А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, Симметрии нелинейных цепочек, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 2, 183–208

А.Б.Шабат, Р.И.Ямилов

СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПОЧЕК

В работе объясняется непосредственная связь нелинейных цепочек типа цепочки Тоды и уравнений с частными производными, обладающих высшими симметриями. Для заданного уравнения с частными производными цепочка определяется, с точностью до переобозначения, обратимым преобразованием

$$u(x,t) \longrightarrow v(x,t) = V(u(x,t),\ u_x(x,t),\ u_{xx}(x,t),\dots),$$

переводящим решения уравнения снова в решения. Свойство обратимости этого преобразования играет существенную роль в развиваемой общей теории, и соответствующие цепочки мы называем регулярными. В таблице, помещенной в конце статьи, приведен список ключевых уравнений, обобщающих уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, вместе с допускаемыми этими уравнениями обратимыми дифференциальными подстановками, записанными в виде нелинейных цепочек.

Мы благодарны Б.А.Магадееву и А.В.Михайлову за полезные обсуждения.

§ 1. Введение

1.1. Примеры цепочек из метода обратной задачи. Для построения конечномерных динамических систем, описывающих поведение конечнозонных потенциалов, можно использовать следующую общую схему. Пусть линейная спектральная задача записана в виде векторного уравнения первого порядка

$$\Phi_x = U(x,\lambda)\ \Phi. \tag{1.1}$$

Явные формулы метода одевания (см., например, [1]) приводят к цепочке потенциалов $U_n = U_n(x,\lambda)$, $n\in\mathbb{Z}$, связанных соотношениями

$$\Phi_{n,x} = U_n\Phi_n, \qquad \Phi_{n+1} = W_n(\lambda)\ \Phi_n, \tag{1.2}$$

$$W_{n,x} = U_{n+1}\ W_n(\lambda) - W_n(\lambda)U_n, \tag{1.3}$$

где $W_n(\lambda) \equiv W_n(x,\lambda)$ - полиномиальные по спектральному параметру матричные функции. Как показывают рассмотренные ниже примеры (см. также [2-4]), условие полиномиальности позволяет исключить из (1.3) потенциалы U_n, U_{n+1} и получить бесконечную нелинейную цепочку для коэффициентов разложения полинома $W_n(\lambda)$ по λ. Эта бесконечная цепочка уравнений превращается в *конечную динамическую систему,*

Ключевые слова: вполне интегрируемые уравнения, нелинейные цепочки, высшие симметрии.

если наложить условие периодичности

$$U_{n+N} = U_n \tag{1.4}$$

и обозначить

$$\overset{(N)}{W} = W_{n+N-1}\ ,\ldots,\ W_{n+1}W_n. \tag{1.5}$$

При этом из (1.3),(1.4) находим, что

$$d\ \overset{(N)}{W}/dx = U_{n+N}\overset{(N)}{W} - \overset{(N)}{W}U_n = [U_n, \overset{(N)}{W}]. \tag{1.6}$$

Очевидным следствием (1.6) является соотношение

$$\frac{d}{dx}\ \mathrm{trace}\ [\overset{(N)}{W}(x,\lambda)] = 0, \tag{1.7}$$

представляющее собой полиномиальный по спектральному параметру первый интеграл конечномерной динамической системы (1.3),(1.4).

В качестве первого примера рассмотрим применение указанной общей схемы к линейному уравнению Шредингера

$$\psi_{xx} + (u(x) + \lambda)\ \psi = 0. \tag{1.8}$$

В этом случае в (1.1)

$$U(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u(x)-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix},$$

и несложный анализ показывает, что простейшим полиномиальным решением уравнений (1.3) является

$$W_n(\lambda) = \begin{pmatrix} q_n & 1 \\ q_n^2 - \lambda + \alpha_n & g_n \end{pmatrix}\ (\det W_n = \lambda - \alpha_n,\ \alpha_n \in \mathbb{C}) \tag{1.9}$$

и что соответствующая цепочка уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx}\ (q_{n+1} + q_n) = q_{n+1}^2 - q_n^2 + \alpha_{n+1} - \alpha_n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.10}$$

Формула для восстановления потенциала уравнения Шредингера (1.8)

$$u_n = q_{nx} - q_n^2 - \alpha_n \tag{1.11}$$

позволяет связать уравнения (1.10) с цепочкой классических преобразований дискретного спектра уравнения Шредингера, которыми строятся многосолитонные потенциалы. Более интересно, однако, что условие периодического замыкания

$$q_{n+N} = q_n, \qquad \alpha_{n+N} = \alpha_n \tag{1.12}$$

при нечетном N позволяет перейти от недоопределенной системы уравнений (1.10) к конечномерной динамической системе

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}\ (T+E)\ \mathbf{q} = (T-E)\ \mathbf{q}^2, \\ (T+E)^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} (-T)^k. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Здесь T - матрица циклической перестановки $q_n \longrightarrow q_{n+1}$, и введены следующие обозначения для матриц-столбцов:

$$\mathbf{q} = (q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+N-1})^T, \quad \mathbf{q}^2 = (q_n^2 + \alpha_n, \dots, q_{n+N-1}^2 + \alpha_{n+N-1})^T.$$

Ниже будет показано (см. предложение 1.1), что задача о построении конечнозонных потенциалов для уравнения (1.8) сводится к (1.13).

Применение рассматриваемой общей схемы к канонической спектральной задаче с

$$U(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & v(x) \\ -u(x) & \lambda \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

приводит, в простейшем случае, к двум существенно различным цепочкам:

$$\begin{cases} -\delta_n q_{nx} = \delta_n^2\, q_{n+1} - \alpha_n q_n + q_n^2\, p_n, \\ \delta_n p_{nx} = \delta_n^2\, p_{n-1} - \alpha_n p_n + p_n^2\, q_n \end{cases} \tag{1.15}$$

($\alpha_n, \delta_n \in \mathbb{C}$) и цепочке Тоды [5]

$$q_{nxx} = \exp\,(q_{n+1} - q_n + \gamma_n) - \exp\,(q_n - q_{n-1} + \gamma_{n-1}) \tag{1.16}$$

($\gamma_n \in \mathbb{C}$). В случае (1.15) в качестве решения уравнения (1.3) выбирается

$$W_n = \begin{pmatrix} \delta_n & -p_n \\ q_n & 2\lambda + \delta_n^{-1}(\alpha_n - p_n q_n) \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

($u_n = q_n$, $v_n = p_{n-1}$). Случаю цепочки Тоды (1.16) соответствует

$$W_n = \begin{pmatrix} 0 & -\exp\,(-q_n + \gamma_n) \\ \exp\, q_n & 2\lambda + q_{nx} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

($u_n = \exp\, q_n$, $v_n = \exp\,(\gamma_{n-1} - q_{n-1})$).

В обоих рассмотренных примерах (1.8) и (1.14) выполняется условие trace $U(x,\lambda) = 0$, вследствие чего $d(\det W_n)/dx = 0$ (см. (1.3)). Поэтому сохраняется не только след (1.7), но и характеристическое уравнение

$$\det\,(z\,E - \overset{(N)}{W}(x,\lambda)) = z^2 - z\,\mathrm{tr}\,\overset{(N)}{W} + \det \overset{(N)}{W} = 0. \tag{1.19}$$

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть N – нечетно и $\mathbf{q}$ – решение динамической системы* (1.13). *Тогда при любом n дифференциальный оператор порядка N*

$$Z_n = \left(\frac{d}{dx} + q_{n+N-1}\right) \dots \left(\frac{d}{dx} + q_{n+1}\right)\left(\frac{d}{dx} + q_n\right)$$

коммутирует с $L_n = d^2/dx^2 + u_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (1.10), (1.11) следует, что

$$L_n = (d/dx - q_n)\,(d/dx + q_n) - \alpha_n$$

и что дифференциальные операторы с разными номерами получаются друг из друга сопряжением, а точнее,

$$L_{n+1}(d/dx + q_n) = (d/dx + q_n)\ (L_n + \alpha_n - \alpha_{n+1}),$$

$$L_{n+2}(d/dx + q_{n+1}(d/dx + q_n) =$$

$$= (d/dx + q_{n+1})(L_{n+1}+\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})(d/dx+q_n) =$$

$$= (d/dx + q_{n+1})(d/dx + q_n)(L_n+\alpha_n-\alpha_{n+2}),\dots$$

Таким образом,

$$L_{n+N}Z_n = Z_n(L_n+\alpha_n-\alpha_{n+N}).$$

Равенство нулю коммутатора следует теперь из (1.12).

Изложенный выше способ построения пары коммутирующих дифференциальных операторов сведением задачи к системе дифференциальных уравнений (1.13) близок идейно к классической работе [6].

З а м е ч а н и е 1.2. В дополнение к предложению 1.1 можно проверить, что построенные коммутирующие дифференциальные операторы связаны алгебраическим уравнением вида (1.19), в котором произведены замены $z \longrightarrow Z_n, \lambda \longrightarrow -L_n$. Если подчинить начальные данные $\mathbf{q}(x)$ при $x = x_0$ для динамической системы (1.13) дополнительным условиям $\operatorname{tr} \overset{(N)}{W}(\lambda) \equiv 0$, где при $N = 2m+1$

$$\operatorname{tr} \overset{(N)}{W}(\lambda) = (-\lambda)^m Q_1(\mathbf{q}) + (-\lambda)^{m-1}Q_2(\mathbf{q}) + \dots + Q_{m+1}(\mathbf{q}), \tag{1.20}$$

то в силу (1.7),(1.9) это алгебраическое уравнение (1.19) примет вид гиперэллиптической кривой

$$Z_n^2 - \det \overset{(N)}{W}(-L_n) = Z_n^2 - \prod_{k=n}^{n+N-1} (L_k - \alpha_k) = 0.$$

Цепочку Тоды (1.16) и ее обобщение (1.15) также можно использовать для построения пары коммутирующих дифференциальных операторов:

$$L_n = \sigma \frac{d}{dx} - \begin{pmatrix} 0 & u_n \\ v_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z_n = \overset{(N)}{W}(x, L_n), \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где, при $\overset{(N)}{W}(x,\lambda) = \sum a_k(x)\lambda^k$, мы полагаем по определению, что $\overset{(N)}{W}(x, L_n) = \sum a_k(x)\, L_n^k$. Коммутирование этих операторов является следствием (1.6). Действительно, в случае (1.14)

$$\sigma(d/dx - U_n(x,\lambda))\ \Phi = L_n(\Phi) - \lambda\ \Phi = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Z_n(\Phi) = \overset{(N)}{W}(x,\lambda)\ \Phi,$$

и поэтому

$$L_nZ_n(\Phi) = (L_n-\lambda)\ Z_n(\Phi) + Z_nL_n(\Phi) =$$

$$= \sigma\ (d/dx - U_n) \overset{(N)}{W}(\Phi) + Z_n L_n(\Phi) =$$

$$= \sigma\ (d \overset{(N)}{W}/dx + \overset{(N)}{W} U_n - U_n \overset{(N)}{W})\ (\Phi) + Z_n L_n(\Phi) = Z_n L_n(\Phi).$$

Замечание 1.2 остается в силу в случае (1.14) и, например, для цепочки Тоды, заменив $z \longrightarrow Z_n$, $\lambda \longrightarrow L_n$, мы получаем

$$Z_n + Z_n^{-1} \exp\ (\sum \gamma_n) = \mathrm{tr}\ \overset{(N)}{W}(L_n) =$$

$$= (2L_n)^N + Q_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x)\ L_n^{N-1} + \ldots + Q_N(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x), \tag{1.21}$$

где $\mathbf{q} = (q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{n+N-1})$, а функции Q_j являются первыми интегралами цепочки (1.16), подчиненной условию периодичности (1.12).

1.2. Теорема Лиувилля. Вопрос о построении явных формул, решающих задачу о паре коммутирующих дифференциальных операторов, рассматривается в современной теории конечнозонного интегрирования (см. [7]). Однако нас интересует лишь принципиальная сторона дела, а точнее, следующий вопрос: в силу каких причин явные формулы для конечнозонных потенциалов дают также решения нелинейных уравнений с частными производными типа уравнения Кортевега-де Фриза. Мы покажем, что ответ на этот вопрос можно найти в доказательстве классической теоремы Лиувилля [8] об условиях интегрируемости в квадратурах конечномерной динамической системы общего вида:

$$dq_k/dx = F_k(q_1, \ldots, q_N), \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.22}$$

Т е о р е м а 1.3. *Пусть заданы коммутирующие векторные поля*

$$X_j = \sum_{k=1}^{N} f_{jk}(\mathbf{q})\ \partial/\partial q_k, \qquad j = 1, \ldots, K \le N,$$

удовлетворяющие условию $\mathrm{rank}\ (f_{jk}) = K$, *и функционально независимые первые интегралы* $Q_j(q_1, \ldots, q_N)$, $j = 1, \ldots, N-K$, *такие, что*

$$X_j(Q_i) = 0, \ j = 1, \ldots, K, \qquad i = 1, \ldots, N-K. \tag{1.23}$$

Тогда каждая из K динамических систем

$$dq_n/dt_j = f_{jn}(q_1, \ldots, q_N), \qquad n = 1, \ldots, N, \tag{1.24}$$

интегрируема в квадратурах.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений для определения K дополнительных первых интегралов

$$\Phi_j(t_j, q_1, \ldots, q_N) = t_j - \varphi_j(q_1, \ldots, q_N), \qquad j = 1, \ldots, K, \tag{1.25}$$

записывается в виде

$$d/dt_i(\Phi_j) = 0 \Longleftrightarrow X_i(\varphi_j) = \delta_{ij}\ ;\ i, j = 1, \ldots, K. \tag{1.26}$$

Соотношения (1.26) при фиксированном j дают нам систему линейных алгебраических уравнений для определения частных производных $\varphi_{jk} = \partial\varphi_j/\partial q_k$ функции φ_j.

В случае $K=N$ матрица (φ_{jk}) совпадает с матрицей $(f_{jk})^{-1}$ с точностью до транспонирования. Условия коммутирования

$$[X_i,X_j] \equiv \sum [X_i(f_{jk}) - X_j(f_{ik})]\ \partial/\partial q_k = 0 \tag{1.27}$$

обеспечивают замкнутость дифференциальных форм

$$\omega_j = \sum_{k=1}^{N} \varphi_{jk}\, dq_k$$

и, следовательно, локальную однозначность функций φ_j $(d\varphi_j=\omega_j)$. Отметим еще, что замена координат $p_i=\varphi_i(q_1,\ldots,q_N)$, $i = 1,\ldots,N$, переводит векторное поле X_j в $\partial/\partial p_j$, $\forall\ j$.

В общем случае $(K < N)$ первые интегралы $Q_1,\ldots,Q_{N-K}$ позволяют понизить порядок динамической системы (1.24) до K. Как следует из (1.23), редуцированная система также удовлетворяет условиям теоремы 1.3. Это в силу доказанного выше позволяет утверждать, что при $K < N$ существует обратимая замена переменных

$$\tilde{q}_i = Q_i(q_1,\ldots,q_N),\ p_j = \varphi_j(q_1,\ldots,q_N), \tag{1.28}$$

где $i = 1,\ldots,N-K$, $j = 1,\ldots,K$, переводящая векторные поля $X_1,\ldots,X_K$ в $\partial/\partial p_1,\ldots,\partial/\partial p_K$ соответственно. Легко видеть, что функции φ_j в (1.28) удовлетворяют уравнениям (1.26) и что функции $q_n(t_1,\ldots,t_K)$, $n = 1,\ldots,N$, найденные из соотношений

$$\begin{aligned} &Q_i(q_1,\ldots,q_N) = c_i, \quad i = 1,\ldots,N-K,\\ &\varphi_m(q_1,\ldots,q_N) = t_m, \quad m = 1,\ldots,K, \end{aligned} \tag{1.29}$$

задают, при фиксированных t_m, $m \neq j$, решение динамической системы (1.24), зависящее от нужного числа произвольных постоянных.

Простейший частный случай теоремы 1.3 дает динамическая система (1.22), обладающая *полным набором* N-1 *независимых первых интегралов*. В этом случае $K = 1$ и дополнительный первый интеграл (1.25) легко находится из уравнения

$$X_1(\varphi_1) = \sum_{k=1}^{N} (F_k\ \partial\varphi_1/\partial q_k) = 1,$$

если, следуя доказательству теоремы, ввести новые динамические переменные, связанные с первыми интегралами. После этого общее решение находится из (1.29) с $t_1 = x$. Во всех остальных случаях, при $K>1$, изложенная процедура "интегрирования по Лиувиллю" приводит в силу (1.29) к общему решению, которое является функцией не только от x, но и дополнительных аргументов t_j. В типичной ситуации $K \simeq N/2$ и в особенно важном случае гамильтоновой системы с каждым первым интегралом можно сопоставить соответствующее векторное поле.

Хорошей иллюстрацией к сказанному выше является динамическая система (1.13) с

$N = 5$. Исходя из (1.5),(1.9), непосредственным вычислением находим (ср. (1.20)), что

$$\mathrm{tr}\, \overset{(5)}{W}(\lambda) = \lambda^2 Q_1 - \lambda Q_2 + Q_3 = \prod_{k=0}^{4} r_{n+k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{4} (\alpha_{n+k} - \lambda)\, r_{n+k+1}\, r_{n+k+2}\, r_{n+k+3} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{4} r_{n+k}\, (\alpha_{n+k+2} - \lambda)\, (\alpha_{n+k+4} - \lambda), \qquad (1.30)$$

где $r_s = q_s + q_{s+1}$. Ясно теперь, что в силу (1.7) рассматриваемая динамическая система обладает тремя полиномиальными первыми интегралами, простейшим из которых является

$$Q_1 = \sum_{k=0}^{4} r_{n+k} = 2(q_n + q_{n+1} + \ldots + q_{n+4}).$$

Эти интегралы функционально независимы, и остается указать два векторных поля, удовлетворяющих условиям (1.23),(1.27)(одно из них всегда совпадает с d/dx). Заметив, что динамическая система (1.13) является гамильтоновой, т.е. записывается в виде

$$d\mathbf{q}/dx = J\, \mathrm{grad} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\tfrac{1}{3}\, q_{k+n}^3 + \alpha_{k+n}\, q_{k+n}\right),$$

где $J = (T+E)^{-1}(T-E)$ - антисимметрическая матрица, мы можем использовать векторные поля, соответствующие динамическим системам

$$d\mathbf{q}/dt_j = J\, \mathrm{grad}\, Q_j \qquad (j = 1,2,3). \qquad (1.31)$$

Очевидно, что $\mathrm{grad}\, Q_1 \in \mathrm{Ker}\, J$. Несложные вычисления показывают, что $d/dt_2 = -d/dx$. Полученная пара векторных полей $X_j = d/dt_j$ $(j=2,3)$ и набор (1.30) первых интегралов Q_1, Q_2, Q_3 удовлетворяют всем условиям теоремы 1.3. Например, известное соответствие между скобками Пуассона и коммутаторами дает

$$dQ_3/dx = (\mathrm{grad}\, Q_3)^{\mathrm{T}}\, J\, \mathrm{grad}\, Q_2 = \{Q_3, Q_2\}\, \Gamma \Longrightarrow [X_3, X_2] = 0.$$

Таким образом, динамическая система (1.13) интегрируема по Лиувиллю при $N=5$, и ее общее решение зависит, кроме исходной независимой переменной $x=-t_2$, от дополнительного аргумента t_3. Другими словами, интегрирование по Лиувиллю дает функцию $\mathbf{q}(t_2, t_3)$, удовлетворяющую системе уравнений (1.31). Читателю рекомендуется проверить, что в частном случае $\alpha_n = 0$, $\forall n$, двойственная к (1.13) динамическая система (1.31) с $j=3$ сводится к цепочке уравнений

$$dq_s/d\tau = (q_s + q_{s+1})^{-1} - (q_s + q_{s-1})^{-1}, \qquad (1.32)$$

где

$$\tau = c_3 t_3, \ c_3 = \prod_{k=0}^{4} (q_{n+k} + q_{n+k+1}) = \mathrm{const},$$

и наложено условие периодичности $q_{s+5}=q_s$. В общем случае можно проверить довольно длинным вычислением, что следствием (1.31) являются следующие соотношения между частными производными по $x=-t_2$ и t_3 рассматриваемого общего решения динамической системы (1.13) с N=5:

$$q_{nt} = q_{nxxx} - 6(q_n^2+\alpha_n)q_{nx}, \tag{1.33}$$

$$u_{nt} = u_{nxxx} - 6u_n u_{nx}. \tag{1.34}$$

Здесь (ср. (1.11)) $u_n=q_{nx}-q_n^2-\alpha_n$ и векторное поле d/dt является следующей линейной комбинацией векторных полей (1.31):

$$d/dt = - 4\ d/dt_3 - 2(Q_1^2 + 4 \sum_0^4 \alpha_k)\ d/dx.$$

Подводя итоги, можно сказать, что уравнение Кортевега-де Фриза (1.34) возникает независимо от нашего желания при интегрировании динамической системы (1.13). Более того, оказывается, что ассоциированная с (1.13) динамическая система (1.31) с j=3 совпадает с модифицированным уравнением Кортевега-де Фриза (1.33) с точностью до переобозначений. В следующем параграфе будет показано, что эти установленные на рассмотренном выше примере факты являются частным случаем весьма общего и простого утверждения о паре коммутирующих бесконечномерных векторных полей.

1.3. Постановка задачи. Объектом изучения в дальнейшем будут следующие бесконечные цепочки уравнений, обобщающие (1.32), (1.16) и (1.15) соответственно:

$$q_{nx} = F(q_n,\ q_{n-1},\ q_{n+1}), \tag{1.35}$$

$$q_{nxx} = F(q_{nx},\ q_n,\ q_{n-1},\ q_{n+1}), \tag{1.36}$$

$$p_{nx} = F(p_n,\ q_n,\ p_{n+1}),\ q_{nx} = G(p_n,\ q_n,\ q_{n-1}). \tag{1.37}$$

Будут исследоваться также векторные цепочки вида

$$p_{nx} = F(p_n,\ q_n,\ q_{n+1}), \quad q_{nx} = G(p_n,\ q_n,\ q_{n-1}). \tag{1.38}$$

Нетрудно проверить, что при $G(a,b,c)=F(b,c,a)$ векторная цепочка (1.38) сводится к скалярной (1.35), если обозначить $p_n=\tilde{q}_{2n}$, $q_n=q_{2n-1}$. Цепочки, связанные точечными преобразованиями $\tilde{p}_n=\varphi(p_n)$, $\tilde{q}_n=\psi(q_n)$, будут рассматриваться как эквивалентные, так что переход от скалярной цепочки (1.36) к соответствующей векторной цепочке (1.38)

$$p_{nx} = F(p_n,\ q_n,\ q_{n+1}), \quad q_{nx} = F(q_n,\ p_{n-1},\ p_n)$$

расширяет класс допустимых преобразований. Очевидно, что структура уравнений (1.35)-(1.38) сохраняется при точечных преобразованиях, изменяется только вид функций, стоящих в правых частях этих уравнений.

Рассматриваемые нелинейные цепочки относятся к широкому классу *бесконечномерных динамических систем* вида

$$dq_n/dx = F_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1.39}$$

где каждая из вектор-функций $F_n=(F_n^1,\ldots,F_n^d)$ зависит от конечного набора *динамических переменных* $q_k=(q_k^1,\ldots,q_k^d)$, меняющегося вместе с номером уравнения (1.39). Например, для обобщенной цепочки Тоды (1.36), положив $q_n^1=q_n$, $q_n^2=p_n=dq_n/dx$, мы приходим к бесконечномерной динамической системе

$$dq_n/dx = p_n, \; dp_n/dx = F(p_n, \; q_n, \; q_{n-1}, \; q_{n+1}).$$

В основе развиваемой теории лежит предположение о существовании *двойственной* к (1.39) бесконечномерной динамической системы

$$dq_n/dt = f_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1.40}$$

удовлетворяющей условию коммутирования соответствующих (1.39), (1.40) векторных полей:

$$\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} F_n \frac{\partial}{\partial q_n}, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \frac{\partial}{\partial q_n} \right] = 0.$$

Эти векторные поля задают дифференцирования $D=D_x$ и D_t на множестве функций от конечных наборов динамических переменных и условие коммутирования векторных полей эквивалентно соотношениям

$$D(f_n) = D_t(F_n), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.41}$$

Нашей целью является получение из (1.39), (1.40) дифференциальных следствий

$$\Phi(u, \; D^j D_t^k(u)) = 0, \tag{1.42}$$

представляющих собой *замкнутую систему уравнений с частными производными.*[1] Здесь $u=(u^1,\ldots,u^m)$ - некоторый выделенный набор компонент динамических переменных, причем число „независимых" уравнений в (1.42) совпадает с длиной $m \geq d$ этого набора.

В дополнение к основной гипотезе о существовании двойственной к (1.39) бесконечной системы уравнений (1.40) будет предполагаться, что и та, и другая системы уравнений *инвариантны относительно сдвига* $n \to n+1$. Как правило, мы называем такие бесконечномерные динамические системы просто *цепочками* (ср. (1.35)-(1.38)). Жесткое требование инвариантности относительно сдвига заменяет в определенном смысле условия интегрируемости из теоремы 1.3 и позволяет в рассматриваемых далее случаях (1.35)-(1.38) эффективно находить двойственную цепочку (1.40) и *ассоциированное уравнение в частных производных* (1.42) непосредственно по правой части исходной цепочки (1.39). Возникающие здесь условия, необходимые для существования двойственной к (1.39) цепочки (1.40), тесно связаны с симметрийным подходом к проблеме интегрируемости уравнений с частными производными, изложенным в обзоре [9]. Чтобы подчеркнуть эти связи, мы введем следующее

---

[1] В дальнейшем будут указаны общие условия, гарантирующие эквивалентность пары цепочек (1.39), (1.40) и ассоциированной с ними конечной системы уравнений с частными производными (1.42) (см. теорему 2.2).

Определение 1.4. *Локальным законом сохранения инвариантной относительно сдвигов векторной цепочки* (1.39) *называется скалярное соотношение вида*

$$D(h) = (T - E)(r), \tag{1.43}$$

где T - *оператор сдвига* ($T(q^i_n) = q^i_{n+1}$), *действующий на множестве функций от любых конечных наборов динамических переменных. Плотностью закона сохранения* (1.43) *называется функция* h *из левой части этого соотношения. Локальный закон сохранения* (1.43) *называется тривиальным, если обращаются в нуль вариационные производные от его плотности*:

$$\delta h/\delta q^i_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \partial(T^n h)/\partial q^i_0 = 0, \quad i=1,\dots,d. \tag{1.44}$$

Аналогично непрерывному случаю (см. [10]) можно доказать, что обращение в нуль вариационных производных (1.44) гарантирует представление функции h в следующем виде

$$h = (T - E)\,\tilde{h} + \mathrm{const},$$

где $\tilde{h}$ - некоторая другая функция от конечного числа динамических переменных. Очевидно также, что

$$(\delta/\delta q^i_0)(T-E) \equiv 0, \quad i=1,\dots,d. \tag{1.45}$$

Отметим в заключении этого параграфа, что любая инвариантная относительно сдвига бесконечномерная динамическая система (1.39) допускает конечномерную редукцию - замыкание на период:

$$\mathbf{q}_{n+N} = \mathbf{q}_n, \qquad \forall\, n. \tag{1.46}$$

В результате замыкания оператор сдвига переходит в циклическую перестановку

$$T\colon (q_{n+1},\dots,q_{n+N}) \longrightarrow (q_{n+2},\dots,q_{n+N},\ q_{n+1}),$$

и полученная в результате замыкания конечномерная динамическая система инвариантна относительно указанной перестановки переменных. Локальные законы сохранения исходной незамкнутой цепочки являются прообразами первых интегралов редуцированной системы, и для решений этой системы в силу (1.43) имеем

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=n}^{n+N-1} T^k(h) = \sum_{k=n}^{n+N-1} T^k\left(\frac{dh}{dx}\right) = \sum_{k=n}^{n+N-1} (T^{k+1} - T^k)(r) = 0.$$

Можно проверить, что факт коммутирования векторных полей (см. (1.41)) не нарушается при замыкании на период, поскольку соответствующие этим полям дифференцирования коммутируют со сдвигом ($TD=DT$, $TD_t=D_tT$).

§ 2. Общая теория и примеры

2.1. Условие регулярности. Для построения решения бесконечномерной динамической системы (1.39) мы можем задать компоненты вектора $\mathbf{q}_n$ в одной или нескольких соседних точках ($n \approx n_0$) как функции от x и попытаться восстановить решение, переходя к следующим уравнениям системы. Например, для цепочки уравнений

(1.38) находим

$$q_{n+1} = \varphi(p_n, q_n, p_{nx}),$$

$$p_{n+1} = \psi(p_n, q_{n+1}, (q_{n+1})_x) = \tilde{\psi}(p_n, q_n, p_{nx}, q_{nx}, p_{nxx})$$

и аналогичные формулы для p_{n-1}, q_{n-1}. Поэтому, задав значения динамических переменных $p_n=u(x)$, $q_n=v(x)$ в точке $n=n_0$, мы можем найти $p_n(x), q_n(x)$ при любом $n\in\mathbb{Z}$, выразив их через $u, v, u_x, v_x, \ldots$ Другими словами, общее решение цепочки уравнений (1.38) содержит две произвольные функции.

Условимся называть *рангом* бесконечномерной динамической системы (1.39) число произвольных функций от x, входящих в ее общее решение. Примером системы ранга 1 является цепочка вида

$$q_{nx} = F(q_n, q_{n+1}).$$

Однако в этом случае условие $q_n=u(x)$ при $n=n_0$ однозначно определяет $q_n(x)$ только при $n\geq n_0$; при $n<n_0$ в ответе появляются дополнительные константы интегрирования.

В случае векторной цепочки общего вида

$$\begin{cases} p_{nx} = F(p_n, q_n, p_{n+1}, q_{n+1}, p_{n-1}, q_{n-1}), \\ q_{nx} = G(p_n, q_n, p_{n+1}, q_{n+1}, p_{n-1}, q_{n-1}) \end{cases} \tag{2.1}$$

выбор начальных данных

$$p_n=u(x), \quad q_n=v(x) \qquad (n=n_0) \tag{2.2}$$

возможен, если цепочка (2.1) эквивалентна следующей

$$\begin{cases} F_+(p_n, q_n, p_{nx}, q_{nx}, p_{n+1}, q_{n+1}) = 0, \\ F_-(p_n, q_n, p_{nx}, q_{nx}, p_{n-1}, q_{n-1}) = 0. \end{cases}$$

При этом функции $p_{n+1}(x), q_{n+1}(x)$ определяются из уравнений

$$\begin{cases} F_+(p_n, q_n, p_{nx}, q_{nx}, p_{n+1}, q_{n+1}) = 0, \\ F_-(p_{n+1}, q_{n+1}, (p_{n+1})_x, (q_{n+1})_x, p_n, q_n) = 0. \end{cases}$$

Аналогичные уравнения имеют место и для функций $p_{n-1}(x), q_{n-1}(x)$. Характерными примерами таких цепочек (2.1) являются (1.37), (1.38).

В случае общего положения векторная цепочка

$$\mathbf{q}_{nx} = \mathbf{F}_n = \mathbf{F}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{q}_{n-1}), \quad \mathbf{q} = (q^1, \ldots, q^m), \tag{2.3}$$

имеет ранг $2m$, так как условия невырожденности

$$\det \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{q}_{n+1} \neq 0, \qquad \det \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{q}_{n-1} \neq 0 \tag{2.4}$$

гарантируют однозначную разрешимость задачи с начальными условиями

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{u}(x), \quad \mathbf{q}_{n-1} = \mathbf{v}(x) \qquad (n=n_0). \tag{2.5}$$

Ясно, что скалярная цепочка (1.35) имеет ранг 2 в случае общего положения. Обобщенная цепочка Тоды (1.36) также имеет ранг 2, так как при выполнении условий невырожденности, аналогичных (2.4), начальные данные (2.5) позволяют найти $q_n(x)$, $\forall n$, по формулам следующего вида

$$q_{n+1}= F_+(q_n,\ q_{nx},\ q_{nxx},\ q_{n-1}),$$
$$q_{n-2}= F_-(q_n,\ q_{n-1},\ (q_{n-1})_x,\ (q_{n-1})_{xx}. \qquad (2.6)$$

Таким образом, общее решение цепочки (1.36) содержит две произвольные функции.

Определение 2.1. *Нелинейную цепочку будем называть регулярной, если начальные данные при $n\approx n_0$ однозначно определяют функции* $q_n(x)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Для регулярной цепочки ранга M все компоненты решения $\{q_n(x), n\in\mathbb{Z}\}$ однозначно выражаются через вектор-функцию $u=(u^1(x),\dots,u^M(x))$ начальных данных задачи Коши по дискретной переменной n по формулам

$$q_n= Q_n(u,\ u_x,\ u_{xx},\dots), \qquad (2.7)$$

где число производных в правой части конечно при любом n, но неограниченно растет при $n\longrightarrow\pm\infty$. Рассмотренные выше цепочки (1.35),(1.36),(1.38) являются примерами регулярных цепочек. Цепочка (1.37) таковой не является, так как при решении задачи Коши по дискретной переменной возникают дополнительные константы интегрирования.

Теорема 2.2. *Пусть заданы бесконечномерные динамические системы* (1.39), (1.40), *удовлетворяющие условиям* (1.41) *коммутирования соответствующих векторных полей. Предположим, что эти системы инвариантны относительно сдвига и что первая система* (1.39) *является регулярной цепочкой ранга M. Тогда задача о построении общего решения уравнений* (1.39), (1.40) *эквивалентна задаче Коши для эволюционного уравнения с частными производными*

$$u_t= G(u,\ u_x,u_{xx},\dots), \qquad (2.8)$$

где правая часть уравнения для $u^j=q^{i(j)}_{n(j)}$ получается в результате подстановки (2.7) *в правую часть соответствующего уравнения цепочки* (1.40).

Сокращенное доказательство. Уравнения (2.8) являются следствием (1.39),(1.40), и поэтому из существования совместного решения $\{q_n(x,t),\ n\in\mathbb{Z}\}$ цепочек следует существование решения уравнений (2.8).

Пусть теперь $u(x,t)$ - решение задачи Коши для эволюционного уравнения (2.8) с начальными данными

$$u^i(x,t) = \varphi^i(x); \quad i = 1,\dots,M; \quad t = 0. \qquad (2.9)$$

Формулы (2.7) позволяют найти вектор-функции $q_n(x,t)$ при любом $n\in\mathbb{Z}$. Нужно проверить, что построенные функции удовлетворяют всем уравнениям цепочек (1.39),(1.40). По определению формулы (2.7) дают решение уравнений (1.39) при любом выборе функций $u^i(x,t)$. Так как $u^i=q^{j(i)}_{n(i)}$, уравнения (2.8) гарантируют выполнение уравнений $D_t(q^{j(i)}_{n(i)}) = F^{j(i)}_{n(i)}$. Выполнение остальных уравнений цепочки (1.40) обеспечивается условиями (1.41) коммутирования векторных полей. Точнее, из условий коммутирования (1.41) векторных полей следует, что формулы (2.7) переводят решение (2.8) снова в решение.

Теорема 2.2 показывает, что в бесконечномерном случае совместное решение цепочек (1.39),(1.40) зависит от M произвольных функций (2.9), где M - ранг цепочки (1.39). Напомним, что в конечномерном случае условие коммутирования векторных полей является необходимым и достаточным для существования совместного решения соответствующих этим полям динамических систем

$$q_{nx}= F_n, \qquad q_{nt}= f_n \qquad (n = 1,\dots,N),$$

зависящего от N произвольных постоянных.

Проиллюстрируем теорему 2.2 на примере цепочки Тоды

$$q_{nxx} = \exp\,(q_{n+1}- q_n) - \exp\,(q_n - q_{n-1}). \tag{2.10}$$

Читатель может проверить прямым вычислением, что следующие цепочки являются двойственными к рассматриваемой цепочки Тоды:

$$q_{nt} = q_{nx}^2+ \exp\,(q_{n+1}- q_n) + \exp\,(q_n- q_{n-1}), \tag{2.11}$$

$$q_{nt} = q_{nx}^3+ (2q_{nx}+ q_{n+1,x}) \exp\,(q_{n+1}- q_n) +$$
$$+ (2q_{nx}+ q_{n-1,x}) \exp\,(q_n- q_{n-1}). \tag{2.12}$$

Как уже отмечалось, цепочки вида (1.36) являются регулярными и, положив (ср. (2.5))

$$u_n = \exp q_n, \qquad v_n = \exp\,(-q_{n-1}), \tag{2.13}$$

мы можем выразить правые части двойственных цепочек через производные функций (2.13). Несложные вычисления приводят в случае (2.11) к системе уравнений

$$u_{nt} = u_{nxx} + 2u_n^2v_n, \qquad -v_{nt} = v_{nxx} + 2v_n^2u_n. \tag{2.14}$$

Таким образом, ассоциированное с (2.10),(2.11) уравнение вида (2.8) совпадает с обобщенным уравнением Шредингера (2.14) с кубической нелинейностью. Аналогичные вычисления в случае (2.10),(2.12) приводят к обобщенному модифицированному уравнению Кортевега-де Фриза

$$u_{nt} = u_{nxxx} + 6u_nv_nu_{nx}, \quad v_{nt} = v_{nxxx} + 6u_nv_nv_{nx}. \tag{2.15}$$

Теорема 2.2 утверждает, что любое решение $u_m(x,t), v_m(x,t)$ ассоциированного уравнения (2.14) или (2.15) и формулы вида (2.13) позволяют построить совместное решение $[q_n(x,t),\ n \in \mathbb{Z}\}$ цепочек (2.10),(2.11) или (2.10),(2.12).

Цепочку Тоды (2.10) часто записывают в переменных $u_n=\exp\,(q_{n+1}-q_n), v_n=q_{nx}$:

$$u_{nx} = u_n(v_{n+1}-v_n), \quad v_{nx} = u_n-u_{n-1}. \tag{2.16}$$

Эта цепочка относится к регулярным цепочкам вида (1.38). Ассоциированными с (2.16) являются следующие системы уравнений (ср. [11, [12]):

$$u_{nt} = u_{nxx} + 2(u_nv_n), \qquad v_{nt} = -v_{nxx} + (v_n^2 + 2u_n)_x, \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} u_{nt} = u_{nxxx} + 3(v_n u_{nx} + u_n^2 + u_n v_n^2)_x, \\ v_{nt} = v_{nxxx} + (-3v_n v_{nx} + v_n^3 + 6u_n v_n)_x. \end{cases} \tag{2.18}$$

Очевидно, что в случае регулярной цепочки (1.39) вид двойственной цепочки (1.40) однозначно восстанавливается по ассоциированному уравнению в частных производных (2.8). Иллюстрацией к этому общему утверждению могут служить пары уравнений (2.11) и (2.14), (2.12) и (2.15). Читатель может восстановить по (2.17),(2.18) цепочки вида (1.40) и проверить выполнение условий (1.41) коммутирования векторных полей.

Ясно, что вид ассоциированного уравнения в частных производных (2.8) не зависит от выбора точки $n \in \mathbb{Z}$, в которой задаются начальные данные для исходной цепочки (1.39). В регулярном случае формулы (2.7) позволяют найти явное выражение действия оператора сдвига $n \longrightarrow n+1$ на решения уравнения (2.8). Как было отмечено в конце доказательства теоремы 2.2, этот оператор переводит решение ассоциированного уравнения снова в решение. Таким образом, в условиях теоремы 2.2 справедливо:

Следствие 2.3. *Эволюционное уравнение* (2.8), *ассоциированное с регулярной цепочкой* (1.39), *допускает обратимую дифференциальную подстановку*

$$U = U(u,\ u_x,\ u_{xx}, \dots), \tag{2.19}$$

переводящую решения (2.8) *снова в решения.*

В рассмотренных выше примерах вид дифференциальной подстановки (2.19) легко находится из (2.10),(2.16):

$$(2.10) \Longleftrightarrow u_{n+1} = u_n[(\ln u_n)_{xx} + u_n v_n],\quad v_{n+1} = 1/u_n;$$

$$(2.16) \Longleftrightarrow u_{n+1} = u_n[(\ln u_n)_{xx} + v_{nx}],\quad v_{n+1} = v_n + (\ln u_n)_x.$$

Условие периодического замыкания $u_{n+N} = u_n$, $v_{n+N} = v_n$ приводит к периодическим решениям цепочек (2.10) и (2.16) и конечнозонным решениям уравнений (2.14),(2.15) и (2.17),(2.18) соответственно (см. § 1).

2.2. Примеры квазирегулярных цепочек. Общая схема сведения цепочек (1.39),(1.40) к уравнениям с частными производными допускает обобщение на нерегулярный случай. В качестве примера рассмотрим линейную цепочку ранга 1

$$\partial_x(q_n) = q_{n+1}. \tag{2.20}$$

Очевидно, что двойственной к (2.20) является любая цепочка вида

$$\partial_t(q_n) = q_{n+m}. \tag{2.21}$$

При $m=2$, как и в регулярном случае, мы находим, что совместное решение (2.20),(2.21) удовлетворяет эволюционному уравнению $u_t = u_{xx}$ $(u = q_n)$. Случай $m = -1$ приводит к гиперболическому уравнению

$$u_{xt} = u. \tag{2.22}$$

Отметим, что замена

$$p_n = q_{n+1}/q_n \tag{2.23}$$

переводит цепочку (2.20) в дискретный аналог уравнения Бюргерса

$$p_{nx} = p_n(p_{n+1} - p_n). \tag{2.24}$$

Совместные с (2.24) цепочки получаются из (2.21) заменой (2.23) и приводят при m = =2 к уравнению Бюргерса

$$v_t = v_{xx} + 2vv_x \qquad (v = p_n) \tag{2.25}$$

и при $m = -1$ к гиперболическому уравнению

$$w_{xt} + (e^w)_t - (e^{-w})_x = 0 \qquad (p_n = e^w). \tag{2.26}$$

Замена (2.23) с учетом (2.20) совпадает с заменой $v = u_x/u$, линеаризующей уравнение Бюргерса (2.25). Аналогичная замена сводит (2.26) к (2.22).

Как отмечалось в § 2, п.2.1, цепочки вида (1.37) в отличие от цепочек вида (1.38) регулярными не являются. Для этих цепочек возможны два варианта выбора начальных данных:

$$p_n = u, \ q_n = v; \tag{2.27}$$

$$p_n = u, \ q_{n-1} = v. \tag{2.28}$$

В рассматриваемом случае (1.37) мы не можем выразить все динамические переменные через начальные данные u, v. Тем не менее, как показывают приведенные ниже примеры, двойственные цепочки позволяют, как правило, получить замкнутую систему уравнений в частных производных на функции (2.27),(2.28) (такие цепочки мы называем *квазирегулярными*). Полученная система, как и в регулярном случае, является следствием соответствующей пары цепочек (1.39),(1.40). Из (1.37) видно, что решения ассоциированного уравнения с частными производными, соответствующего выбору начальных данных (2.28), получаются из решений уравнения, соответствующего выбору (2.27), по формулам вида

$$\tilde{u} = u, \qquad \tilde{v} = V(u, v, v_x). \tag{2.29}$$

В качестве примера рассмотрим локальный вариант цепочки (1.15):

$$p_{nx} = p_{n+1} + p_n^2 q_n, \qquad -q_{nx} = q_{n-1} + q_n^2 p_n. \tag{2.30}$$

Рассматриваемая цепочка относится к бесконечным гамильтоновым системам вида (см.(1.44))

$$p_{nx} = r_n \delta h_n / \delta q_n, \qquad q_{nx} = -r_n \delta h_n / \delta p_n, \tag{2.31}$$

где $r_n = 1$, $h_n = p_{n+1} q_n + p_n^2 q_n^2 / 2$. Используя гамильтоновость, мы можем построить двойственную цепочку по локальному закону сохранения (см. определение 1.4) с плотностью

$$h_n = p_{n+2} q_n + p_{n+1}^2 q_{n+1} q_n + p_{n+1} p_n q_n^2 + \tfrac{1}{3} p_n^3 q_n^3.$$

Выбор начальных данных (2.28) приводит, как и в случае с цепочкой Тоды, к системе (2.14), а выбор (2.27) - к другой известной интегрируемой системе ([12],[13])

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2\,(u^2 v_x + u^3 v^2), \\ -v_t = v_{xx} + 2\,(v^2 u_x - v^3 u^2). \end{cases} \tag{2.32}$$

Решения системы (2.14) получаются из решений (2.32) по формуле $\tilde{u} = u$, $\tilde{v} = -(uv + v_x^2)$ (ср. (2.29)).

Условие существования двойственной цепочки накладывает жесткие требования на вид правой части цепочки (1.37). В результате анализа цепочек вида (2.31),(1.37) удалось найти еще два интересных примера таких цепочек (см. [14]). В первом случае

$$h_n = (p_{n+1}-p_n)\, q_n, \qquad r_n = \alpha p_n q_n + \beta(p_n+q_n) + \gamma, \tag{2.33}$$

во втором

$$\begin{gathered} h_n = \tfrac{1}{2}\ln r_n - \ln(p_{n+1}-q_n), \\ r_n = r(p_n,q_n) = \alpha\, p_n^2 q_n^2 + \beta\, p_n q_n (p_n+q_n) + \\ + \gamma\, p_n q_n + \delta\,(p_n+q_n)^2 + \varepsilon\,(p_n+q_n) + \mu. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Случай (2.31),(2.33) приводит к известным обобщениям систем (2.14),(2.32) (см. [9],[12]). Цепочка (2.31),(2.34) заслуживает более подробного обсуждения.

Напомним, что уравнение Ландау-Лифшица, проинтегрированное в работах [15],[16],

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}\times \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S}\times J\,\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = (S_1,S_2,S_3), \quad S_1^2+S_2^2+S_3^2 = 1, \tag{2.35}$$

в результате стереографической проекции

$$u = \frac{S_1 + i\,S_2}{1+S_3}, \qquad v = \frac{S_1 - i\,S_2}{1+S_3}$$

переходит в систему уравнений

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - 2v\,\dfrac{u_x^2 + R(u)}{u\,v+1} + \dfrac{1}{2}R'(u) = 0, \\ -iv_t + v_{xx} - 2u\,\dfrac{v_x^2 + R(v)}{u\,v+1} + \dfrac{1}{2}R'(v) = 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

где

$$R(u) = \alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 - \beta u + \alpha. \tag{2.37}$$

В случае $J = \mathrm{diag}\,(J_1, J_2, J_3)$ имеем

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\,(J_2 - J_1), \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\,(J_1 + J_2) - J_3, \quad \beta = 0. \tag{2.38}$$

Вопрос об интегрируемых обобщениях классической модели Ландау-Лифшица (2.35) был изучен в работах [9],[12],[17]. В таблице, помещенной в конце данной работы, приведены четыре возможных варианта такого обобщения (2.35) - II(b), IV(b), VI(b), VI(c). Легко видеть, что II(b) переходит при $P(u) \equiv R(u)$ в (2.36) после замены

$$\tilde u = u, \quad \tilde v = -1/v, \quad \tilde t = -it,$$

т.е. совпадает по существу с исходной моделью (2.35).

Рассматриваемая гамильтонова цепочка (2.31),(2.34) и формула вида (2.29) позволяют, как будет показано ниже, решить вопрос о наличии высших законов сохранения у системы уравнений VI(b).[2] Функция

$$h_n = -\frac{r_n}{(p_{n+1}-q_n)(p_n-q_{n-1})} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial r_n/\partial p_n}{p_{n+1}-q_n} +$$

[2]Этот вопрос оставался открытым в цитированных выше работах [9,12,17].

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial r_n/\partial q_n}{p_n - q_{n-1}} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 r_n}{\partial p_n \, \partial q_n}, \tag{2.39}$$

где r_n - определена в (2.34), является плотностью локального закона сохранения, который задает нужную нам цепочку. Вариант (2.28) выбора начальных данных приводит к системе II(b) с

$$P(u) = \frac{1}{2} r \, r_{vv} - \frac{1}{4} r_v^2, \tag{2.40}$$

где $r(u,v)$ - полином (2.34). Иными словами, второй вариант выбора начальных данных приводит к уравнению Ландау-Лифшица. В этих же обозначениях случай (2.37) приводит в точности к системе VI(b). В соответствующей замене (2.29)

$$v = u - r(u,v) \, [v_x + \frac{1}{2} r_u(u,v)]^{-1}. \tag{2.41}$$

Наличие дифференциальной подстановки (2.29),(2.41) позволяет, в частности, утверждать, что система уравнений VI(b) обладает высшими законами сохранения.

Завершая этот раздел, мы рассмотрим гамильтоновы цепочки вида (2.31) с $r_n = p_n q_n - 1$ и $h_n = p_{n+1} q_n$, $h_n = p_{n-1} q_n$ (ср. (2.33)):

$$p_{nx} = (p_n q_n - 1) \, p_{n+1}, \qquad - q_{nx} = (p_n q_n - 1) \, q_{n-1}, \tag{2.42}$$

$$p_{nt} = (p_n q_n - 1) \, p_{n-1}, \qquad - q_{nt} = (p_n q_n - 1) \, q_{n+1}. \tag{2.43}$$

Построить эволюционную систему уравнений в частных производных, ассоциированную с этими цепочками, не удается. Однако, вводя начальные данные (2.27), мы можем выразить через них смешанные производные (ср. (2.22)). В результате получается система гиперболических уравнений

$$\begin{cases} u_{xt} = (uv - 1)^{-1} \, v \, u_x u_t - (uv - 1) \, u, \\ v_{xt} = (uv - 1)^{-1} \, u \, v_x v_t - (uv - 1) \, v, \end{cases}$$

являющаяся следствием цепочек (2.42),(2.43). Редукция $u = v = \sin(w/2)$ этой известной системы [18],[19] записывается в виде

$$w_{xt} = \sin w .$$

2.3. Комплексная структура. Редукции. Возвращаясь к регулярным цепочкам (1.35),(1.36),(1.38), укажем условия, при которых ассоциированное уравнение в частных производных (2.8) записывается в виде системы уравнений

$$u_t = u_{xx} + f(u,v,u_x,v_x), \qquad -v_t = v_{xx} + g(u,v,u_x,v_x), \tag{2.44}$$

обобщающей (2.14),(2.17),(2.32),(2.36). Рассмотрим сначала скалярные цепочки (1.35).

Т е о р е м а 2.4. *Пусть заданы скалярные цепочки*

$$q_{nx} = F(q_n, q_{n+1}, q_{n-1}),$$

$$q_{nt} = G(q_n, q_{n+1}, q_{n-1}, q_{n+2}, q_{n-2}) \,, \qquad (2.45)$$

удовлетворяющие условию коммутирования (1.41) *соответствующих векторных полей. Предположим, что эти цепочки инвариантны относительно одной из следующих инволюций*

$$m = -n, \quad \tilde{x} = -x, \quad \tilde{t} = -t, \quad \tilde{q}_m = \varepsilon q_n \qquad (\varepsilon = \pm 1) \qquad (2.46)$$

и выполнены условия невырожденности

$$\partial F_n / \partial q_{n+i} \neq 0 \quad (i = \pm 1), \qquad \partial G_n / \partial q_{n+j} \neq 0 \quad (j = \pm 2). \qquad (2.47)$$

Тогда функции

$$u(x,t) = q_n(x,t), \quad v(x,t) = \varepsilon\, q_{n-1}(x,t) \qquad (2.48)$$

для любого n *удовлетворяют, при подходящем выборе масштаба* ($\tilde{t} = \lambda t$), *системе уравнений* (2.44), *инвариантной относительно инволюции*

$$\tilde{x} = -x, \quad \tilde{t} = -t, \quad \tilde{u} = v, \quad \tilde{v} = -u. \qquad (2.49)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие совместности (1.41) цепочек (2.45) записывается в виде

$$(\partial F_n/\partial q_{n+1})\, G_{n+1} + (\partial F_n/\partial q_n)\, G_n +$$
$$+ (\partial F_n/\partial q_{n-1})\, G_{n-1} = \sum_k (\partial G_n/\partial q_{n+k})\, F_{n+k} \,. \qquad (2.50)$$

Дифференцирование по q_{n+3} приводит к соотношению

$$(\partial F_n/\partial q_{n+1})\, (\partial G_{n+1}/\partial q_{n+3}) = (\partial G_n/\partial q_{n+2})\, (\partial F_{n+2}/\partial q_{n+3}) \,. \qquad (2.51)$$

Пользуясь условиями невырожденности (2.47), находим из (2.51), что

$$(\partial G_n/\partial q_{n+2}) = \alpha\, (\partial F_n/\partial q_{n+1})\, (\partial F_{n+1}/\partial q_{n+2}) \,, \qquad (2.52)$$

где $\alpha = \mathrm{const}$. Сравнение этой формулы с формулой

$$q_{nxx} = (\partial F_n/\partial q_{n+1})\, F_{n+1} + (\partial F_n/\partial q_n)\, F_n + (\partial F_n/\partial q_{n-1})\, F_{n-1}$$

дает, что

$$u_t - \alpha u_{xx} = \tilde{f}(q_{n+1}, q_n, q_{n-1}, q_{n-2}) = f(u, v, u_x, v_x) \,.$$

Аналогичным образом устанавливается равенство

$$- v_t - \beta\, v_{xx} = g(u, v, u_x, v_x) \,.$$

Инвариантность цепочек (2.45) относительно инволюции (2.46) влечет за собой инвариантность полученной системы уравнений на u, v относительно замены переменных (2.49). Отсюда следует, в частности, что $\alpha = \beta$.

Утверждение теоремы 2.4 остается справедливым и для цепочек (1.36),(1.38). В случае обобщенных цепочек Тоды двойственные к (1.36) цепочки выбираются в виде

$$q_{nt} = G_n = G(q_{n+1}, q_{n-1}, q_n, q_{nx}) \,,$$
$$\partial G_n/\partial q_{n+j} \neq 0 \qquad (j = \pm 1) \,. \qquad (2.53)$$

Предполагается при этом, что обобщенная цепочка Тоды удовлетворяет условиям невырожденности и система уравнений (1.36),(2.53) выдерживает одну из инволюций (2.46). Например, для цепочки Тоды система уравнений (2.10),(2.11) допускает инволюцию (2.46) с $\varepsilon = -1$.

В случае цепочек (1.38), удовлетворяющих условиям регулярности

$$\partial F_n/\partial q_n, \quad \partial F_n/\partial q_{n+1}, \quad \partial G_n/\partial p_n, \quad \partial G_n/\partial p_{n-1} \neq 0,$$

двойственная цепочка записывается в виде

$$\begin{cases} p_{nt} = \varphi(p_n, q_n, p_{n+1}, q_{n+1}, p_{n-1}, q_{n-1}) , \\ q_{nt} = \psi(p_n, q_n, p_{n+1}, q_{n+1}, p_{n-1}, q_{n-1}) \end{cases} \tag{2.54}$$

и удовлетворяет условиям

$$\det\ [\partial(\varphi_n, \psi_n)/\partial(p_{n+k}, q_{n+k})] \neq 0 , \qquad k = \pm 1.$$

Инволюции (2.46) заменяет инволюция

$$m = -n, \quad \tilde{x} = -x, \quad \tilde{t} = -t, \quad \tilde{q}_m = \varepsilon p_n, \quad \tilde{p}_m = \varepsilon q_n, \qquad \varepsilon = \pm 1 , \tag{2.55}$$

а формулы (2.48) перехода к (2.44) заменяются формулами

$$u(x,t) = p_n(x,t), \quad v(x,t) = \varepsilon\ q_n(x,t) .$$

Система уравнений

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = f(u, v, iu_x, iv_x) , \\ -iv_t + v_{xx} = g(u, v, iu_x, iv_x) \end{cases} \tag{2.56}$$

допускает комплексную редукцию ($v = \bar{u}$), если функции f, g удовлетворяют условиям

$$g(a,b,c,d) = f(b,a,-d,-c), \tag{2.57}$$

$$\overline{f(a,b,c,d)} = f(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}). \tag{2.58}$$

Чтобы задать комплексную структуру для системы (2.44) и связанных с ней цепочек (2.45), нужно ввести новые независимые переменные $\tilde{x} = ix$, $\tilde{t} = it$ и потребовать, чтобы в дополнение к инволюции (2.46) цепочки (2.45) выдерживали инволюцию

$$\tilde{x} = -x, \quad \tilde{t} = -t, \quad \tilde{q}_n = \bar{q}_n. \tag{2.59}$$

При этом инволюции (2.46),(2.59) обеспечивают соответственно условия (2.57),(2.58). В случае цепочек вида (1.38) дополнительная инволюция, необходимая для введения комплексной структуры, задается формулами

$$\tilde{x} = -x, \quad \tilde{t} = -t, \qquad \tilde{p}_n = \bar{p}_n, \quad \tilde{q}_n = \bar{q}_n. \tag{2.60}$$

Для цепочек с комплексной структурой, инвариантных относительно пары инволюций (2.46),(2.59) или (2.55),(2.60), соответствующая система (2.56) допускает комплексную редукцию. В случае (1.35),(1.36) условие

$$\varepsilon\ q_{-n-1} = \bar{q}_n, \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.61}$$

а в случае (1.38) условие

$$\varepsilon\ p_{-n} = \bar{q}_n, \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.62}$$

гарантируют, что функция $u=q_0(x,t)$ (или $u=p_0(x,t)$ в случае (1.38)) удовлетворяют редуцированному уравнению

$$iu_t + u_{xx} = f(u, \bar{u}, iu_x, i\bar{u}_x). \qquad (2.63)$$

Действительно, в случаях (1.35),(1.36), например, пара функций $u=q_0$, $v=\varepsilon q_{-1}$ удовлетворяет системе уравнений (2.56), и в силу (2.61) $v=\bar{u}$. Так как рассматриваемые цепочки инвариантны относительно инволюций, задающих комплексную структуру, условия (2.61),(2.62) достаточно наложить на начальные данные. Ясно также, что эти условия не противоречат периодическому замыканию цепочек. Например, для построения конечнозонных решений нелинейного уравнения Шредингера

$$iu_t + u_{xx} = 2|u|^2 u$$

нужно подчинить начальные данные для цепочек (2.10),(2.11) с $x=-i\tilde{x}$, $t=-i\tilde{t}$ условию $-q_{-n-1} = \bar{q}_n$.

Вопрос о скалярных редукциях является более тонким. Например, уравнение Кортевега-де Фриза может быть получено как скалярная редукция модифицированной цепочки Тоды (2.16). Эта цепочка выдерживает редукцию $u_n=u_{-n-1}, v_n=-v_{-n}$. Поскольку $v_0=0$, то функция u_0 удовлетворяет (см.(2.18)) уравнению

$$u_{0t} = u_{0xxx} + 6\, u_0 u_{0x}.$$

Связь цепочки (2.16) с уравнением Кортевега-де Фриза обсуждалась в работе [2]. Пример цепочки Тоды показывает (см.(2.15)), что регулярную цепочку ранга 2 можно использовать для построения решений модифицированного уравнения Кортевега - де Фриза. Как и для комплексной редукции, рассматриваемая пара цепочек (1.39),(1.40) должна выдерживать помимо (2.46) дополнительную инволюцию. В случаях (1.35),(1.36) эта инволюция определяется формулами

$$\tilde{x} = -x, \quad \tilde{t} = -t, \quad \tilde{q}_n = \delta q_n, \quad \delta = \pm 1. \qquad (2.64)$$

Подчинив начальные данные условиям

$$\varepsilon\ \delta\ q_{-n-1} = q_n\ , \qquad (2.65)$$

мы получим решение $u=q_0(x,t)$ редуцированной системы (2.8). Например, цепочка Тоды (2.10) выдерживает обе дополнительные инволюции (2.59) и (2.64) с $\delta=1$. Однако среди двойственных цепочек (2.11),(2.12) относительно инволюции (2.64) с $\delta=1$ инвариантна лишь цепочка (2.12). Условию (2.65) ($\varepsilon\ \delta = -1$) на начальные данные цепочек (2.10), (2.12) приводит к решениям модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + 6\ æ\ u^2 u_x, \qquad (2.66)$$

где æ $=1$. Пара цепочек (2.10),(2.11) этой редукции не допускает.

Уравнение (2.66) может быть получено так же, как редукция известной цепочки Вольтерра [20],

$$q_{nx} = q_n(q_{n+1} - q_{n-1}). \qquad (2,67)$$

Стандартный для цепочек (1.35) выбор переменных $u=q_n$, $v=q_{n-1}$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} u_t = [u_{xx} + 3\,(u+v)\,u_x + u^3 + 6u^2v + 3\,uv^2]_x, \\ v_t = [v_{xx} - 3\,(u+v)\,v_x + v^3 + 6v^2u + 3\,vu^2]_x, \end{cases}$$

скалярной редукцией которой ($v=-u$) является уравнение (2.66) с $æ = -1$.

Более сложный пример скалярной редукции связан с цепочкой IV (a) из таблицы в конце статьи. При $Q(q_n)=\beta\, q_n^3+\delta\, q_n$ эта цепочка допускает инволюцию (2.46) с $\varepsilon=1$ и (2.64) с $\delta=-1$. Можно проверить, что при подходящем выборе двойственной цепочки скалярная редукция (2.65) приводит к известному уравнению типа Кортевега-де Фриза

$$u_t = u_{xxx} - 3\,(u_x u_{xx})/u + 3\,u_x^3 / 2u^2 - \tfrac{3}{16}\,(\beta u + \delta/u)^2\, u_x.$$

Это уравнение чаще записывают в калибровке $u = \exp v$ [21-23].

Квалирегулярные цепочки, рассмотренные в § 2, п.2.2, также допускают комплексную и скалярную редукции. Например, пара цепочек (2.42),(2.43) допускает скалярную редукцию $p_n=(-1)^n q_{-n}$, которая приводит ($\sin w/2 = p_0(x,t)$) к уравнению sine - Gordon. Отметим, что периодическое замыкание возможно здесь только при четных периодах. Редукции цепочки (2.30) приводят, как и в случае цепочки Тоды, к нелинейному уравнению Шредингера и модифицированному уравнению Кортевега -де Фриза.

Для того чтобы обеспечить комплексную структуру цепочки (2.31),(2.34), согласованную с комплексной структурой модели Ландау-Лифшица (2.36), нужно наложить на коэффициенты полинома r_n из (2.34) следующее ограничение: $\alpha-\mu=\beta+\varepsilon=0$. После этого рассматриваемые цепочки допускают дополнительную комплексную редукцию $\bar{p}_n=-(q_{-n-1})^{-1}$ ($\tilde{x} = ix$, $\tilde{t} = it$).

§ 3. Заключение

В конце статьи приведена таблица, в которой мы попытались подвести итоги классификации интегрируемых случаев систем уравнений с частными производными вида (2.44) и регулярных цепочек (1.35),(1.36),(1.38). Долгое время эти две классификационные задачи рассматривались как независимые (см., например, обзор [9]). Идея о сопоставлении имеющихся списков возникла недавно, и первоначально такое сопоставление проводилось по схеме, изложенной при доказательстве теоремы 2.4. При таком подходе исходными являются полные списки интегрируемых цепочек вида (1.35),(1.36), полученные в работах [24-26].

На другую возможность указывает следствие 2.3 теоремы 2.2 из § 2, п.2.1. Непосредственно по заданной системе уравнений (2.44) можно найти обратимую дифференциальную подстановку (явное преобразование Беклунда), допускаемую этой системой. Нетрудно убедиться, что всем трем случаям (1.35),(1.36),(1.38) соответствуют дифференциальные подстановки вида

$$u_{n+1} = U(u_n, v_n, v_{nx}), \quad v_{n+1} = V(v_n,\ u_{n+1},\ (u_{n+1})_x). \tag{3.1}$$

Если исследуемая система уравнений ассоциирована с цепочками (1.35),(1.36), то формулы (3.1) можно значительно упростить (см. примеры в конце § 2, п.2.1).

Восстановление цепочки по явному преобразованию Беклунда (3.1) затруднений не вызывает.

В обсуждаемой таблице приведены ключевые системы уравнений из работ [9],[12] и соответствующие им регулярные цепочки.[3] Уравнению Ландау–Лифшица (2.36),(2.37) соответствует цепочка II (a) с $P(u) = \alpha u^4+\gamma u^2+\alpha$, причем исходная комплексная структура восстанавливается при помощи редукции $\bar{q}_n=-1/q_{-n-1}$ (ср. конец § 2, п.2.3). Наиболее сложные системы уравнений связаны со скалярными цепочками IV(a), V(a), VI(a) из работы [24]. Система уравнений (2.18), редукцией которой является нелинейное уравнение Шредингера, соответствует системе I(b) с $P(a)=1$, $y=\exp(u+v)$.

Теория преобразований, развитая для систем вида (2.44) (см. [9],[12]), естественным образом переносится на цепочки уравнений [14]. Например, любая система вида

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + A\, u_x^2 + B\, u_x v_x + C\, u_x + D\, v_x + E, \\ -v_t = v_{xx} + A\, v_x^2 + B\, u_x v_x - C\, v_x - D\, u_x + E, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $A,B,\dots,E$ – функции переменной $u + v$, сводится к системе I(b) (см. таблицу) заменой вида

$$\tilde{u} + \tilde{v} = a(u+v), \quad \tilde{u}_x = a'(u+v)\, u_x + b\,(u+v), \tag{3.3}$$

где $a'u_x+b$ $(a'\neq 0)$ – плотность закона сохранения системы I(b). Переменные $\tilde{u},\tilde{v}$ в формулах (3.3) относятся к системе (3.2). Функции a',b из формул (3.3) линейно выражаются через функцию $y(u+v)$ из правой части системы уравнений I(b). Соответствующие (3.2) цепочки получаются из I(a) заменой переменных

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n+\tilde{q}_n &= c_1\Theta\,(q_n-q_{n-1}) + c_2\,(q_n - q_{n-1}), \\ \tilde{q}_n-\tilde{q}_{n+1} &= c_1[\Theta(q_n-q_{n-1}) + R(q_{nx})] + \\ &\quad + c_2(q_n- q_{n-1}) + c_3\, S\,(q_{nx}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где Θ,R,S – функции, заданные соотношениями $\Theta'(Z)=y(Z)$, $R'(Z)=Z/P(z)$, $S'(z)=1/P(z)$, а c_1,c_2,c_3 – константы. Эти цепочки относятся к цепочкам вида (1.38) и выбор переменных, приводящий от них к системам (3.2), осуществляется в соответствии с формулами $u = p_n$, $v = q_n$. Система уравнений V(b), так же как и I(b), допускает обобщения при помощи замен вида (3.3). Цепочки (1.38), связанные с этими обобщениями, получаются из V(a) при помощи преобразований, аналогичных (3.4).

Подводя итоги, отметим, что приведенные в таблице цепочки не только задают явные преобразования Беклунда для соответствующих уравнений в частных производных, но и несут в себе полную информацию о симметриях и законах сохранения этих

---

[3]Системы типа уравнения Буссинеска (см.[9,12]) из рассмотрения исключаются.

уравнений [27] (ср. § 1, п. 1.2).[4] В силу теоремы 2.2 любая двойственная цепочка при помощи формул (2.7) превращается в эволюционное уравнение, которое представляет собой симметрию рассматриваемого уравнения (2.44).

Аналогичным образом, если $h_n=h(q_{n+m}, q_{n+m-1},\dots)$ - плотность локального закона сохранения пары совместных цепочек (1.39),(1.40), то в силу определения 1.4 существуют функции ρ,σ такие, что

$$\partial_x h_n = \rho_{n+1} - \rho_n, \qquad \partial_t h_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n. \tag{3.5}$$

Обозначив $c_n=\rho_{nt}-\sigma_{nx}$, мы видим, что $c_{n+1}=c_n$, т.е. $c_n = c = \mathrm{const}$. Таким образом, из (3.5) следует, что

$$\rho_{nt} = (\sigma_n + cx)_x. \tag{3.6}$$

Можно показать (см. [27]), что $c = 0$, если выполнены условия теоремы 2.4 и $\varepsilon = 1$ в формуле (2.46). Переходя в соотношении (3.6) к „новым динамическим переменным", мы получаем при $c = 0$ локальный закон сохранения

$$\partial_t \rho\ (u, u_1, u_2, \dots) = \partial_x \sigma(u, u_1, \dots) \tag{3.7}$$

для эволюционного уравнения (2.44).

Для иллюстрации приведенных выше рассуждений рассмотрим более подробно цепочку (2.67) и соответствующую ей систему уравнений III(b) с $P(z)=Q(z)=z$. Очевидным следствием (2.67) являются соотношения

$$\begin{gathered} q_{nx} = a_{n+1} - a_n, \qquad a_n = q_n q_{n-1}, \\ (\ln q_n)_x = b_{n+1} - b_n = c_{n+1} + c_n, \\ b_n = q_n + q_{n-1}, \qquad c_n = q_n - q_{n-1}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Переходя к переменным (2.48), находим по формулам (3.5) плотности законов сохранения (3.7) соответствующей системы вида III(b) $a=uv$, $b=u+v$. Ясно, что вывод формулы (3.7) обобщается и на „нестандартные" законы сохранения вида

$$\partial_x h_n = \rho_{n+1} + \rho_n, \qquad \partial_t h_n = \sigma_{n+1} + \sigma_n. \tag{3.9}$$

В частности, недостающий закон сохранения с плотностью $\rho=u-v$ можно получить из $c=q_0-q_{-1}$ (см. (3.8)).

При переходе от (2.67) к III(a) нестандартный закон сохранения (3.9) приводится к стандартному виду (3.5). Замена переменных имеет вид $\tilde p_n = q_{2n}, \tilde q_n=q_{2n-1}$, а плотность закона сохранения $\tilde h_n$ соответствующей цепочки вида III(a) строится по плотности h_n для цепочки (2.67) следующим образом: $\tilde h_n=h_{n+1}-h_n$.

---

[4] Это позволяет, в частности, утверждать, что все системы (2.44) из обзоров [9,12], включая IV(b) и VI(c), обладают высшими законами сохранения (ср. примечание в § 2, п.2.2).

ТАБЛИЦА

I

$$(a)\quad q_{nxx} = P(q_{nx})\ [y(q_{n+1} - q_n) - y(q_n - q_{n-1})]$$

$$(b)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + 2\,P\,(u_x)\ y\ (u+v) + \gamma\, u_x^2 \\ -v_t = v_{xx} + 2\,P\,(-v_x) y\ (u+v) + \gamma\, v_x^2 \end{cases}$$

$$P(a) = \varepsilon a^2 + \alpha a + \beta,\ y' = \varepsilon y^2 + \gamma y + \delta$$

II

$$(a)\quad -q_{nxx} = \tfrac{1}{2}\,P'(q_n) + [P(q_n) + q_{nx}^2]\,[(q_{n+1}-q_n)^{-1} - (q_n - q_{n-1})^{-1}]$$

$$(b)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} - 2\ [u_x^2 + P(u)]/(u-v) + \tfrac{1}{2}\,P'(u) \\ -v_t = v_{xx} - 2\ [v_x^2 + P(v)]/(v-u) + \tfrac{1}{2}\,P'(v) \end{cases} \qquad (P^{(5)} = 0)$$

III

$$(a)\quad p_{nx} = P(p_n)\ (q_{n+1} - q_n),\ q_{nx} = Q(q_n)\ (p_n - p_{n-1})$$

$$(b)\quad u_t = u_{xx} + [2\,P(u)\ v + \gamma u^2]_x,\ -v_t = v_{xx} - [2Q(v)u + \alpha v^2]_x$$

$$(c)\quad p_{nx} = \varphi(q_{n+1} - q_n),\ q_{nx} = \psi\ (p_n - p_{n-1})$$

$$(d)\quad u_t = u_{xx} + 2\,P(u_x)\ v_x + \gamma\, u_x^2,\quad -v_t = v_{xx} - 2\,Q(v_x)u_x - \alpha v_x^2$$

$$P(a) = \varepsilon a^2 + \alpha a + \beta,\ Q(a) = \varepsilon a^2 + \gamma a + \delta$$

$$\varphi' = P(\varphi),\ \psi' = Q(\psi)$$

IV

$$(a)\quad q_{nx} = Q(q_n)\ [(q_{n+1}-q_n)^{-1} + (q_n - q_{n-1})^{-1}]$$

$$(b)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} - 2\,u_x^2(u-v)^{-1} + 2\,[r(u,v)\ u_x - Q(u)\ v_x]\ (u-v)^{-2} \\ -v_t = v_{xx} - 2\,v_x^2(v-u)^{-1} - 2\,[r(v,u)\ v_x - Q(v)\ u_x]\ (v-u)^{-2} \end{cases}$$

$$Q(u) = \alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon$$

$$r(u,v) = 2\alpha\, u^2v^2 + \beta\, uv\,(u+v) + 2\gamma\, uv + \delta\,(u+v) + 2\varepsilon$$

V

$$(a)\quad q_{nx} = -2[y(q_{n+1} + q_n) - y(q_n + q_{n-1})]^{-1}$$

$$y' = P(y) = \alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \delta y + \varepsilon$$

$$(b)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + P(y)u_x^2 v_x + P'(y)u_x^2 - \tfrac{2}{3}[P''(y) - 2\gamma]u_x + \tfrac{1}{3}\,P'''(y) \\ -v_t = v_{xx} - P(y)v_x^2 u_x + P'(y)v_x^2 + \tfrac{2}{3}\,[P''(y) - 2\gamma]v_x + \tfrac{1}{3}\,P'''(y) \end{cases}$$

$$y = y(u+v)$$

VI

$$(a)\ q_{nx} = (q_{n+1}-q_{n-1})^{-1}[R_n + \nu(r_n r_{n+1})^{1/2}],\ \nu = 0,1$$

$$R_n = R(q_{n+1}, q_n, q_{n-1}),\ r_n = r(q_n, q_{n-1})$$

$$R(a,b,c) = (\alpha b^2+2\beta b+\gamma)\ ac + (\beta b^2+\mu b+\delta)(a+c) +$$

$$+ \gamma b^2 + 2\delta b + \varepsilon,\ r(a,b) = R(a,b,c)$$

$$(b) \begin{cases} u_t = u_{xx} - [u_x^2 + P(u)][(\ln r)_u + 2v_x r^{-1}] + \frac{1}{2} P'(u) \\ -v_t = v_{xx} - [v_x^2 + P(v)][(\ln r)_v - 2u_x r^{-1}] + \frac{1}{2} P'(v) \end{cases} \quad (\nu=0)$$

$$(c) \begin{cases} u_t = u_{xx} - [u_x^2 + P(u)]v_x r^{-1} - [(\ln r)_u u_x^2 - \frac{r}{2} (\ln r)_{uv} u_x \\ -v_t = v_{xx} + [v_x^2 + P(v)]u_x r^{-1} - [(\ln r)_v v_x^2 + \frac{r}{2} (\ln r)_{uv} v_x \end{cases}$$

$$4P(u) = 2\ r\ r_{vv} - r_v^2,\quad r = r(u,v) \quad (\nu = 1)$$

П р и м е ч а н и е. В таблице используются стандартные для цепочек (1.35), (1.36), (1.38) формулы перехода (см. § 2, п.2.3). Для цепочки I(a) переход осуществляется по формуле $u=q_n$, $v=-q_{n-1}$, для цепочек III(a), (c) - по формуле $u=p_n$, $v=q_n$. В остальных случаях используется формула $u=q_n$, $v=q_{n-1}$.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

[1] З а х а р о в В.Е., Ш а б а т А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // Функцион. анализ и его прил. 1 9 7 9. Т. 13, вып.3. С.13-22.

[2] L e v i D. Nonlinear differential-difference equations as Backlund transformation // J. Phys. A.: Math. Gen. 1 9 8 1. Vol.14, P.1083-1098.

[3] W e i s J. Periodic fixed points of Backlund transformations // J. Math. Phys. 1 9 8 7. Vol.28, N 9. P.2025-2039.

[4] С к л я н и н Е.К. Граничные условия для интегрируемых уравнений // Функцион. анализ и его прил. 1 9 8 7. Т.21, вып.2. С.86-87.

[5] Т о д а М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1 9 8 4.

[6] B u r c h n a l l J.L., C h a n d y T.W. Commutative ordinary differential operators // Proc. R. Soc. Lond. (a). 1 9 2 8. Vol.118. P.557-583.

[7] Д у б р о в и н Б.А., М а т в е е в В.Б., Н о в и к о в С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук. 1 9 7 6. Т.31, вып.1. С.55-136.

[8] Lioville J. Note sur l'integration des equations de la dynamice // J. Math. Pures Appl. 1 8 5 5. Vol.20. P.137-138.

[9] М и х а й л о в А.В., Ш а б а т А.Б., Я м и л о в Р.И. Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // Успехи мат. наук. 1 9 8 7. Т.42, вып.4. С.3-53.

[10] О л в е р П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1 9 8 9.

[11] Р е й м а н А.Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. Л.: Наука,

1 9 8 0. Т.95. С.3-54.

[12] M i k h a i l o v A.V., S h a b a t A.B., Y a m i l o v R.I. Extension of the module of invertible transformations. Classification of integrable systems // Com. Math. Phys. 1 9 8 8. Vol.115. P.1-19.

[13] A b l o v i t z M.J., S e g u r H. Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM. 1 9 8 1. 238 p.

[14] Ш а б а т А.Б., Я м и л о в Р.И. Факторизация нелинейных уравнений типа модели Гейзенберга. Препринт БФ АН СССР. Уфа: БФ АН СССР, 1 9 8 7.

[15] Б о р о в и к А.Е., Р о б у к В.Н. Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау-Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией // Теорет. и мат. физика. 1 9 8 1. Т.46, N 3. С.371-381.

[16] S k l y a n i n E.K. On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation. Preprint LOMI, E-3. Leningrad: LOMI, 1979.

[17] M i k h a i l o v A.V., S h a b a t A.B. Integrable deformations of the Heisenberg model // Phys. Lett. A. 1 9 8 6. Vol.116, N 4. P.191-194.

[18] P o h l m e y e r K. Integrable hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints // Com. Math. Phys. 1 9 7 6. Vol.46. P.207.

[19] L u n d F., R e g g e T. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions // Phys. Rev. D. 1 9 7 6. Vol.14. P.1524.

[20] V o l t e r r a V. Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie. Paris: Gauthier-Villars, 1 9 3 1.

[21] C o l o g e r o F., D e g a s p e r i s A. Reduction technique for matrix nonlinear evolutions by the spectral transform. Preprint 151. Istituto di Fisica G. Marconi Univ. di Roma, 1 9 7 9.

[22] F o k a s A.S. A symmetry approach to exactly solvable evolution equations // J. Math. Phys. 1 9 8 0. Vol.21, N 6. P.1318-1325.

[23] С в и н о л у п о в С.И., С о к о л о в В.В., Я м и л о в Р.И. О опреобразованиях Беклунда для интегрируемых эволюционных уравнений // ДАН СССР. 1 9 8 3. Т.271, N 4. С.802-805.

[24] Я м и л о в Р.И. О классификации дискретных эволюционных уравнений // Успехи мат.наук. 1 9 8 3. Т.38, вып.6. С.155-156.

[25] Я м и л о в Р.И. Дискретные уравнения вида $du_n/dt=F(u_{n+1},u_n,u_{n-1})$ $(n\in Z)$ с бесконечным набором локальных законов сохранения: Дис. канд.физ.-мат. наук. Уфа: БФ АН СССР, 1 9 8 4. 128 с.

[26] Я м и л о в Р.И. Обобщения цепочки Тоды и законы сохранения. Препринт БНЦ. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1 9 8 9.

[27] S h a b a t A.B., Y a m i l o v R.I. Lattice representations of integrable systems // Phys. Let. A. 1 9 8 8. Vol.130, N 4, 5. P.271-275.

Институт математики БНЦ УрО АН СССР
Уфа, ул.Тукаева, 50

Поступило 14 июня 1989 г.