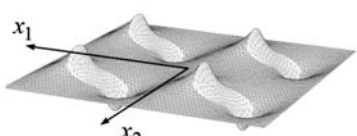

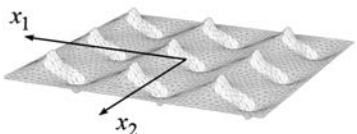
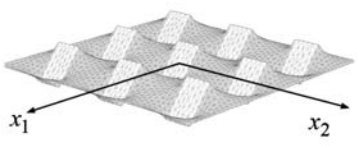
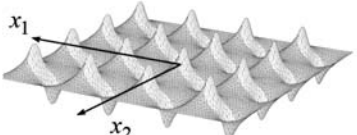

Случай <i>a</i>	Случай <i>б</i>
Одно включение	
 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 0,7923 & 0 \\ 0 & 0,7923 \end{pmatrix}$	 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 1,2761 & 0 \\ 0 & 1,2761 \end{pmatrix}$
Одно включение, периодический случай	
 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 0,7907 & 0 \\ 0 & 0,7907 \end{pmatrix}$	 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 1,2718 & 0 \\ 0 & 1,2718 \end{pmatrix}$
Четыре включения	
 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 0,7918 & 0 \\ 0 & 0,7918 \end{pmatrix}$	 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 1,2741 & 0 \\ 0 & 1,2741 \end{pmatrix}$
Девять включений	
 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 0,7965 & 0 \\ 0 & 0,7965 \end{pmatrix}$	 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 1,2815 & 0 \\ 0 & 1,2816 \end{pmatrix}$
Шестнадцать включений	
 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 0,7937 & 0 \\ 0 & 0,7937 \end{pmatrix}$	 $\hat{b}_{IJ} = \begin{pmatrix} 1,2769 & 0 \\ 0 & 1,2769 \end{pmatrix}$

Рис. 2. Вид N_1 -функции

Можно заметить, что эффективные характеристики во всех случаях практически совпадают. Также в случае квадратного сечения матрицы $\hat{b}_{IJ}^{(100)}$ и $\hat{b}_{IJ}^{(001)}$ взаимно обратны. Невязка $(\hat{b}^{(001)} \cdot \hat{b}^{(100)} - E)$ стремится к нулю с уменьшением элементов разбиения. Здесь E — единичная матрица. Порядок малости невязки $O(s^{1/4})$, где s — площадь треугольного элемента, т.е. если при построении разбиения взять элементы в 16 раз мельче, то невязка уменьшится в 2 раза.

Сравнивая вид N_1 -функций, приходим к выводу, что N -функции можно искать на одной ячейке периодичности.

На рис. 3, а приведена зависимость эффективных упругостей \hat{b}_{11} от объемной доли ν включения для композита с квадратной ячейкой периодичности, имеющего одно квадратное включение, а на рис. 3, б — зависимость логарифма \hat{b}_{11} от объемной доли включения; $\nu = V^{вкл}/V$, где V — объем бруса, $V^{вкл}$ — объем включения.

Для матрицы материала использовались следующие значения:

$$b_{IJ}^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

для матрицы включения — следующие значения:

$$b_{IJ}^{вкл} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \text{ в случае } A, \quad b_{IJ}^{вкл} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ в случае } B,$$

$$b_{IJ}^{вкл} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{pmatrix} \text{ в случае } C, \quad b_{IJ}^{вкл} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ в случае } D.$$

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору В.И. Горбачеву за поставленную задачу, личное участие и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00231а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976.
2. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971.
3. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1979.
4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
5. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
6. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.
7. Hashin Z., Rosen B.W. The elastic moduli of fibre-reinforced materials // J. Appl. Mech. 1964. **31**. 223-232.
8. Горбачев В.И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. **2**. 61-76.
9. Горбачев В.И. О представлении решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2000. № 6. 68-71.
10. Горбачев В.И. Осреднение линейных задач механики композитов при неперидической неоднородности // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2001. № 1. 31-37.
11. Физтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 3. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию
21.04.2008