Д. М. Эдиев, Концепция демографического потенциала и ее приложения,
Матем. моделирование, 2003, том 15, номер 12, 37–74

УДК 519.8 (314)

КОНЦЕПЦИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© *Д.М. Эдиев*

Карачаево-Черкесский государственный технологический институт

В работе использованы материалы, полученные при поддержке Бюро образовательных и культурных программ госдепартамента США (грант RSEP 2000), Министерства образования РФ (госбюджетная НИР, 2002-2004гг.), фонда МакАртуров (грант №02-73284, 2002-2003гг.), отдела народонаселения ООН и Российского консорциума экономических исследований, всем им автор выражает свою искреннюю признательность.

Статья содержит обзор развития понятий репродуктивного потенциала и потенциала демографического роста, введенных Р. Фишером и П. Венсаном для асимптотически стабильного населения. На основе аксиоматического подхода предлагаются обобщения на случай популяционной модели с произвольной динамикой повозрастных показателей рождаемости и смертности. Рассматриваются как непрерывные, так и дискретные однополые однородные замкнутые в смысле миграции популяционные модели в форме А. Лотки и П. Лесли соответственно. В то же время указана возможность распространения результатов на модель воспроизводства произвольного вида, проиллюстрированная на примере популяционной модели с учетом очередности рождения. Рассмотрены свойства демографического потенциала и его приложения к оцениванию демографических параметров, сравнительному анализу воспроизводства населения, моделированию демографического перехода и агрегированному моделированию численности и иных линейных показателей населения. Предлагаемые модели верифицированы на тестовых примерах и на эмпирических данных по населению мира и ряда стран. С использованием построенных моделей проведен анализ демографической истории и перспектив населения России. Предложена так же модель популяционной динамики с учетом миграции, которая апробирована на исторических данных по населению США. С привлечением концепции демографического потенциала получен общий результат по эргодическому свойству линейных популяционных моделей, а так же существенно улучшены результаты Шоена, Кима, Рубинова и Чистяковой по монотонной сходимости возрастных структур, предложен класс обоснованных мер инстабильности возрастной структуры населения. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы в исследовании популяционной динамики, демографическом прогнозировании, построении экономико-демографических моделей и исследовании их свойств.

THE CONCEPT OF DEMOGRAPHIC POTENTIAL AND ITS APPLICATIONS

D.M. Ediev

Karachay-Cherkessian State Technological Institute

The paper contents the review of development of the concepts of reproductive value and growth potential earlier introduced by R. Fisher and by P. Vincent for the asymptotically stable population. On the ground of axiomatic approach these concepts are developed for the population with arbitrary time-dependent reproduction regime. Both continuous and discrete models of the close population are considered in the classical form given by A. Lotka and P. Leslie respectively. The possibility of developing the concept for arbitrary population model is illustrated on the case of the age-parity dependent fertility model. Properties of the demographic potential are concerned as well as its applications to estimation of demographic parameters, to comparative study of populations, to modeling the demographic transition, and to aggregate population modeling. Models presented are verified on test examples and on empirical data from the population of the world and different countries. The population history and prospects of Russia are examined using the models introduced. The population model incorporating the migration flows is also developed and approved on the US historical data. Using the demographic potential concept a general result is derived on the ergodic property for arbitrary linear population model. Results of Schoen, Kim, Rubinov, and Chystakova on monotonic convergence to stability are also sufficiently improved. Results presented can be

used in studying the population dynamics, in demographic projecting, and in building and examining the economic-demographic models.

1. Введение

Одним из плодотворных направлений анализа и моделирования социально-экономических систем со сложной структурой является оценивание потенциала роста, заложенного в структуре этих систем [1]. В настоящей работе предлагается реализация этого подхода применительно к демографическим системам. Статья посвящена теории и приложениям демографического потенциала – аддитивного демографического индекса, динамика которого не подвержена влиянию возрастной структуры населения в рамках классической однополой популяционной модели с переменными, вообще говоря, повозрастными показателями рождаемости и смертности, в отсутствие миграции. Традиционный подход к учету структурных особенностей демографических систем восходит к работам А. Лотки [2-5] и заключается в анализе громоздких популяционных моделей, явно учитывающих возрастные особенности рождаемости и смертности. Агрегированные модели, быть может за исключением некогда популярных моделей с логистической динамикой [6, 7], не получили распространения в демографическом моделировании из-за неадекватности в долгосрочном плане динамике численности населения произвольной возрастной структуры. Для устранения отмеченной неадекватности автором [8] была предложена концепция демографического потенциала – индекса, асимптотически эквивалентного численности населения, динамика которого не была бы подвержена влиянию возрастной структуры населения.

При рассмотрении модели асимптотически стабильного населения, т.е. населения с постоянными во времени повозрастными показателями рождаемости и смертности, концепция демографического потенциала сводится к понятию репродуктивного потенциала, введенному американским генетиком и статистиком Р.Фишером [9]. Фишер рассматривал однополые популяционные модели с постоянными во времени повозрастными показателями рождаемости и смертности и нулевой миграцией. Изучая вопрос о том, как соизмерить вклад представителей различных возрастных групп в отдаленное потомство населения, он интерпретировал рождение как заем, выданный человеку, а детей, родившихся от него, как возврат долга. Опираясь на эту финансовую аналогию, в качестве репродуктивного потенциала человека возраста x лет, отражающего его вклад в отдаленное потомство населения, Фишер ввел суммарную текущую стоимость всех его будущих «выплат по долгу», т.е. детей, которым предстоит родиться от него. Причем, в качестве дисконтирующего фактора он использовал асимптотический темп изменения численности населения, известный как истинный коэффициент воспроизводства населения или коэффициент Лотки [10]:

$$v(x) = \frac{e^{\rho x}}{l(x)} \int_x^{\infty} l(y) f(y) e^{-\rho y} dy, \qquad (1)$$

где $v(x)$ – репродуктивный потенциал человека возраста x лет, $l(x)$ – функция дожития, равная доле младенцев, доживающих до возраста x лет, $f(x)$ – функция рождаемости, равная интенсивности рождения детей в возрасте x лет, а ρ – коэффициент Лотки, характеризующий асимптотическую динамику численности населения, и определяемый из равенства:

$$\int_0^{\infty} l(y) f(y) e^{-\rho y} dy = 1. \qquad (2)$$

Фишер показал важное свойство суммарного репродуктивного потенциала населения: темп его прироста равен показателю Лотки, какова бы ни была исходная возрастная структура населения:

$$\frac{\mathbf{d}\,V(t)}{V\,\mathbf{dt}} = \rho, \qquad (3)$$

где $V(t) = \int_0^{\infty} n(x;t)\nu(x)dx$ – суммарный репродуктивный потенциал населения в момент времени t, $n(x,t)$ – плотность численности населения в возрасте x в момент времени t. Другими словами, динамика суммарного репродуктивного потенциала не зависит от возрастной структуры населения, что и объясняет близость концепций репродуктивного и демографического потенциала. Дискретная теория репродуктивного потенциала была развита П. Лесли [11]. Ряд работ был посвящен исследованию зависимости репродуктивного потенциала от возраста, от уровней рождаемости и смертности [12–15]. Л. Гудман [16, 17] исследовал репродуктивные потенциалы для различных режимов воспроизводства и показал, что суммарный репродуктивный потенциал населения пропорционален численности стабильного населения, асимптотически эквивалентного рассматриваемому, - величине, которая была позднее введена в научный оборот Н. Кейфитцем как стабильный эквивалент Q [18]. Развивая концепцию репродуктивного потенциала, Гудман [19] ввел понятие эвентуального (возможного) репродуктивного потенциала, пропорционального асимптотической численности той части населения, которая является прямым потомством людей определенной возрастной группы в начальный момент времени. Он указал так же на возможные приложения концепции репродуктивных потенциалов к сравнительному анализу населения различных регионов, к исследованию асимптотики численности населения. Дальнейшее развитие теория репродуктивного потенциала получила в работах Н. Кейфитца [20, 21]. Кейфитц – вслед за Гудманом – указал на тесную связь репродуктивных потенциалов с асимптотической численностью прямого потомства, разработал соответствующую теорию в непрерывном случае. Он так же рассмотрел приложения концепции к моделированию и анализу процессов смертности и миграции, контроля над рождаемостью и указал на связь с потенциалом роста населения.

Потенциал роста населения был впервые предложен французским демографом П. Венсаном [22]. Эта величина указывает, во сколько раз способна измениться численность населения в ходе стабилизации его возрастной структуры при условии постоянства во времени повозрастных показателей рождаемости и смертности. Потенциал роста тесно связан с репродуктивным потенциалом Фишера, – он пропорционален суммарному репродуктивному потенциалу населения и обратно пропорционален его численности [8].

Применительно к случаю стационарной асимптотики численности населения, потенциал роста был исследован Ж. Буржуа-Пиша [23, 24], который предложил ряд явных зависимостей и упрощающих моделей, удобных для приложений концепции на практике. В отечественной литературе концепция потенциала демографического роста, прежде всего, в форме Буржуа-Пиша, так же привлекла внимание исследователей [25–31 и др.]. Андреев и Пирожков [27], исследуя потенциал роста Венсана, использовали репродуктивные потенциалы Фишера и предложили для характеристики потенциала роста, заложенного в возрастной структуре населения, величину, которая может быть сведена к стабильному эквиваленту Кейфитца Q. Независимо от французской школы концепция потенциала роста была предложена и получила развитие в работах американских демографов, начиная с работы Н. Кейфитца по «инерции» роста населения [32], хотя основные идеи концепции могут быть найдены уже в работах Т. Фреджки [33, 34], Л. Гудмана [19] и работе Н. Кейфитца по стабильному эквиваленту [18]. Кейфитц получил соотношения, аналогичные соотношениям Буржуа-Пиша, а так же предложил упрощенные методы расчета потенциала роста. Впоследствии ряд работ был посвящен улучшению и обобщению полученных Кейфитцем результатов [35–47].

Несмотря на множество работ, концепции репродуктивного потенциала и потенциала роста не были обобщены на случай меняющихся во времени повозрастных показателей рождаемости и смертности, поскольку экспоненциальная асимптотика, играющая существенную роль в указанных концепциях, не имеет места в случае модели с произвольно меняющимися рождаемостью и смертностью. Кроме того, хотя репродуктивный потенциал и потенциал роста предназначались для отражения роли структуры населения в (отдаленной) динамике его численности, на их основе не были построены приемлемые агрегированные модели популяционной динамики, поскольку будучи асимптотически эффективными, соответствующие модели оказались неадекватными в краткосрочном и среднесрочном плане [31: с. 49; 48: с. 53]. В настоящей

работе предлагается обобщение концепции демографического потенциала за счет подхода к нему как к агрегированному демографическому индексу с некоторыми наперед заданными свойствами динамики, без непосредственного увязывания с асимптотикой популяционной модели. Такой подход оказывается вполне плодотворным и приводит к ряду полезных агрегированных моделей популяционной динамики, показавших свою работоспособность на тестовых примерах и в практических приложениях.

2. Демографический потенциал в модели однородного однополого населения

Рассмотрим классическую популяционную модель в дискретной форме [49]:

$$n(t+1) = Ln(t). \tag{4}$$

Здесь $n(t)$ – вектор, компоненты которого суть численности отдельных возрастных групп, а L – матрица «передвижки по возрастам» (матрица Лесли):

$$n(t) = \begin{pmatrix} n_0(t) \\ n_1(t) \\ \dots \\ \dots \\ n_X(t) \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_{X-1} & F_X \\ P_0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & & P_{X-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $n_x(t)$ – численность x-й возрастной группы (обычно – возраста от x до x+1 лет) в момент времени t; индекс "0" соответствует младшей, а "X" – старшей возрастным группам; $P_x, x = \overline{0, X}$ – коэффициенты передвижки, равные вероятности перехода (дожития) из x-й возрастной группы в x+1-ю группу к следующему моменту времени (t+1); $F_x, x = \overline{0, X}$ – возрастные коэффициенты рождаемости, скорректированные с учетом младенческой смертности.

Используем аксиоматический подход к расчету демографических потенциалов [8]. Суть подхода в подборе возрастных коэффициентов демографического потенциала с тем, чтобы выполнялись три наперед заданных свойства:

1^0. *Непрерывность.* Демографический потенциал человека является непрерывной функцией его возраста (для дискретных моделей это условие излишне).

2^0. *Аддитивность.* Общий демографический потенциал всякого населения есть сумма потенциалов составляющих его подгрупп.

3^0. *Преемственность.* Данное условие касается динамики суммарного потенциала произвольного замкнутого населения. Оно может видоизменяться и зависит от особенностей рассматриваемой модели воспроизводства и целей анализа. В качестве общего требования можно положить независимость динамики суммарного потенциала от текущей структуры населения. В рамках моделей с постоянным во времени режимом воспроизводства удобно подбирать демографические потенциалы так, чтобы динамика суммарного потенциала была экспоненциальной с темпом, равным асимптотическому темпу прироста численности населения.

Учитывая, что в рамках линейной модели (4)–(5) асимптотика численности населения и всех его возрастных групп экспоненциальная [49], будем искать демографический потенциал в форме аддитивного индекса с экспоненциальной динамикой для произвольного вектора возрастной структуры:

$$C(t) = c^T n(t), \tag{6}$$

$$C(t) = C(0)\lambda^t, \tag{7}$$

где $C(t)$ – (суммарный) демографический потенциал населения в момент времени t; c – вектор повозрастных демографических потенциалов; λ – коэффициент Лотки, равный Перронову собственному значению матрицы Лесли [49].

Из (4), (6), (7) имеем:

$$\lambda c^T n(t) = \lambda C(t) = C(t+1) = c^T n(t+1) = c^T L n(t) \tag{8}$$

для произвольного вектора возрастной структуры населения $n(t)$. Отсюда следует, что вектор повозрастных демографических потенциалов есть левый собственный вектор матрицы Лесли, соответствующий коэффициенту Лотки:

$$L^T c = \lambda c. \tag{9}$$

Между тем, вектор повозрастных репродуктивных потенциалов Фишера так же является левым собственным вектором матрицы Лесли, соответствующим коэффициенту Лотки [11]. Таким образом, полученная нами величина с точностью до множителя совпадает с репродуктивными потенциалами Фишера и Гудмана (поскольку последний отличается от потенциала Фишера только множителем). Аналогичный результат в непрерывном случае показан в [8] – единственным, с точностью до множителя, нетривиальным аддитивным индексом, непрерывно зависящим от возраста, величина которого для замкнутого асимптотически стабильного населения меняется экспоненциально, является репродуктивный потенциал Фишера (1).

Перейдем к обобщению на случай произвольной линейной модели воспроизводства с переменными, вообще говоря, возрастными показателями рождаемости и смертности:

$$n(t+1) = L(t) n(t). \tag{10}$$

Поскольку в такой постановке ничего нельзя сказать относительно асимптотики численности населения, коэффициент Лотки (а вместе с ним и те финансовые аналогии, которые лежат в основе концепции репродуктивного потенциала) и аксиома преемственности в форме экспоненциальной динамики демографического потенциала теряют смысл. В то же время, важно сохранить ключевое для демографического потенциала условие – независимость его динамики от структуры населения. С учетом этого, наложим на суммарный демографический потенциал наиболее простой тип динамики – постоянство во времени:

$$C(t) = c(t)^T n(t), \tag{11}$$

$$C(t) \equiv \text{const}. \tag{12}$$

В случае произвольной модели воспроизводства повозрастные демографические потенциалы будут зависеть от времени, что и отражено в (11). Из (10)–(12) имеем:

$$c(t)^T n(t) = C(t) = C(t+1) = c(t+1)^T n(t+1) = c(t+1)^T L(t) n(t), \tag{13}$$

откуда:

$$c(t) = L(t)^T c(t+1). \tag{14}$$

Таким образом, динамика повозрастных демографических потенциалов описывается соотношением, аналогичным модели Лесли (10), с обращенным временем и транспонированной матрицей передвижки. Аналогичный результат для непрерывного случая получен в [8] – единственным классом аддитивных, непрерывно зависящих от возраста индексов, постоянных для замкнутого населения, является класс, определяемый следующим интегральным уравнением:

$$c(x,t) = \int_x^\infty \frac{l(y,t)}{l(x,t)} f(y,t) c(0,t+y) dy,, \tag{15}$$

где первая переменная во всех функциях определяет возраст человека, а вторая – момент его рождения; $c(x,t)$ – демографический потенциал человека возраста x лет, который родился в момент времени t; $l(x,t)$ – функция дожития, равная доле младенцев, родившихся в момент времени t, доживших до возраста x лет; $f(x,t)$ – функция рождаемости, т.е. интенсивность рождений в

возрасте x лет для тех, кто родился в момент t. Выписав (15) для потенциала младенцев, получим аналог уравнения восстановления Лотки [10]:

$$c(0,t)=\int_0^\infty l(y,t)f(y,t)c(0,t+y)dy. \qquad (16)$$

Не повторяя вывода (15) [8], покажем, что суммарный демографический потенциал населения, определяемый этим соотношением, действительно постоянен, независимо от возрастной структуры населения:

$$\frac{dC(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^\infty n(x,t-x)c(x,t-x)dx=$$

$$=\frac{d}{dt}\int_0^\infty B(t-x)l(x,t-x)\int_x^\infty \frac{l(y,t-x)}{l(x,t-x)}f(y,t-x)c(0,t-x+y)dydx=$$

$$=\frac{d}{dt}\int_0^\infty B(t-x)\int_x^\infty l(y,t-x)f(y,t-x)c(0,t-x+y)dydx=$$

$$=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^t B(z)\int_{t-z}^\infty l(y,z)f(y,z)c(0,z+y)dydz=$$

$$=B(t)\int_0^\infty l(y,t)f(y,t)c(0,t+y)dy-\int_{-\infty}^t B(z)l(t-z,z)f(t-z,z)c(0,t)dz=$$

$$=B(t)c(0,t)-c(0,t)\int_0^\infty n(x,t-x)f(x,t-x)dx=B(t)c(0,t)-c(0,t)B(t)=0. \qquad (17)$$

Здесь $B(t)=n(0,t)$ – интенсивность рождения детей в момент времени t; $n(x,t-x)=n(x,t)$ – плотность численности населения в возрасте x лет в момент времени t, т.е. плотность тех, кто родился в момент $t-x$. Вообще, запятой мы будем отделять переменную времени, соответствующую моменту рождения некоторой когорты, а точкой с запятой – переменную, соответствующую некоторому моменту времени, для которого рассматриваются показатели современников, представляющих разные когорты.

Остановимся на демографическом смысле потенциалов (14)–(15). Как видно из (15), демографический потенциал равен нулю в старших возрастах с нулевой рождаемостью. При низком уровне смертности демографический потенциал (15) как функция возраста будет монотонно убывать с некоторого начального уровня $c(0,t)$ и до нуля, - по мере выхода из фертильного возраста. Демографический потенциал младенца $c(0,t)$ будет меняться в зависимости от уровня и динамики рождаемости и смертности. Поскольку, как было показано, суммарный демографический потенциал всякой замкнутой группы неизменен, то – в условиях слабой эргодичности – численность, а так же любые линейные показатели (т.е. взвешенные суммы численностей возрастных групп с наперед заданными весами [31: с. 42]) потомства замкнутой группы асимптотически будут пропорциональны ее демографическому потенциалу. Другими словами, какова бы ни была текущая численность подгрупп населения, их вклад в потомство асимптотически будет распределяться пропорционально демографическим потенциалам. Таким образом, потенциалы (15) отражают возможный вклад людей возраста x, родившихся в момент времени t, в отдаленное потомство населения при заданных в модели показателях рождаемости и смертности.

Опираясь на (15), можно обобщить понятие репродуктивного потенциала на случай произвольной популяционной модели. Рассмотрим отношения потенциала (15) к потенциалу младенца (16), при условии, что обе величины относятся к людям – современникам:

$$v(x;t) \overset{\text{def}}{=} \frac{c(x,t-x)}{c(0,t)}. \qquad (18)$$

В условиях постоянства повозрастных показателей рождаемости и смертности величины (18) не зависят от времени и равняются репродуктивным потенциалам Фишера (1). Более того, для моделей с переменными во времени функциями рождаемости и дожития величины (18) сходятся к репродуктивным потенциалам при $t \to -\infty$, если только до некоторого момента времени функции рождаемости и дожития постоянны во времени и если обеспечены некоторые условия регулярности, обычно накладываемые на популяционную модель для обеспечения эргодического свойства [8]. Как было показано Гудманом [16, 17], репродуктивный потенциал Фишера может быть интерпретирован как вклад человека в отдаленное потомство населения, с вкладом младенца, выбранным в качестве единицы измерения. Учитывая это, а так же демографический смысл потенциалов (15), правомерно считать (18) обобщением понятия репродуктивного потенциала. Будем именовать величины (18) и их дискретный аналог (*репродуктивными*) *потенциалами Фишера*. В отличие от этого, потенциалы (14), (15) будем называть (*абсолютными*) *демографическими потенциалами*. Там, где это не вызовет разночтений, термин «демографический потенциал» в широком смысле будем использовать применительно и к абсолютным потенциалам, и к репродуктивным потенциалам, и к другим величинам, отличающимся от них выбором единицы измерения. Возрастные особенности репродуктивных потенциалов Фишера для различных моделей воспроизводства отражены на рисунке 1.

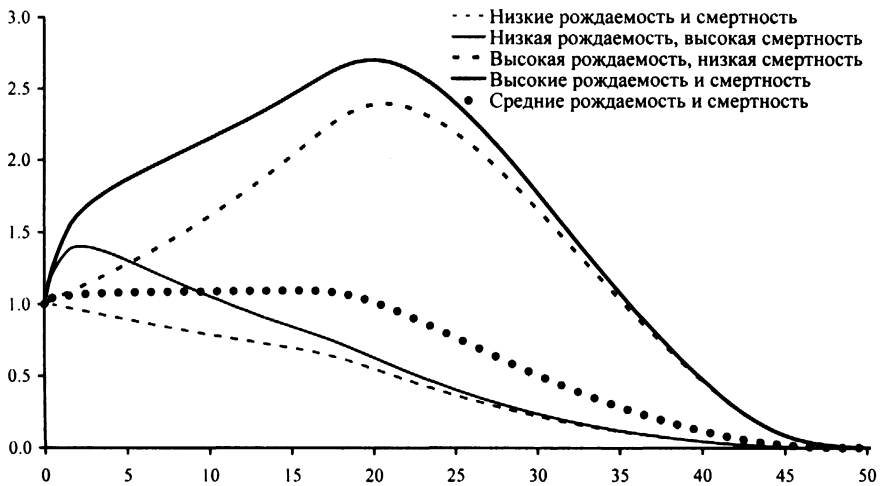

Рис.1. Зависимость репродуктивного потенциала Фишера от возраста при различных уровнях рождаемости и смертности.

3. Демографические потенциалы в произвольной модели воспроизводства населения

Изложенный выше аксиоматический подход к построению демографических потенциалов, когда выражения для этих величин выводятся из некоторых априорных предположений (скажем, непрерывность по возрасту, аддитивность и постоянство суммарного потенциала населения), позволяет разработать концепцию для модели воспроизводства произвольного вида. В частности [8], для линейной модели воспроизводства неоднородного населения, состоящего из различных подгрупп, с учетом возможной миграции между подгруппами, выбытия из населения и возможной принадлежности родившихся к группе, отличающейся от группы родителей, демографические потенциалы определяются из соотношений:

$$c_i(x,t) = \int_x^\infty \frac{l_i(y,t)}{l_i(x,t)} \cdot f_i(y,t) \cdot c^i(0,y,t+y)dy + \sum_{j \neq i} \int_x^\infty \frac{l_i(y,t)}{l_i(x,t)} \cdot w_{ij}(y,t) \cdot c_j(y,t)dy, \qquad (19)$$

где индексы нумеруют подгруппы населения, $i, j=1,2,\ldots$; $c_i(x,t)$ – демографический потенциал представителя i-й подгруппы населения возраста x, родившегося в момент времени t; $w_{ij}(x,t)$ – интенсивность миграции из подгруппы i в подгруппу j в возрасте x для тех, кто родился в момент времени t; функции дожития скорректированы с тем, чтобы учесть убытие за счет миграции (т.е. миграция за пределы подгруппы рассматривается так же, как смерть); величина $c^i(0,x,t)$ равна ожидаемому демографическому потенциалу родившегося от представителя подгруппы i возраста x, который сам родился в момент времени t:

$$c^i(0,x,t) = \sum_{j=1}^{k} c_j(0,t) \cdot a_{ij}(x, t-x), \qquad (20)$$

здесь $a_{ij}(x,t)$ – доля представителей подгруппы j среди родившихся в возрасте x от представителей подгруппы i, которые сами родились в момент времени t.

Описанная модель неоднородного населения достаточно гибка и охватывает целый ряд частных случаев, описанных в литературе (модели с учетом брачного состояния, модели с множественным выбытием, некоторые двуполые модели и др.). В частности, это относится к модели воспроизводства с учетом очередности рождения, в которой смертность моделируется как обычно, с помощью возрастных коэффициентов дожития, а показатели рождаемости зависят от возраста человека и от числа уже рожденных детей [50–52]. В табл.1 приведены результаты расчета соответствующих потенциалов по данным для женского населения США за 1991 год [53]. В качестве единицы измерения выбран потенциал представителей младшей возрастной группы, т.е. величины, приведенные в таблице, аналогичны репродуктивным потенциалам Фишера. В той же таблице приведены потенциалы Фишера, рассчитанные в рамках классической популяционной модели (т.е. без учета порядка рождения) для мужского и женского населения. Все показатели табл.1 были рассчитаны по дискретным моделям с разбивкой по одногодичным возрастным интервалам, а затем были усреднены по пятилетним возрастным интервалам с использованием возрастной структуры соответствующего стабильного населения. Различия в значениях потенциалов в младших возрастах связаны с тем, что в рамках моделей с учетом и без учета порядка рождения получаются разные значения коэффициента Лотки (с учетом порядка рождения: −0,172%; без учета: −0,041%; для мужского населения: −0,023% в год).

Таблица 1.

Демографические потенциалы населения США, рассчитанные на основе модели рождаемости с учетом очередности рождения, данные за 1991 год.

Возраст	Потенциал Фишера для мужского населения	Потенциал Фишера без учета порядка рождения	Среднее значение для стабильн. населения	Потенциалы Фишера женского населения по возрасту и числу рожденных детей							
				0	1	2	3	4	5	6	7 и более
0-4	1,002	1,001	0,998	0,998							
5-9	1,002	1,000	0,991	0,991							
10-14	1,002	0,998	0,984	0,984							
15-19	0,993	0,946	0,953	0,931	1,268	1,214					
20-24	0,872	0,747	0,760	0,718	0,911	0,679	0,702	0,974			
25-29	0,624	0,461	0,470	0,477	0,580	0,336	0,324	0,433			
30-34	0,351	0,209	0,211	0,225	0,287	0,136	0,132	0,176	0,296		
35-39	0,152	0,060	0,059	0,064	0,080	0,034	0,037	0,052	0,090		
40-44	0,053	0,010	0,007	0,008	0,008	0,003	0,004	0,006	0,012	0,020	0,071
45-49	0,017	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002
50 и более	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Среднее значение для стаб. населения	0,412	0,335	0,324	0,667	0,191	0,052	0,040	0,045	0,065	0,104	0,159

В численных расчетах удобно опираться на свойство преемственности, заложенное при построении демографического потенциала. Так, для модели с учетом порядка рождения расчеты потенциалов можно провести по формулам:

$$v_{x,i} = \lambda^{-1}\left(F_{x,i} + P_x\left(f_{x,i}v_{x+1,i+1} + \left(1 - f_{x,i}\right)v_{x+1,i}\right)\right), \quad i = 1,2,\ldots, \tag{21}$$

где $v_{x,i}$ – потенциал Фишера человека x-й возрастной группы, у которого уже родилось i детей (обоих полов); λ – асимптотический коэффициент роста населения (аналог коэффициента Лотки), подбираемый так, чтобы потенциал в младшей возрастной группе $v_{0,0}$ был равен единице; P_x – коэффициенты передвижки (дожития) до следующей возрастной группы, не зависящие от числа рожденных детей; $f_{x,i}$ – возрастные коэффициенты рождаемости с учетом порядка рождения; $F_{x,i}$ – то же самое, но с поправкой на младенческую смертность и долю девочек среди новорожденных (во всех расчетах использовано соотношение 1,055 мальчиков на девочку).

Заметим, что аксиоматический подход к построению демографических потенциалов позволил так же решить задачу, поставленную Пирожковым [25]. А именно, удалось с общих позиций подойти к разработке понятий потенциала роста, репродуктивного потенциала и жизненного потенциала Херша [54], не ограничиваясь при этом рамками моделей с постоянными во времени показателями рождаемости и смертности [8]. Кроме того, концепция демографического потенциала может быть легко распространена на модели воспроизводства, в которых используются отличные от возраста переменные, такие, как масса тела, рост и т.д. Подобные модели находят приложения, например, в теоретической биологии [55–58].

4. Прогностическая значимость демографических потенциалов

Как следует из приведенной выше интерпретации демографических потенциалов, они указывают на асимптотический вклад в численность населения. Это значит, что величины демографических потенциалов различных стран, регионов и проч. представляют ценность в прогнозировании будущих демографических тенденций. Разумеется, демографический потенциал, заложенный в структуре населения, реализуется в его численности не сразу, а по мере того, как структура населения стабилизируется, и численность выходит на свой асимптотический тренд. С некоторой долей грубости можно считать, что демографический потенциал реализуется в численности населения на протяжении времени порядка нескольких поколений, т.е. 50–100 лет. Строго говоря, этот вывод верен только в рамках модели воспроизводства, использованной при расчете потенциалов. Однако на практике прогностическая значимость потенциалов сохраняется и тогда, когда сами потенциалы рассчитываются по некоторой стандартной модели, а показатели воспроизводства реального населения могут отличаться от модельных.

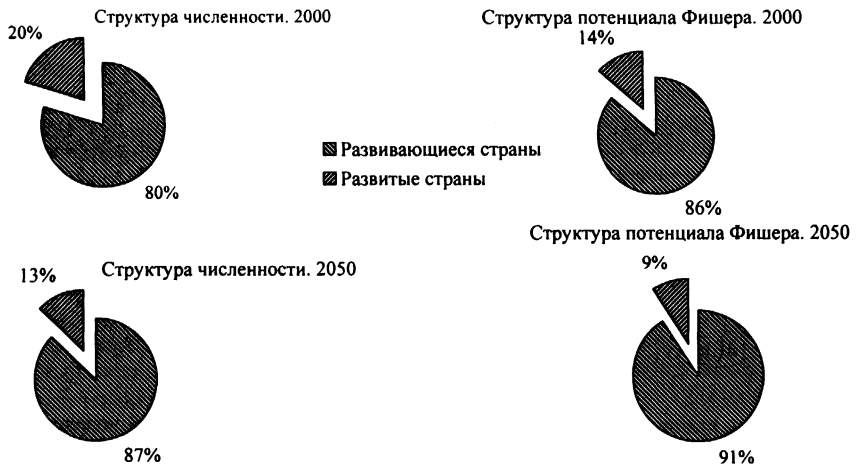

Рис.2. Структура численности и потенциала Фишера женского населения мира в 2000 и 2050 гг. (прогноз Бюро Цензов США).

Так, в то время как доля развитых стран в численности женского населения мира в 2000 году составляла 20%, их доля в демографическом потенциале составила лишь 14% (см. рис.2). К 2050 году, согласно прогнозу бюро цензов США [59], доля развитых стран в численности женского населения опустится до 13%, т.е. практически распределение численности населения мира последует за распределением демографических потенциалов. Расчеты проведены автором с использованием возрастных коэффициентов потенциала Фишера женского населения США 1991 года (см. табл.1) для всех регионов мира как в 2000, так и в 2050 году. Заметим, что к 2050 году понизится доля развитых стран не только в численности мирового населения, но и в демографическом потенциале, – она опустится до 9%. Это связано с предполагаемым сохранением низкой рождаемости в развитых странах по сравнению с ее уровнем в остальных регионах мира. Понижение доли в демографическом потенциале, в свою очередь, явится признаком дальнейшего сокращения доли и в численности населения мира.

Вообще говоря, связь между демографическим потенциалом населения и его численностью в будущем не столь прямолинейна, и более подробно мы остановимся на ней далее, при рассмотрении агрегированных моделей популяционной динамики.

5. Приложение к расчету потенциала демографического роста П.Венсана

Рассмотрим приложение концепции демографического потенциала к расчету потенциала роста и обобщению этого понятия на класс моделей с произвольной асимптотикой. Потенциал роста возрастной структуры населения, впервые предложенный П. Венсаном [22] и по своей сути эквивалентный «инерции популяционного роста» Н. Кейфитца [32], показывает, во сколько раз изменится численность населения по мере стабилизации его возрастной структуры за счет одного только «структурного» фактора. При этом население с молодой возрастной структурой обычно имеет потенциал роста выше единицы, а постаревшее население – меньше единицы. Потенциал может быть определен как отношение численности населения со стабилизировавшейся возрастной структурой к численности исследуемого населения, при условии асимптотической эквивалентности численности этих населений. Упомянутое население стабилизировавшейся возрастной структуры, следуя Кейфитцу [18], будем именовать стабильным эквивалентным населением. В литературе было предложено множество подходов к оцениванию потенциала роста (см. обзор выше). Удобно рассмотреть потенциал роста, опираясь на концепцию демографического потенциала. Поскольку суммарные демографические потенциалы (будь то в абсолютном выражении или Фишера) асимптотически эквивалентных населений должны быть одинаковы, отношение численности таких населений равно:

$$\frac{N_1(t)}{N_2(t)} = \frac{C_1(t)}{C_2(t)} \cdot \frac{N_1(t)/C_1(t)}{N_2(t)/C_2(t)} = \frac{c_2(t)}{c_1(t)}, \tag{22}$$

где $c_i(t)=C_i(t)/N_i(t)$, $i=1,2$ – удельный демографический потенциал i-го населения. Отсюда следует, что потенциал демографического роста равен

$$\Omega(t) = \frac{c(t)}{c^*(t)}, \tag{23}$$

где $c^*(t)$ – удельный демографический потенциал стабильного эквивалентного населения. Заметим, что в рамках классической популяционной модели соотношение (23) – применительно к случаю стационарной асимптотики, т.е. нулевого коэффициента Лотки – эквивалентно соотношению, независимо полученному Буржуа-Пиша и Кейфитцем [23, 24, 32]:

$$\Omega(t) = \frac{e_0}{\mu} \int_0^\infty n(x;t)\nu(x)dx, \tag{24}$$

где e_0 – ожидаемая продолжительность жизни при рождении, а μ – средний возраст рождения ребенка в стационарном населении (соотношение (24) приведено в форме, предложенной Кейфитцем). Если использовать упрощающее предположение о том, что суммарный демографический потенциал может быть аппроксимирован численностью населения в возрасте от 0 до μ лет,

то (23) сводится к упрощенной формуле для оценивания потенциала роста, предложенной Кимом, Шоеном и Сармой [44, 46]:

$$\Omega \approx \frac{C_0(0:\mu)}{C_L(0:\mu)}, \tag{25}$$

где $C_0(0:\mu)$, $C_L(0:\mu)$ – доля населения в возрасте моложе среднего возраста рождения ребенка в исследуемом и эквивалентном ему стационарном населении соответственно.

В то время как соотношения (24) –-(25) относятся к потенциалу роста в форме Буржуа-Пиша – Кейфитца (т.е. в случае стационарной асимптотики), (23) может быть использовано для произвольного асимптотически стабильного населения и для обобщения понятия потенциала роста на произвольную популяционную модель:

$$\Omega_{1,2}(t) = \frac{c^1(t)}{c^2(t)}, \tag{26}$$

где индексы 1, 2 относятся к исследуемому населению и населению, принятому в качестве «стандарта». Для моделей с экспоненциальной асимптотикой в качестве стандарта выступает стабильное население. В общем случае такого естественного стандарта не существует, и его выбор связан с задачами, решаемыми исследователем.

Цепочка равенств (22) и соотношения (23), (26) применимы не только к численности населения, но и к любому линейному показателю: численность населения трудоспособного, пенсионного или иного возраста; объем потребления населением некоторого товара при заданных повозрастных показателях потребления; число рождений, смертей, вступлений в брак при заданных повозрастных показателях соответствующих процессов; и т.д. При этом в соотношении (23) в качестве удельного демографического потенциала будет выступать отношение суммарного демографического потенциала населения к величине исследуемого линейного показателя.

Большое количество работ было посвящено получению точных и приближенных соотношений для оценивания потенциала роста [23, 24, 32, 35–45, 47]. Использование техники демографического потенциала оказывается весьма плодотворным в этом направлении и позволяет получить ряд новых результатов. Как показал анализ реальных данных и результатов вычислительных экспериментов, величину удельного демографического потенциала стабильного населения, входящую в выражение для потенциала роста (23), можно эффективно оценить на агрегированном уровне, без расчета соответствующей возрастной структуры [62, 63]:

$$c^*(t) = d_r \cdot r(t) + d_e \cdot e_0(t) + d_0, , \tag{27}$$

где $r(t)=\lambda(t)-1$ – коэффициент Лотки (в % годовых); $e_0(t)$ – ожидаемая продолжительность жизни при рождении; d_r, d_e, d_0 – параметры модели. Таблица 2 содержит результаты оценивания параметров модели (27) по базе данных по смертности университета Беркли [60] (суммарный демографический потенциал двуполого населения принят пропорциональным корню квадратному из произведения потенциалов отдельных полов). На практике, когда рассматривается относительно узкий диапазон изменений коэффициента Лотки и ожидаемой продолжительности жизни при рождении, линейная модель (27) оказывается вполне приемлемой. Апробация этой модели, проведенная с привлечением модели смертности Брасса [61], показала, что она эффективна в диапазоне изменения коэффициента Лотки от –2% до 2% и ожидаемой продолжительности жизни при рождении – от 30 до 80 лет (за исключением комбинаций низкого коэффициента Лотки и высокой ожидаемой продолжительности жизни при рождении). При рассмотрении широкого диапазона изменения показателей воспроизводства зависимость (27) может быть успешно замена нелинейной зависимостью. Подробное изложение этого выходит за рамки настоящей работы, для большинства практических приложений модель (27) оказывается приемлемой.

Таблица 2.

Результаты оценивания параметров модели (27) удельного демографического потенциала стабильного населения.

Население	Оценки МНК коэффициентов модели			Стандартные ошибки оценок			Коэффициент детерминации
	d_r	d_e	d_0	d_r	d_e	d_0	R^2
Франция, женщины, 1899-1996	8,64	-0,00320	0,593	0,05	0,00004	0,002	0,9965
Япония, женщины, 1950-1997	8,70	-0,00336	0,606	0,07	0,00007	0,005	0,9996
Швеция, женщины, 1861-1996	8,46	-0,00291	0,573	0,06	0,00004	0,003	0,9980
США, женщины, 1968-1999	9,03	-0,00347	0,614	0,02	0,00003	0,002	1,0000
Франция, мужчины, 1899-1996	6,53	-0,00396	0,699	0,26	0,00021	0,012	0,8784
Япония, мужчины, 1950-1997	8,92	-0,00377	0,682	0,17	0,00022	0,015	0,9983
Швеция, мужчины, 1861-1996	8,56	-0,00296	0,624	0,07	0,00005	0,004	0,9979
США, мужчины, 1968-1999	8,88	-0,00468	0,749	0,02	0,00003	0,002	1,0000
Франция, оба пола, 1899-1996	8,34	-0,00344	0,635	0,09	0,00007	0,004	0,9884
Япония, оба пола, 1950-1997	8,90	-0,00353	0,641	0,10	0,00011	0,008	0,9993
Швеция, оба пола, 1861-1996	8,57	-0,00294	0,597	0,06	0,00005	0,003	0,9982
США, оба пола, 1968-1999	9,09	-0,00397	0,674	0,02	0,00003	0,002	1,0000

Используя (27), можно получить следующую оценку потенциала роста, удобную для практических расчетов:

$$\Omega = \frac{c(t)}{d_r \cdot r(t) + d_e \cdot e_0(t) + d_0}. \tag{28}$$

В приведенных выше работах большое внимание уделялось случаю, когда в начальный момент времени, до демографического перехода, население имеет структуру стабильного населения, соответствующую исходному режиму воспроизводства. В этом случае имеем:

$$\Omega = \frac{d_r \cdot \hat{r} + d_e \cdot \hat{e}_0 + d_0}{d_r \cdot r + d_e \cdot e_0 + d_0}, \tag{29}$$

где крышечкой сверху помечены показатели воспроизводства, имевшие место до демографического перехода.

6. Приложение к оцениванию коэффициента Лотки

Р. Фишером было показано, что суммарный репродуктивный потенциал населения изменяется с темпом, равным коэффициенту Лотки, независимо от текущей возрастной структуры населения. Эквивалентная – в силу (3), (17), (18) – формулировка для населения с постоянными во времени показателями рождаемости и смертности такова:

$$\frac{dc(0,t)}{c(0,t)dt} = -\rho. \tag{30}$$

Строго говоря, соотношение (30) верно только для популяционных моделей с постоянными показателями рождаемости и смертности. Для моделей с переменным режимом воспроизводства может быть получена оценка, обобщающая (30) [8]:

$$\forall T_1, T_2, t \in [T_1, T_2] \Rightarrow \underline{\rho} \le \rho(t) \le \bar{\rho},, \tag{31}$$

где $\rho(t)$ – аналог коэффициента Лотки, $\int_0^\infty l(y,t) f(y,t) e^{-\rho(t)y} dy = 1,,$ а $\underline{\rho}, \bar{\rho}$ – такие числа, что:

$$\forall t_1, t_2 \in [T_1, T_2 + \omega] \Rightarrow c(0,t_1)e^{-\bar{\rho}(t_2-t_1)} \le c(0,t_2) \le c(0,t_1)e^{-\underline{\rho}(t_2-t_1)}, \tag{32}$$

где ω – максимальный детородный возраст.

Из (31), (32) следует, что

$$\inf_{\tau\in[t,t+\omega]}\left(-\frac{dc(0,\tau)}{c(0,\tau)d\tau}\right) \le \rho(t) \le \sup_{\tau\in[t,t+\omega]}\left(-\frac{dc(0,\tau)}{c(0,\tau)d\tau}\right). \tag{33}$$

Отсюда следует, что коэффициент Лотки, рассчитанный для некоторой когорты родившихся, может быть охарактеризован темпом изменения демографического потенциала младенца или суммарного потенциала Фишера на протяжении жизни этой когорты вплоть до старшего детородного возраста. Учитывая это, можно ожидать, что темп изменения суммарного потенциала Фишера в некоторый момент времени аппроксимирует коэффициент Лотки, рассчитанный по показателям рождаемости и смертности условного поколения:

$$\frac{dV(t)}{V(t)dt} \approx \tilde{\rho}(t), \tag{34}$$

где $V(t) = \int_0^\infty n(x;t)v(x;t)dx = \frac{C(t)}{c(0,t)}$ – суммарный потенциал Фишера, $\tilde{\rho}(t)$ – коэффициент Лотки условного поколения:

$$\int_0^\infty l(y,t-y)f(y,t-y)e^{-\tilde{\rho}(t)y}dy = 1. \tag{35}$$

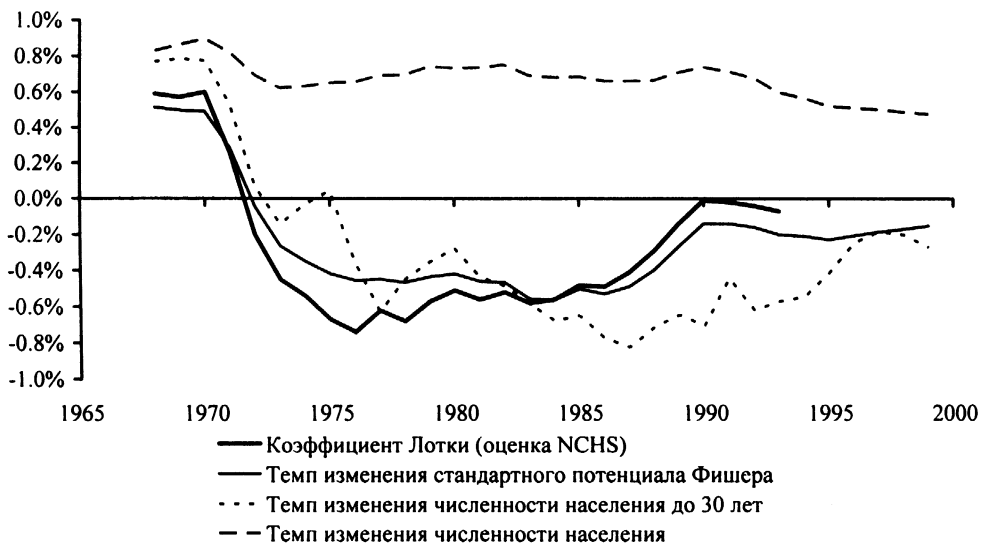

Рис.3. Коэффициент Лотки женского населения США согласно оценке Национального центра статистики здравоохранения [National Center for Health Statistics 1995] и различные аппроксимации этого коэффициента (все показатели очищены от влияния миграции).

При практическом приложении приведенных соотношений возникает необходимость использования в расчетах *стандартных* возрастных коэффициентов демографического потенциала, полученных на основе некоторой стандартной модели, отличной, вообще говоря, от модели

воспроизводства реального населения. Такой подход несколько снижает точность оценивания коэффициента Лотки, но оказывается вполне пригодным для приложений. На рис.3 отображена динамика коэффициента Лотки для женского населения США, согласно оценкам Национального центра статистики здравоохранения США [53]. На том же рисунке приведен результат аппроксимации коэффициента Лотки с помощью темпа изменения потенциала Фишера, возрастные коэффициенты которого рассчитаны по показателям воспроизводства женского населения США в 1991 году [53, 60]. Помимо темпа прироста потенциала Фишера, приведены так же темпы прироста численности всего женского населения США и женского населения в возрасте до 30 лет. Последний показатель приведен в связи с тем, что серия работ была посвящена обоснованию этого показателя как аппроксимации коэффициента Лотки [40–42, 44, 46]. Все указанные величины скорректированы с тем, чтобы устранить влияние миграции, для чего использовались таблицы дожития из базы данных по смертности университета Беркли [60]. Видно, что, несмотря на то, что в расчетах использовались стандартные значения репродуктивных потенциалов Фишера, темп изменения суммарного потенциала Фишера хорошо аппроксимирует коэффициент Лотки. Темп изменения численности всего женского населения является чересчур грубым приближением коэффициента Лотки, а темп изменения женского населения в возрасте до 30 лет аппроксимирует коэффициент Лотки заметно хуже, чем темп изменения стандартного потенциала Фишера.

Для исследования качества аппроксимации коэффициента Лотки с помощью стандартного потенциала Фишера в широком диапазоне показателей воспроизводства и структуры населения, автором была проведена серия вычислительных экспериментов. В каждом эксперименте генерировалась исходная возрастная структура однополого населения, которая затем проектировалась на 200 лет вперед в рамках замкнутой популяционной модели с использованием генерируемых случайным образом возрастных профилей рождаемости и смертности. Процедура расчета исходной возрастной структуры была разработана так, чтобы имитировать как общую тенденцию к понижению числа живущих по мере увеличения возраста, так и влияние возмущений возрастной структуры:

$$n_x(0) = \left(1 + \chi \cdot \omega(x)\right) L_x(0) e^{-\rho(0)(x+0.5)}, \tag{36}$$

где $n_x(0)$ – исходная численность x-й возрастной группы, x=0,1,…,X; χ – равномерно распределенное на отрезке от 0 до 1 случайное число, определяющее вклад искажений в возрастную структуру; $L_x(0)$ – числа живущих исходной таблицы дожития; $\rho(0)$ – исходное значение коэффициента Лотки; и $\omega(x)$ – возрастной профиль искажений:

$$\omega(x) = 0.5\left(1 + \sin\left(2\pi \frac{x + \delta(x)\left(T_{\max} - T_{\min}\right)}{T} + \varphi_0\right)\right), \tag{37}$$

где $T_{\min}$=25, $T_{\max}$=35 – минимальное и максимальное возможные значения периода «демографической волны» искажений возрастной структуры; T – расчетный период, равномерно распределенный между $T_{\min}$ и $T_{\max}$; $\delta(x)$ – случайное число, равномерно распределенное между –0,5 и 0,5; и φ_0 – случайное число, равномерно распределенное от 0 до 2π.

Для генерирования вероятностей дожития на каждом шаге вычислительного эксперимента использовалась модель смертности У. Брасса [61]:

$$\ln\left(\frac{l(x;t)}{1 - l(x;t)}\right) = -2\alpha(t) - \beta(t) \cdot \ln\left(\frac{l_{\text{standard}}(x)}{1 - l_{\text{standard}}(x)}\right), \tag{38}$$

где $l_{\text{standard}}(x)$ – стандартная функция Брасса; α и β – параметры модели, равномерно распределенные от –2 до 0 и от 0,75 до 1 соответственно. Пределы изменения параметров модели (38) были получены на основе анализа эмпирических данных по смертности для мужчин и женщин, содержащихся в базе данных по смертности университета Беркли [60], они охватывают диапазон изменений ожидаемой продолжительности жизни при рождении от 36 до 89 лет. На основе вероятностей дожития $l(x,t)$ рассчитывались числа живущих:

$$L_x(t) = \frac{l(x;t) + l(x+1;t)}{2}. \tag{39}$$

Для генерирования коэффициентов рождаемости на каждом шаге так же использовалась модель рождаемости У.Брасса [61]:

$$\ln\left(\frac{\phi(x;t)}{1-\phi(x;t)}\right) = -2\alpha_f(t) - \beta_f(t)\cdot\ln\left(\frac{\phi_{\text{standard}}(x)}{1-\phi_{\text{standard}}(x)}\right), \tag{40}$$

где $\phi(x;t) = \int_x^{\infty} f(y;t)\,dy \Big/ \int_0^{\infty} f(y;t)\,dy$ – доля населения возраста x и старше в брутто-коэффициенте воспроизводства населения; $\phi_{\text{standart}}(x)$ – стандартная функция Брасса; α_f и β_f – параметры модели, равномерно распределенные от –1 до 0 и от 1 до 1,5 соответственно. Диапазоны изменений показателей модели (40) получены на основе анализа многолетних рядов коэффициентов рождаемости России [66], США [59, 53] и ряда населений, приведенных в [15]. На основе полученных согласно (40) долей в брутто-коэффициенте были оценены коэффициенты рождаемости (без корректировки на младенческую смертность):

$$\frac{F_x}{L_0} = \Phi_x = R\cdot\left(\phi(x;t) - \phi(x+1;t)\right), \tag{41}$$

где R – брутто-коэффициент воспроизводства, равномерно распределенный от 0,49 до 2,92 (что соответствует диапазону изменений суммарного коэффициента рождаемости от 1 до 6).

Для расчета репродуктивного потенциала использовались стандартные коэффициенты для населения США, приведенные в табл.1.

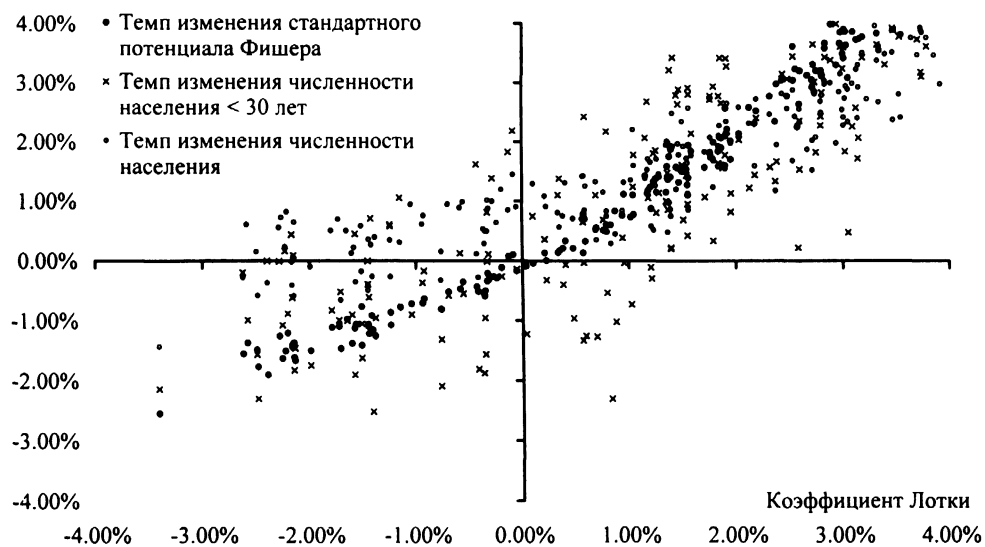

Рис.4. Результаты серии из 201 имитационных вычислительных экспериментов по исследованию качества аппроксимации коэффициента Лотки с помощью различных показателей.

На рис.4 отображены результаты типичной серии экспериментов. Видно, что темп изменения потенциала Фишера удовлетворительно аппроксимирует значение коэффициента Лотки в широком диапазоне изменений структуры и показателей воспроизводства населения. Динамика

численности всего населения и населения моложе 30 лет оказываются неадекватными режиму воспроизводства произвольного населения.

Сходные результаты были получены так же при использовании возрастных структур реальных населений (более 300 возрастных структур из базы данных по смертности университета Беркли [60]) и показателей воспроизводства, полученных согласно (38)-(41), см. рис.5.

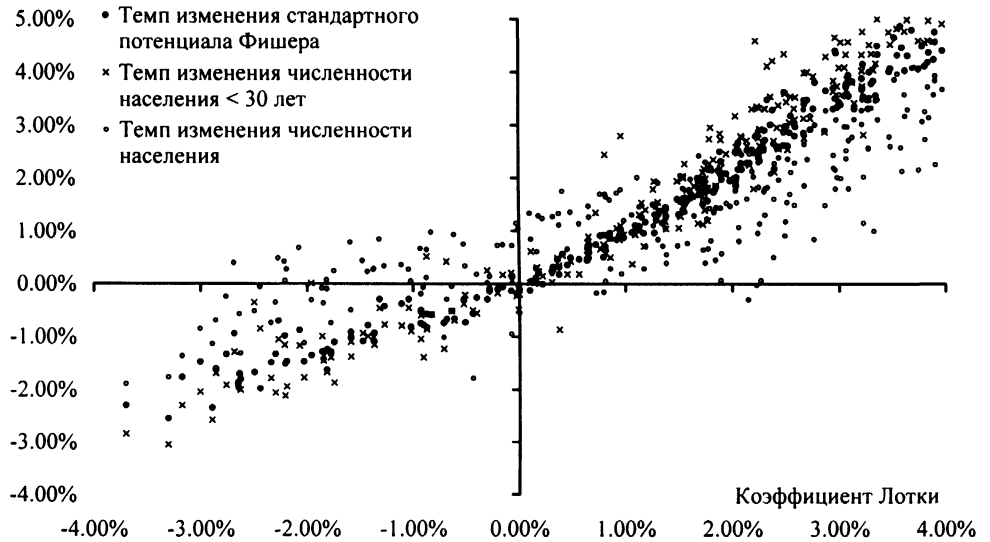

Рис.5. Результаты серии имитационных вычислительных экспериментов по исследованию качества аппроксимации коэффициента Лотки с помощью различных показателей (использованы возрастные структуры реальных населений).

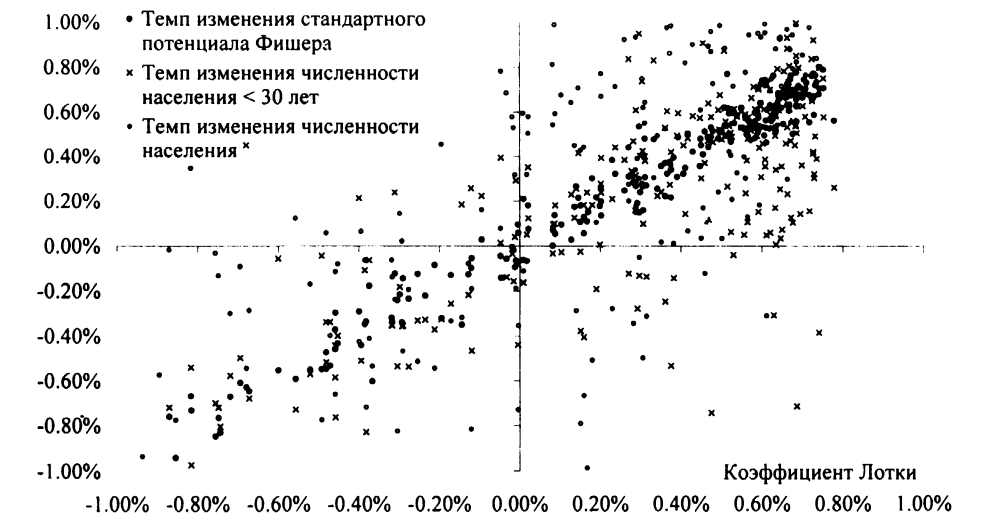

Рис.6. Результаты серии имитационных вычислительных экспериментов по исследованию качества аппроксимации коэффициента Лотки с помощью различных показателей (использованы возрастные структуры реальных населений, узкий диапазон изменений показателей рождаемости, а так же возрастные коэффициенты репродуктивных потенциалов, соответствующие средним по выборке показателям рождаемости и смертности).

Анализ результатов вычислительных экспериментов показал, что ошибки аппроксимации коэффициента Лотки темпом изменения стандартизованного потенциала Фишера можно заметно уменьшить, используя регрессионную зависимость:

$$\hat{\lambda} - \lambda = k\left(\lambda^* - \lambda\right)\left(c - c^*\right), \tag{42}$$

где λ, $\hat{\lambda}$, λ^* – коэффициент Лотки, его аппроксимация и коэффициент Лотки режима воспроизводства, на основе которого рассчитаны стандартные репродуктивные потенциалы; c, c^* – удельный репродуктивный потенциал реального и эквивалентного стабильного населений соответственно; k – параметр, величина которого, в зависимости от диапазона возможных показателей воспроизводства и возрастных структур меняется от 0 до 3. Эффективным оказывается использование стандартной структуры репродуктивных потенциалов, рассчитанной на основе показателей воспроизводства, как можно точнее отвечающих исследуемому населению. Последнее обстоятельство проиллюстрировано на рис.6, где отражены результаты серии вычислительных экспериментов, проведенных с относительно узким диапазоном изменений брутто-коэффициента воспроизводства и возрастных коэффициентов репродуктивного потенциала, соответствующих средним по выборке показателям рождаемости и смертности.

7. Агрегированные модели динамики численности населения и иных демографических индексов. Моделирование демографического перехода

Под демографическим переходом [30] понимается исторический переход от режима воспроизводства с высокими показателями рождаемости и смертности к режиму с низкими значениями этих показателей. Учитывая широкую, практически универсальную распространенность этого явления, актуален вопрос моделирования процесса и последствий демографического перехода. Что касается отдаленных последствий изменения режима воспроизводства населения, асимптотические оценки получаются при расчете потенциала роста Венсана, и соответствующие приложения демографических потенциалов были изложены выше.

Техника демографических потенциалов оказывается эффективной не только в оценивании отдаленных последствий изменений режима воспроизводства населения, но и в моделировании краткосрочной и среднесрочной динамики показателей, характеризующих процесс демографического перехода. Как было отмечено выше, коэффициент Лотки можно эффективно аппроксимировать темпом изменения стандартного репродуктивного потенциала населения. Причем, в случае, когда стандартные возрастные коэффициенты репродуктивного потенциала в точности соответствуют режиму воспроизводства населения, ошибка аппроксимации нулевая. Отсюда имеем, что динамику стандартного репродуктивного потенциала населения можно моделировать с помощью следующей экспоненциальной модели, адекватной как в долгосрочном, так и в среднесрочном и краткосрочном периодах:

$$V(t) = V(0)(1+r)^t, \tag{43}$$

где r – коэффициент Лотки (в % годовых), соответствующий исследуемому режиму воспроизводства.

Примечательно, что динамика удельного демографического потенциала так же может быть успешно промоделирована. На рис.7 приведена динамика удельного демографического потенциала России в 20 веке и – на основе прогноза бюро цензов США – до 2050 года [64]. Обращает на себя внимание то, что – несмотря на серьезнейшие социальные потрясения, включая участие в кровопролитной второй мировой войне – динамика удельного демографического потенциала оказалась весьма консервативной и в первую очередь отразила последствия демографического перехода, в ходе которого население России постепенно старело, а его удельный потенциал сокращался. Разумеется, столь выраженная консервативность динамики удельного потенциала упрощает ее моделирование и прогнозирование.

Вполне эффективной оказывается даже простейшая линейная модель приближения к равновесию [62, 63]:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \alpha \cdot \left(c(t) - c^*(t)\right) \tag{44}$$

или, в дискретном виде:

$$c_{t+1} - c_t = a \cdot \left(c_t - c_t^* \right), \tag{45}$$

здесь α, a – параметры модели.

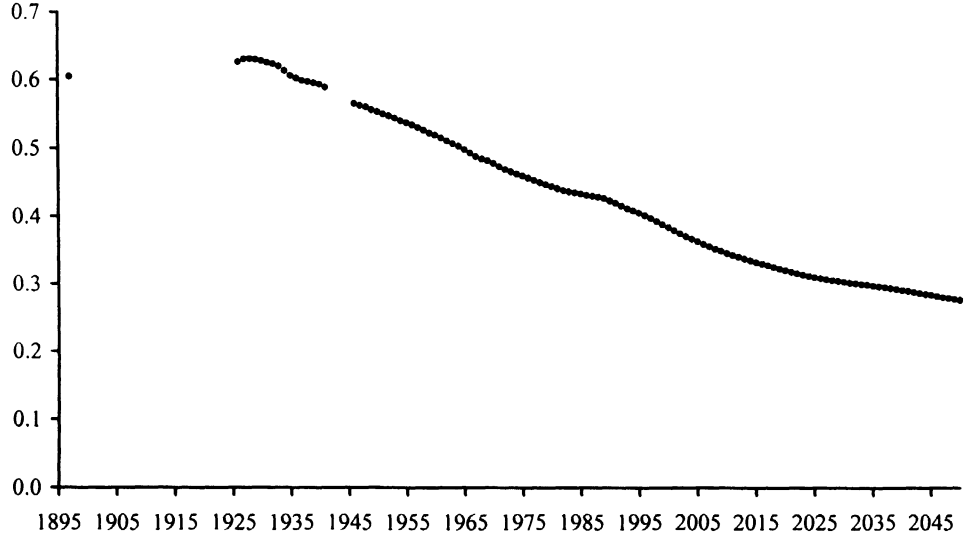

Рис.7. Динамика удельного демографического потенциала населения России в 1897-2050 гг. согласно оценкам и прогнозу Бюро Цензов США.

Таблица 3.

Результаты оценивания параметров моделей (45), (47) динамики удельного демографического потенциала.

Население	Оценки МНК коэффициентов модели (45)		Коэф. детерминации R^2	Оценки МНК коэффициентов модели (47)		Стандартные ошибки оценок		Коэф. детерминации R^2
	a	Станд. ошибки		a	b	a	b	
Франция, женщины, 1899-1996	-0,03351	0,00106	0,86812	-0,01736	0,52344	0,00137	0,03954	0,95396
Япония, женщины, 1950-1997	-0,04281	0,00105	0,38219	-0,02171	0,51006	0,00226	0,05253	0,64449
Швеция, женщины, 1861-1996	-0,03546	0,00114	0,80709	-0,01731	0,56047	0,00127	0,03363	0,93786
США, женщины, 1968-1999	-0,03911	0,00129	0,62908	-0,01161	0,71725	0,00083	0,02093	0,99052
Франция, мужчины, 1899-1996	-0,03395	0,00101	0,88240	-0,01939	0,52530	0,00209	0,05289	0,92290
Япония, мужчины, 1950-1997	-0,04371	0,00130	0,33307	-0,01495	0,67793	0,00195	0,04427	0,82810
Швеция, мужчины, 1861-1996	-0,03578	0,00132	0,77083	-0,01485	0,63850	0,00125	0,03227	0,94222
США, мужчины, 1968-1999	-0,03546	0,00229	0,47886	-0,00868	0,79023	0,00063	0,01677	0,99237
Франция, оба пола, 1899-1996	-0,03395	0,00102	0,88240	-0,01877	0,48868	0,00138	0,03938	0,95542
Япония, оба пола, 1950-1997	-0,04353	0,00111	0,17612	-0,01666	0,63397	0,00206	0,04720	0,74105
Швеция, оба пола, 1861-1996	-0,03577	0,00121	0,79523	-0,01624	0,59620	0,00126	0,03290	0,94130
США, оба пола, 1968-1999	-0,03780	0,00166	0,52217	-0,01025	0,75163	0,00068	0,01754	0,99157

Гораздо более точной оказывается модель с запаздыванием, в которой учитывается инерционность демографических процессов [62, 63]:

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} = \beta \cdot \left(\frac{dc(t)}{dt} - \alpha \cdot \left(c(t) - c^*(t) \right) \right), \tag{46}$$

$$c_{t+1} - c_t = a \cdot \left(c_t - c_t^* \right) + b \cdot \left(c_t - c_{t-1} \right). \tag{47}$$

Результаты оценивания параметров моделей (45), (47) по базе данных университета Беркли [60] приведены в табл.3 (использована структура потенциалов, отраженная в табл.1).

Поскольку численность населения или иной линейный показатель можно получить как отношение суммарного потенциала населения к удельному потенциалу, соотношения (27), (43)–(45) составляют законченную агрегированную модель динамики численности населения или иного линейного показателя (непрерывная модель):

$$\begin{cases} V(t) = V(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \ln\left(1 + r(\tau)\right) d\tau \right), \\ \dfrac{dc(t)}{dt} = \alpha \cdot \left(c(t) - c^*(t) \right), \\ c^*(t) = d_r \cdot r(t) + d_e \cdot e_0(t) + d_0, \\ N(t) = \dfrac{V(t)}{c(t)}. \end{cases} \tag{48}$$

Соответствующая дискретная модель, необходимая для практических расчетов, имеет вид:

$$\begin{cases} V_t = V_{t_0} \prod\limits_{\tau=t_0}^{t-1} (1 + r_\tau), \\ c_{t+1} - c_t = a \cdot \left(c_t - c_t^* \right), \\ c_t^* = d_r \cdot r_t + d_e \cdot e_{0,t} + d_0, \\ N_t = \dfrac{V_t}{c_t}. \end{cases} \tag{49}$$

Использование более точных моделей динамики удельного потенциала (46), (47) приводит к моделям:

$$\begin{cases} V(t) = V(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \ln\left(1 + r(\tau)\right) d\tau \right), \\ \dfrac{d^2c(t)}{dt^2} = \beta \cdot \left(\dfrac{dc(t)}{dt} - \alpha \cdot \left(c(t) - c^*(t) \right) \right), \\ c^*(t) = d_r \cdot r(t) + d_e \cdot e_0(t) + d_0, \\ N(t) = \dfrac{V(t)}{c(t)}, \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} V_t = V_{t_0} \prod\limits_{\tau=t_0}^{t-1} (1 + r_\tau), \\ c_{t+1} - c_t = a \cdot \left(c_t - c_t^* \right) + b \cdot \left(c_t - c_{t-1} \right), \\ c_t^* = d_r \cdot r_t + d_e \cdot e_{0,t} + d_0, \\ N_t = \dfrac{V_t}{c_t}. \end{cases} \tag{51}$$

Модели (49), (51) были протестированы автором на данных по населению ряда стран и показали высокую эффективность [62, 63], см. табл.4. На рис.8 показаны динамика численности населения Швеции (данные базы данных университета Беркли) и оценки, полученные по моделям (49) и (51) с 10-летним горизонтом прогнозирования. Для сравнения там же приведены результаты линейной 10-летней экстраполяции исходного ряда данных.

Работоспособность агрегированных моделей, предлагаемых выше, иллюстрируется так же и на рис.9, где отражены динамика численности населения Швеции за 135 лет и прогнозы, полученные по моделям (49), (51) с накоплением ошибок на протяжении всего периода прогнозирования.

На рис.10 иллюстрируется эффективность работы моделей (49), (51) на примере прогнозирования численности населения Швеции в возрасте до 15 лет (ошибки аккумулируются на протяжении всего периода прогнозирования).

Рис.8. Динамика численности населения Швеции – эмпирические данные и прогнозы с 10-летним горизонтом прогнозирования.

Рис.9. Динамика численности населения Швеции – эмпирические данные и прогнозы с аккумуляцией ошибок на протяжении всего 135-летнего периода.

Таблица 4.

Средние абсолютные ошибки прогнозов численности населения в зависимости от горизонта прогнозирования и использованного населения.

Горизонт прогнозирования, лет	Население			
	ФРАНЦИЯ 1899-1996 гг.	**ЯПОНИЯ** 1950-1997 гг.	**ШВЕЦИЯ** 1861-1996 гг.	**США** 1968-1999 гг.
Модель (49):				
1	0,5%	0,5%	0,6%	2,3%
2	0,9%	0,9%	1,2%	2,5%
3	1,3%	1,4%	1,8%	2,7%
4	1,6%	1,8%	2,3%	2,9%
5	1,8%	2,2%	2,7%	3,1%
6	2,0%	2,5%	3,0%	3,3%
7	2,1%	2,9%	3,3%	3,5%
8	2,2%	3,2%	3,6%	3,7%
9	2,3%	3,5%	3,9%	4,0%
10	2,4%	3,8%	4,1%	4,2%
Непрерывно	3,4%	8,5%	5,8%	4,9%
Модель (51):				
1	0,4%	0,3%	0,5%	0,7%
2	0,7%	0,6%	1,0%	0,8%
3	1,1%	0,9%	1,5%	0,8%
4	1,3%	1,1%	2,0%	0,9%
5	1,6%	1,3%	2,4%	1,0%
6	1,8%	1,5%	2,7%	1,0%
7	1,9%	1,7%	3,1%	1,1%
8	2,1%	1,8%	3,3%	1,1%
9	2,2%	1,9%	3,5%	1,2%
10	2,3%	2,0%	3,7%	1,2%
Непрерывно	2,8%	5,7%	4,8%	1,9%
Линейная экстраполяция численности населения				
1	1,4%	0,6%	0,7%	0,2%
2	3,0%	0,9%	1,4%	0,6%
3	4,2%	1,4%	2,4%	0,6%
4	6,6%	2,1%	2,7%	0,8%
5	8,0%	2,8%	3,1%	1,0%
6	9,2%	3,5%	3,9%	1,2%
7	10,0%	4,1%	4,7%	1,3%
8	10,6%	4,8%	5,3%	1,4%
9	11,2%	5,6%	6,0%	1,6%
10	12,2%	6,6%	6,3%	1,7%
Непрерывно	-	-	-	-

Агрегированные модели динамики замкнутого населения, представленные выше, в качестве входных параметров используют величины коэффициента Лотки и ожидаемой продолжительности жизни при рождении. На практике бывает удобно использовать для агрегированного анализа другой набор показателей – ожидаемую продолжительность жизни при рождении и суммарный коэффициент рождаемости. Можно разработать модели, увязывающие между собой все перечисленные параметры, и тем самым использовать вместо коэффициента Лотки суммарный коэффициент рождаемости. На основе этих моделей, изложение которых выходит за рамки

настоящей работы, удалось разработать комплексную систему агрегированного прогнозирования численности населения. Апробация всего комплекса агрегированных моделей популяционной динамики была проведена на основе прогноза численности мирового населения в 21 веке, представленного отделом народонаселения ООН [65], см. рис.11. Отметим, что прогноз отдела народонаселения ООН проводился с использованием модели передвижки, учитывающей возрастные, половые и региональные различия в показателях рождаемости и смертности. Кроме того, учитывалась миграция между регионами мира, отдельные поправки делались на роль распространения ВИЧ и т.п. В то же время, в представленной выше агрегированной модели использовались только итоговые значения ожидаемой продолжительности жизни при рождении и суммарного коэффициента рождаемости населения мира, взятые из результатов расчета отдела народонаселения ООН.

Рис.10. Динамика численности населения Швеции в возрасте до 15 лет – эмпирические данные и прогнозы с аккумуляцией ошибок на протяжении всего 135-летнего периода.

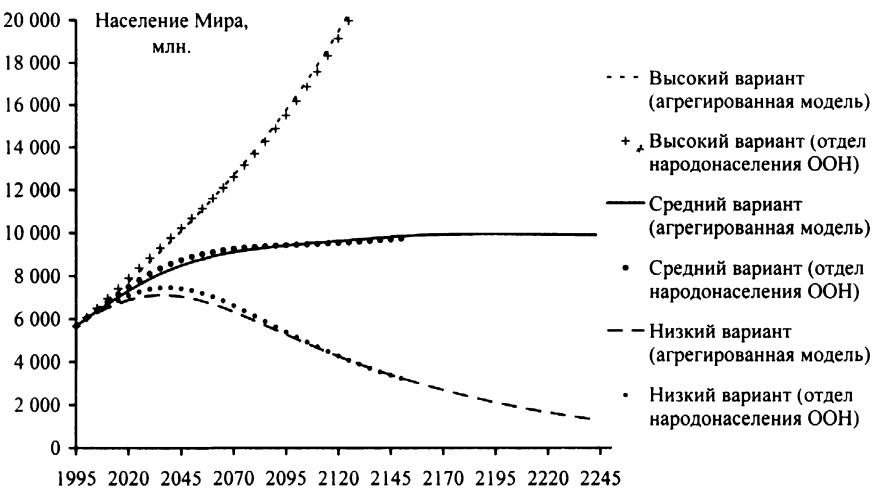

Рис.11. Прогноз численности населения Мира в рамках сценариев отдела народонаселения ООН – согласно агрегированной модели и детализированной модели отдела народонаселения ООН.

Агрегированные популяционные модели (49), (51) могут быть весьма полезны в экономико-демографическом моделировании и прогнозировании и исследованиях по исторической демографии. Кроме того, эти модели являются хорошим дополнением к инструментарию математической демографии. В частности, на их основе можно получить ряд новых результатов по теории демографического перехода, что иллюстрируется следующим примером. Оценка асимптотических последствий перехода дается соотношением (29). Опираясь на (50) можно разработать модель динамики численности или иного линейного показателя населения на протяжении всего процесса демографического перехода:

$$N(t)=\frac{N(0)\cdot\Omega\cdot e^{r\cdot t}}{1+\left(\frac{dc(0)}{c^{*}dt}+k_1(\Omega-1)\right)\cdot\frac{e^{-k_2\cdot t}}{k_1-k_2}-\left(\frac{dc(0)}{c^{*}dt}+k_2(\Omega-1)\right)\cdot\frac{e^{-k_1\cdot t}}{k_1-k_2}}, \tag{52}$$

где k_1, k_2 – соответствуют общим однородным решениям уравнения (46):

$$k_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta(\beta-4\alpha)}}{2}, \tag{53}$$

$$k_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta(\beta-4\alpha)}}{2}. \tag{54}$$

Явное выражение для динамики численности населения в процессе демографического перехода (52) получено впервые. Как было отмечено выше, в литературе было уделено значительное внимание моделированию последствий демографического перехода в ситуации, когда начальное население имеет стабильную возрастную структуру, соответствующую исходному режиму воспроизводства. В этом случае выражение (52) можно упростить:

$$N(t)=\frac{N(0)\cdot\Omega\cdot e^{r\cdot t}}{1+\frac{\Omega-1}{k_1-k_2}\left(k_1e^{-k_2\cdot t}-k_2e^{-k_1\cdot t}\right)}, \tag{55}$$

8. Приложение к исследованию демографической истории и перспектив населения России

В этом параграфе мы остановимся подробнее на приложении концепции демографического потенциала и агрегированной модели популяционной динамики (51) к исследованию динамики населения России в 20 веке и перспектив на 21 век [64]. На рис.12, 13 представлены динамика численности и репродуктивного потенциала населения России в 20 и 21 вв. согласно официальным оценкам Госкомстата России, реконструкции российских демографов и прогнозам Бюро Цензов США [59, 66, 67]. Там же приведены результаты расчетов по сценарию «без потрясений», разработанному для анализа возможной траектории демографического развития России в отсутствие демографических кризисов, вызванных войнами, голодом, падением уровня жизни населения [64]. В этом сценарии коэффициент Лотки, будучи близким к коэффициенту Лотки населения России в относительно благополучные годы, достигает нулевого уровня к середине 60-х годов 20 века и далее остаётся на этом уровне.

Анализ результатов, представленных на рис.12, 13, показывает, что социальные потрясения 20 века оказали чрезвычайно негативное воздействие на демографические процессы. Так, к 1923 году население России оказалось меньше, чем по сценарию «без потрясений» на 17 млн. человек, а к 1941 году – уже на 26 млн. человек. К 1946 году разница превысила 50 млн. человек. В целом, к концу 20 века Россия недобрала около 113 млн., т.е. 58% возможного прироста численности населения по сравнению со сценарием «без потрясений».

Сравнение послевоенной динамики численности и потенциала населения России указывает на то, что прирост населения в этот период происходил не за счет высокой рождаемости, реализующейся в высоком коэффициенте Лотки, а за счет изменения структуры населения. Иными словами, послевоенный рост происходил за счет потенциала прироста, заложенного в относительно молодой возрастной структуре населения 40-х. Это обстоятельство хорошо иллю-

стрируется динамикой удельного демографического потенциала, приведенной на рис.7. Практически на протяжении всего исследуемого периода возрастная структура населения России неуклонно старела, что вело к сокращению удельного демографического потенциала.

Рис.12. Динамика численности населения России в 1897-2050 гг.

Рис.13. Динамика репродуктивного потенциала населения России в 1897-2050 гг.

Следует заметить, что население России так и не сумело оправиться от потерь, понесенных в Великой Отечественной войне, – демографический потенциал так и не вышел на довоенный уровень. Это произошло по ряду причин: послевоенный компенсаторный подъем рождаемости оказался недостаточен; урбанизация населения, интенсивно протекавшая в 50-60-е годы, негативно сказалась на показателях рождаемости; наконец, миграционный отток в другие республики СССР также помешал росту демографического потенциала.

Меры по стимулированию рождаемости, предпринятые в 80-х годах, и миграционный прирост в эти же годы приостановили сокращение демографического потенциала России. Однако, последовавший в 90-х социальный кризис привел к падению показателей рождаемости и сокращению демографического потенциала. Это сокращение было бы более значительным, если бы не компенсирующая роль миграции в Россию, возросшей в 90-е годы.

Согласно перспективным расчетам демографического потенциала России, на основе прогноза Бюро Цензов США, он сократится почти вдвое к середине 21 века, если показатели рождаемости останутся на низком уровне. Это сделает практически неизбежным сопоставимое сокращение численности населения к концу 21 века, поскольку сокращение демографического потенциала будет сопровождаться старением населения (см. рис.14). Согласно расчетам автора,

до конца 21 века население России может сократиться на 40-60% по сравнению с уровнем конца 80-х годов. При этом оно составит лишь около 20-30% по сравнению с результатами расчетов по сценарию «без потрясений». Причем, даже необычайно высокая иммиграция в первой половине 21 века не способна переломить тенденцию к сокращению численности населения (см. далее).

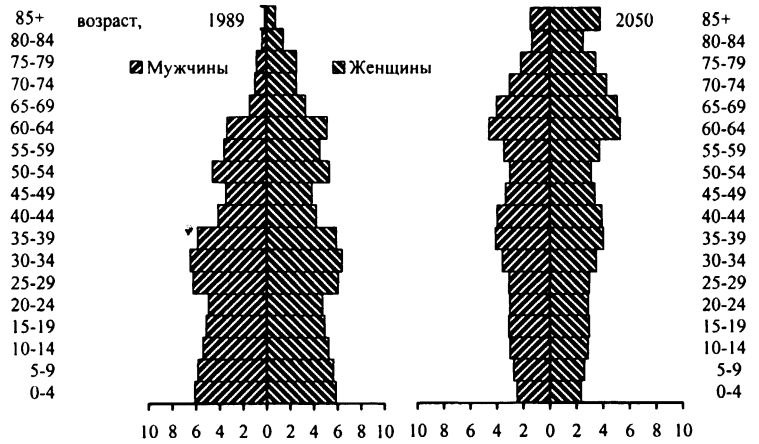

Рис.14. Возрастно-половая структура населения России в 1989 и 2050 гг. согласно оценке и прогнозу бюро Цензов США.

Возможные перспективы демографического развития России отражены на рис.15, где приведены результаты перспективных расчетов до конца 21 века, дополняющие прогноз Бюро Цензов США в рамках нескольких сценариев. Из всех проанализированных сценариев только в рамках сценария быстрого компенсаторного подъема рождаемости (до уровня 2,44 суммарного коэффициента рождаемости к 2010-2020 гг. с последующим переходом на уровень простого воспроизводства к 2050 году) можно предотвратить значительную депопуляцию населения России. Ни сценарий высокой иммиграции (0,5% в 2010-2050 гг.), ни сценарий позднего компенсаторного подъема рождаемости (до уровня 2,44 суммарного коэффициента рождаемости к 2050-2060 гг. с последующим переходом на уровень простого воспроизводства) не способны предотвратить депопуляцию в долгосрочной перспективе.

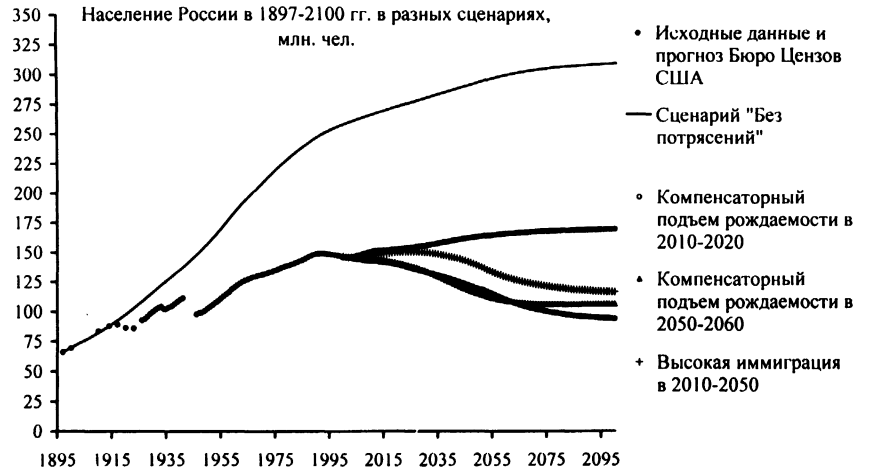

Рис.15. Динамика численности населения России в 1897-2100 гг. в рамках различных сценариев демографического развития.

Заметим, что приведенные оценки демографической динамики России в конце 20-начале 21 вв. являются в некотором смысле оптимистичными, поскольку в расчет не бралась существенная неоднородность населения России. Между тем, учет различий воспроизводства в городе и на селе и динамики распределения населения по типу места жительства приводят к более низким оценкам демографического потенциал России к концу 20 века [8].

9. Ретроспективные расчеты численности населения. Моделирование популяционной динамики с учетом миграции. Приложение к исследованию иммиграции в США

Одной из актуальных проблем теоретической и прикладной демографии является проблема ретроспективных расчетов численности и иных показателей населения. Формально матричное уравнение Лесли (4) не может быть обращено, поскольку матрица Лесли является вырожденной. Тем не менее, в литературе было предложено несколько подходов к ретроспективным расчетам на основе модели Лесли. Возможно, наиболее простым является т.н. метод обратного дожития, в котором рассматриваются только возраста вплоть до старшего фертильного. При этом в соответствующей усеченной матрице Лесли последние элементы первой строки оказываются положительными, и матрица может быть обращена. Однако результаты ретроспективных оценок оказываются совершенно непригодными, уже через 1-2 пятилетних периодов получаются большие отрицательные числа для численности отдельных возрастных групп [21]. Гревил и Кейфитц [68, 69] разработали подход к ретроспективным расчетам с использованием обобщенной обратной матрицы к матрице Лесли с наложением определенных ограничений на спектральные свойства обратной матрицы. В своем методе «обратного прогноза» они использовали матрицу, у которой три собственных числа получаются обращением трех наибольших по модулю собственных чисел матрицы Лесли. Такой метод оказывается лучше метода обратного дожития, однако, результаты ретроспективных расчетов на длительные промежутки времени оказываются неустойчивыми и совершенно непригодными (численность отдельных возрастных групп становится нереально большой, а других - отрицательной). Причина такой неустойчивости объективна – при любой реализации «обратной передвижки возрастов» собственные числа соответствующей матрицы обратно пропорциональны собственным числам матрицы Лесли, а потому коэффициенту Лотки соответствует *минимальное* по модулю собственное число, а максимальным по модулю (и потому определяющим асимптотические свойства процедуры) оказывается какое-то из комплексных собственных чисел.

Другой подход к решению проблемы ретроспективных оценок восходит к работам Р. Ли по «инверсному прогнозу» [70, 71]. Идея этого метода в том, чтобы отказаться от проведения ретроспективных расчетов на основе одной только текущей информации о структуре и параметрах воспроизводства населения. Вместо этого Ли предложил оценивать историческую динамику демографических показателей на основе предположительной структуры населения в некоторый момент времени в прошлом и на основе данных о числах рождений и смертей с указанного момента времени и по текущее время. При этом использовались предположения о возможности параметризовать одним параметром семейства используемых кривых дожития и смертности. Позднее этот подход, с некоторыми вариациями, был развит Ригли, Шофилдом и Оппеном [72] для проведения исследования по исторической демографии Англии. Оппен [73] показал, что модели, основанные на идеях Ли, являются частными реализациями класса моделей демографического проектирования, в которых динамика демографических показателей проецируется на основе системы ограничений, связанных с исходными данными, и минимизации функционала, отражающего как адекватность модели имеющимся данным, так и некоторые искомые свойства решения (прежде всего, гладкость в некотором смысле).

Рассмотрим проблему ретроспективных расчетов применительно к агрегированным моделям, основанным на методе демографического потенциала. На первый взгляд, у агрегированной модели имеется то преимущество, что ввиду отсутствия матричных операций нет проблемы с обращением матрицы передвижки. Однако это не снимает проблемы неустойчивости ретроспективных оценок, поскольку модели динамики удельного потенциала (44)-(47) теряют устойчивость при обращении во времени. Тем не менее, эту проблему можно решить следующим образом. Положим, что нам известен режим воспроизводства населения на протяжении некоторого периода времени, а так же имеется оценка удельного демографического потенциала на начало этого периода. Тогда, используя одну из моделей (44)-(47), можно оценить динамику удель-

ного потенциала на протяжении исследуемого периода. Наконец, модель динамики общего репродуктивного потенциала (43) легко может быть обращена во времени и, имея оценки потенциала и удельного потенциала населения, можно получить оценки и для численности населения

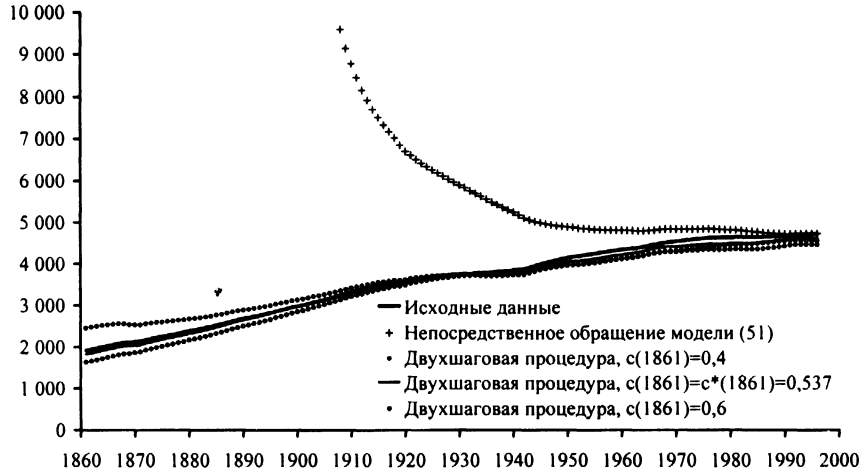

Рис.16. Динамика численности населения Швеции в 1861-1996 гг. и ее ретроспективные оценки (исходные данные скорректированы с целью устранения влияния миграции).

Рис.17. Динамика чистой иммиграции в США – согласно официальным оценкам Службы Иммиграции и Натурализации США и реконструкции с привлечением модели (56).

в исследуемый период. Принципиальным является то, что динамика удельного потенциала оценивается в прямом направлении, а общего потенциала – в обратном. Узким местом этой схемы является необходимость оценивания удельного демографического потенциала на начало исследуемого периода *до* проведения ретроспективных расчетов. Однако, ввиду устойчивости моделей (44)-(47), влияние возможных ошибок такой оценки на результат расчетов убывает по мере отдаления от начального момента анализируемого периода. Заметим, что здесь мы по сути опираемся на то же свойство эргодичности популяционной модели, которое служит обоснованием предложенной Ли модели [74, 75]. Работоспособность предлагаемой нами схемы иллюстрируется на рис.16, где изображена динамика численности населения Швеции и результаты ее рет-

роспективной оценки с использованием процедуры непосредственного обращения модели (51) и предлагаемой двухшаговой процедуры, когда сначала оценивается динамика удельного потенциала (в прямом направлении) а затем численность (в обратном направлении). Для устранения влияния миграции исходные половозрастные пирамиды были пересчитаны с использованием таблиц дожития базы данных по смертности университета Беркли. В двухшаговой процедуре исходное значение удельного демографического потенциала было положено равным удельному потенциалу стабильного эквивалентного населения. Кроме того, для анализа устойчивости результатов оценивания были рассмотрены модели с двумя альтернативными начальными значениями удельного демографического потенциала (0,4 и 0,6). Как видно на рисунке, предложенная двухшаговая процедура вполне эффективна и устойчива к ошибкам в оценивании начального значения удельного потенциала.

До сих пор мы абстрагировались от миграционных процессов, рассматривая модели для замкнутого в смысле миграции населения. Однако на практике, особенно в ретроспективных расчетах, миграция играет существенную роль в воспроизводстве населения и не может быть игнорирована. Рассмотрим следующую модель динамики численности населения с учетом миграции [76]:

$$
\begin{cases}
C_{t+1}^{\text{close}} = C_t\left(1+r_t\right), \\
c_t^{*} = d_r \cdot r_t + d_e \cdot e_{0,t} + d_0, \\
c_{t+1}^{\text{close}} = c_t + a\cdot\left(c_t - c_t^{*}\right) + b\cdot\left(c_t - c_{t-1}\right), \\
N_{t+1}^{\text{close}} = \dfrac{C_{t+1}^{\text{close}}}{c_{t+1}^{\text{close}}}, \\
c_t^{\text{migr}} = \theta_t \cdot c_t, \\
C_t^{\text{migr}} = c_t^{\text{migr}} \cdot N_t^{\text{migr}}, \\
N_{t+1} = N_{t+1}^{\text{close}} + N_t^{\text{migr}}, \\
C_{t+1} = C_{t+1}^{\text{close}} + C_t^{\text{migr}}, \\
c_{t+1} = \dfrac{C_{t+1}}{N_{t+1}}.
\end{cases}
\tag{56}
$$

Здесь верхний индекс «close» относится к оценкам, получаемым без учета миграции (ср. с (51)), «migr» – к показателям, характеризующим мигрантов, величина $\theta(t)$ характеризует соотношение между возрастной структурой мигрантов и структурой населения в целом. Модель (56) была апробирована при реконструкции показателей иммиграции в США [76]. Причем, на основе анализа статистики миграции в США [77] было положено, что $\theta(t)\approx 1{,}15$. Как и в приведенных выше работах по инверсному прогнозу, была построена целевая функция, учитывающая как точность выполнения соотношений модели, так и гладкость решения. В результате были реконструированы показатели чистой иммиграции в США с начала колонизации этой страны выходцами из Европы. Оцененная динамика иммиграции оказалась вполне правдоподобной при сравнении с хронологией событий, оказывавших влияние на иммиграцию в США. Кроме того, оцененный ряд достаточно хорошо аппроксимирует официальные данные об иммиграции в те периоды, за которые такие данные имеются (см. рис.17). Причем, периоды заметного расхождения между оценкой и официальными данными пришлись на время законодательного ограничения иммиграции и значительной нелегальной иммиграции в страну. Сравнение результатов реконструкции с официальными данными позволило успешно оценить так же и масштабы нелегальной иммиграции. Так, согласно результатам расчетов, в 40-50-е годы нетто-иммиграция в США превысила ее официальный уровень почти на 15 млн. чел. Такая оценка вполне правдоподобна, учитывая военный и послевоенный поток беженцев, а так же известные последствия программы по привлечению мексиканских рабочих в экономику США, которая началась в 1942 году и продлилась несколько десятилетий [78, 79].

10. Модель воспроизводства демографического потенциала. Приложения в теории эргодичности

Помимо приложений к агрегированному демографическому моделированию, концепция демографического потенциала находит интересные приложения так же и в теории популяционных моделей, учитывающих структуру населения. В классической постановке первичными показателями, определяющими модель воспроизводства населения, являются, возрастные коэффициенты рождаемости и смертности. Коэффициент Лотки и, соответственно, темп прироста репродуктивного потенциала могут быть оценены на основе отмеченных показателей согласно соотношению (2) или его дискретному аналогу. Интересные результаты получаются, если при разработке популяционной модели опираться не на показатели рождаемости и смертности, а на показатели смертности дополненные величиной коэффициента прироста стандартного суммарного репродуктивного потенциала. Рассмотрим популяционную модель с заданным режимом смертности и правилом изменения стандартного репродуктивного потенциала:

$$V(t+1)=\lambda V(t). \qquad (57)$$

Еще раз подчеркнем, что в предлагаемой постановке параметр λ является не расчетной величиной, а входным параметром модели, будем называть его *коэффициентом воспроизводства* населения. Выразив суммарные потенциалы в (57) через численности возрастных групп населения и стандартные возрастные коэффициенты демографического потенциала, имеем:

$$v_0 n_0(t+1)+\sum_{x=1}^{X} v_x n_x(t+1)=\lambda\sum_{x=1}^{X} v_x n_x(t+1). \qquad (58)$$

Отсюда можно выразить численность младшей возрастной группы следующего периода:

$$n_0(t+1)=\sum_{x=1}^{X}\left(\lambda\frac{v_x}{v_0}-P_x\frac{v_{x+1}}{v_0}\right)n_x(t), \qquad (59)$$

где $P_x=n_{x+1}(t+1)/n_x(t)$ – обычные коэффициенты передвижки, определяемые режимом смертности. Из (59) видно, что в предлагаемой нами постановке коэффициенты первой строки матрицы передвижки определяются не из коэффициентов рождаемости, а из соотношений:

$$F_x=\lambda\frac{v_x}{v_0}-P_x\frac{v_{x+1}}{v_0}=\frac{L_0\lambda^{x+1}}{L_x}\Delta_x, \qquad (60)$$

где $\Delta_x \overset{\text{def}}{=} u_x-u_{x+1}$, $u_x=(v_xL_x\lambda^{-x})/(v_0L_0)$ – ожидаемое относительное значение демографического потенциала младенца по достижении им возраста x лет; L_x – числа живущих таблицы дожития. Таким образом, возрастные коэффициенты репродуктивного потенциала, величина коэффициента воспроизводства и режим смертности однозначно определяют матричную модель воспроизводства населения (4), где матрица L имеет ту же структуру, что и матрица Лесли (5), но коэффициенты ее первой строки определяются из соотношений (60). Будем называть ее *матрицей воспроизводства* населения. Модель (57), (59)-(60) будем называть *моделью воспроизводства демографического потенциала.*

Получим непрерывный аналог (60), выражающий функцию рождаемости через функцию демографического потенциала. Имеем:

$$\rho\int_0^{\infty} n(x;t)v(x)dx=\rho V(t)=\frac{d}{dt}V(t)=\frac{d}{dt}\left[\int_0^{\infty}B(t-x)l(x)v(x)dx\right]=$$

$$=-B(t-x)l(x)v(x)\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}B(t-x)\frac{d\left[l(x)v(x)\right]}{dx}dx=$$

$$=B(t)v(0)+\int_0^{\infty}n(x;t)\frac{1}{l(x)}\frac{d\left[l(x)v(x)\right]}{dx}dx. \qquad (61)$$

Отсюда имеем:

$$B(t) = -\int_0^\infty n(x;t)\frac{e^{\rho x}}{l(x)}\frac{du(x)}{dx}dx, \tag{62}$$

где $u(x)=[l(x)v(x)]/[e^{\rho x}v(0)]$ – ожидаемый относительный демографический потенциал младенца по достижении им возраста x лет. Из (62) видно, что функция рождаемости может быть выражена как:

$$f(x) = -\frac{e^{\rho x}}{l(x)}\frac{du(x)}{dx} = \frac{v(x)}{v(0)}\left(\rho - \frac{d}{dx}\ln\left(l(x)v(x)\right)\right). \tag{63}$$

Помимо возможности аппроксимации коэффициента Лотки темпом изменения суммарного потенциала, обоснованием актуальности модели воспроизводства демографического потенциала служат следующие соображения. Подход к моделированию динамики младшей возрастной группы через соотношение для суммарного потенциала (57), а не через возрастные коэффициенты рождаемости и смертности может быть адекватен, например, в ситуации, когда популяция развивается в условиях жесткого ограничения на потребление некоторого ресурса. Это прежде всего касается биологических популяций, однако может быть адекватно и воспроизводству человеческой популяции, особенно в долгосрочном плане. При этом смысловая нагрузка возрастных коэффициентов демографического потенциала может весьма отличаться от репродуктивных потенциалов Фишера. Удобство модели воспроизводства демографического потенциала в том, что уровень рождаемости задается в этой модели не через набор возрастных коэффициентов, а через коэффициент воспроизводства, являющийся аналогом коэффициента Лотки. Заметим, что зачастую в долгосрочных демографических прогнозах показатели рождаемости подбираются как раз исходя из некоторого наперед заданного значения коэффициента Лотки. В такой ситуации использование этого показателя как экзогенного параметра модели предпочтительно. Преимуществом модели воспроизводства демографического потенциала является так же удобство построения для нее агрегированных методов, которые могут опираться непосредственно на (57). Наконец, модель воспроизводства демографического потенциала может быть интерпретирована как упрощение классической популяционной модели, причем, результаты расчетов по такой упрощенной модели оказываются весьма точными [64].

Формально классы моделей воспроизводства демографического потенциала и классических популяционных моделей эквивалентны. Действительно, из (59) следует, что при должном выборе возрастных коэффициентов рождаемости можно получить популяционную модель, эквивалентную модели воспроизводства демографического потенциала. С другой стороны, в силу (3), выбрав возрастные коэффициенты демографического потенциала равными репродуктивным потенциалам Фишера, всегда можно получить модель воспроизводства демографического потенциала, эквивалентную заданной классической популяционной модели. Тем не менее, интерпретация параметров этих моделей различна. Так, в классическом случае коэффициенты рождаемости и, соответственно, коэффициенты первой строки матрицы Лесли неотрицательны, и это обстоятельство играет важную роль в математической теории популяционных моделей, см. например, [80]. В модели воспроизводства демографического потенциала, напротив, неотрицательность указанных коэффициентов не может быть гарантирована заранее, см. (60), (63). Актуальность моделей с отрицательными коэффициентами первой строки матрицы воспроизводства была отмечена еще Лесли [49], но они так и не получили должного исследования в математической демографии.

Отмеченное обстоятельство делает актуальной задачу распространения классических результатов теории популяционных моделей на случай, когда не может быть гарантирована неотрицательность всех элементов матрицы воспроизводства. В первую очередь это касается свойств эргодичности, которые были разработаны с привлечением предположения неотрицательности матрицы Лесли и – в непрерывном случае – функции рождаемости. Свойство эргодичности демографических моделей, исследованное в непрерывном случае Лоткой, Шарпом и Коулом и в дискретном случае Лесли, Лопесом и Парлеттом, сводится к тому, что с течением времени возрастная структура населения стремится к структуре асимптотически эквивалентно-

го модельного населения, а начальные нерегулярности возрастной структуры со временем «забываются». Доказательство и библиографию можно найти у Артура [80, 81].

В дискретном случае свойство эргодичности характеризует структуру спектра матрицы воспроизводства населения. Оно имеет место тогда и только тогда, когда коэффициент воспроизводства является единственным собственным значением матрицы воспроизводства, имеющим максимальное абсолютное значение в спектре этой матрицы. Оказывается, что спектр матрицы воспроизводства тесно связан с возрастной структурой демографических потенциалов. А именно, имеет место следующий результат [82]:

Теорема (*О круге инстабильности модели воспроизводства демографического потенциала). Пусть заданы возрастная структура* $v_x, x = \overline{0, X}$ *демографических потенциалов и числа живущих* $L_x, x = \overline{0, X}$. *Тогда существует круг* $\Lambda = \{\lambda : |\lambda| \le \lambda^{\min}\}$ *такой, что режим воспроизводства с указанными выше показателями обладает свойством эргодичности тогда и только тогда, когда коэффициент воспроизводства не принадлежит этому кругу. Указанный круг будем называть кругом инстабильности, а его радиус - радиусом инстабильности.*

Радиус инстабильности может быть найден как наибольший модуль решения уравнения

$$\sum_{x=0}^{X} L_x v_x \mu^{-x} = 0, \tag{64}$$

которому удовлетворяют все собственные числа матрицы воспроизводства, за исключением коэффициента воспроизводства.

Кроме того, имеет место результат [82]:

Теорема. *Структура ожидаемых будущих относительных потенциалов младенца* $u_x, x = \overline{0, X}$ *однозначно определяет соотношения между собственными числами матрицы воспроизводства и, как следствие модель воспроизводства обладает свойством эргодичности.*

Отношения собственных чисел матрицы воспроизводства к коэффициенту Лотки удовлетворяют уравнению:

$$\sum_{x=0}^{X} u_x \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{-x} = 0. \tag{65}$$

В силу эквивалентности классической популяционной модели соответствующей модели воспроизводства демографического потенциала, полученные результаты в равной мере относятся и к классическим моделям, в т.ч. с отрицательными элементами матрицы Лесли.

11. Приложения в теории монотонной сходимости и разработке обоснованных показателей инстабильности

Поскольку – для моделей с постоянным режимом воспроизводства и в условиях эргодичности – структура населения асимптотически сходится к структуре стабильного эквивалентного населения, в литературе были предприняты попытки построить функции расстояния между возрастными структурами, которые монотонно сходятся к нулю по мере стабилизации возрастной структуры населения.

Используя запись популяционной модели в форме модели цепи Маркова, Ш. Тулджапуркар [83] предложил монотонную меру сходимости структуры населения к структуре стабильного эквивалентного населения на основе информационного расстояния Куллбака-Лейблера [84, 85]. Позже куллбаковское расстояние, предложенное Тулджапуркаром, было исследовано Р. Шоеном и Я. Кимом [43], которые высказали предположение об уникальности этого показателя как нетривиальной монотонной меры сходимости к стабильному эквивалентному населению. Автором было показано, что монотонная сходимость куллбаковского расстояния к нулю в модели воспроизводства демографического потенциала равносильна неотрицательности матрицы воспроизводства и условиям, гарантирующим свойство эргодичности этой модели [86].

Независимо от американских исследователей, развивая теорию показателей инстабильности возрастной структуры населения, С. Пирожков выдвинул задачу разработки обоснованных индексов инстабильности [25, 28]. Модифицировав показатель инстабильности Пирожкова,

А. Рубинов и Н. Чистякова разработали показатель инстабильности, монотонно убывающий до нуля по мере стабилизации структуры населения [31], отметив монотонность этого показателя как его отличительную черту.

Вопреки предположениям об уникальности отмеченных выше монотонных мер, автору удалось установить существование широкого класса монотонных мер, включающего как частные случаи и куллбаковское расстояние, и показатель инстабильности Пирожкова-Рубинова-Чистяковой [87]. Причем, демографические потенциалы и популяционная модель в форме модели воспроизводства демографического потенциала играют ключевую роль в разработке классов монотонных мер конвергенции возрастных структур. Удалось построить монотонные меры сходимости возрастной структуры не только для рассмотренного другими авторами случая, когда исследуется сближение структуры населения с постоянным режимом воспроизводства со структурой стабильного эквивалентного населения, но и для случая, когда исследуется сближение возрастных структур двух нестабильных населений с одинаковым и, вообще говоря, переменным режимом воспроизводства. В предложенном классе монотонных мер удалось указать на ряд простых робастных мер, пригодных для прикладных расчетов, в отличие, например, от куллбаковской меры, результаты расчетов по которой оказались совершенно неустойчивыми.

Исследование сходимости возрастных структур, равно как и исследование других асимптотических свойств популяционных моделей удобно вести, перейдя от численностей возрастных групп к скорректированным числам рождений:

$$b_t = \frac{n_0(t)}{\lambda^t}. \tag{66}$$

В упомянутой работе [87] показано, что всякое расстояние между возрастной структурой замкнутого населения с постоянным режимом воспроизводства и структурой стабильного эквивалентного населения монотонно сходится к нулю по мере стабилизации возрастной структуры населения, если это расстояние имеет вид:

$$D_t = \sum_{x=0}^{X} u_x d\left(b_{t-x}; b^*\right), \tag{67}$$

где $b^* = \frac{V(t)}{\lambda^t \cdot U} \equiv \frac{V(0)}{U}$, $U \overset{def}{=} \sum_{x=0}^{X} u_x$, – скорректированные числа рождений в стабильном эквивалентном населении, $d(b;b^*)$ – некоторая *функция уклонений,* которая должна быть выпуклой как функция первого аргумента и равняться нулю при равенстве ее аргументов между собой. В практических расчетах удобнее пользоваться расстоянием (67), выраженным в терминах численностей возрастных структур:

$$D_t = \sum_{x=0}^{X} \lambda^{-x} \frac{L_x}{L_0} \nu_x d\left(\frac{L_0 n_x(t)}{\lambda^{t-x} L_x}; \frac{L_0 n_x^*}{\lambda^{t-x} L_x}\right). \tag{68}$$

Можно показать, что и куллбаковское расстояние, и показатель инстабильности Пирожкова-Рубинова-Чистяковой могут быть сведены к виду (67), (68). Первому показателю соответствует функция уклонений $d\left(b;b^*\right) = \frac{b}{Ub^*}\ln\left(\frac{b}{b^*}\right)$, а второму – $d\left(b;b^*\right) = \frac{1}{V(0)}\left|b-b^*\right|$.

Если в (67), (68) вместо показателей стабильного эквивалентного населения подставить показатели произвольного населения, то полученное расстояние между возрастными структурами двух нестабильных населений с одинаковым режимом воспроизводства будет монотонно сходится к нулю при дополнительном условии, что функция уклонений выпукла как функция двух переменных. Заметим, что функция уклонений куллбаковского расстояний не удовлетворяет этому условию, и это расстояние не может быть использовано при исследовании конвергенции возрастных структур реальных населений.

Кроме того, если функция уклонений является однородной, то соответствующее расстояние между структурами населений с одинаковым режимом воспроизводства будет монотонно

сходиться к нулю даже в случае переменных показателей рождаемости и смертности. Однако при этом в качестве весовых коэффициентов в (67) следует использовать зависящие от времени абсолютные демографические потенциалы (14):

$$D_t = \sum_{x=0}^{X} u_x(t-x)\,d\left(b^1_{t-x}; b^2_{t-x}\right), \tag{69}$$

где верхний индекс соответствует номеру населения, $b^1_t = n^1_0(t)c_0(t)$, $b^2_t = n^2_0(t)c_0(t)$ – абсолютные демографические потенциалы (14) младенцев в момент времени t, $u_x(t)=[c_x(t)L_x(t)]/c_0(t)$ – ожидаемый абсолютный демографический потенциал младенца по достижении им возраста x лет (везде переменная времени соответствует моменту рождения). Приложение описанных результатов по монотонной сходимости в прикладных исследованиях облегчается тем обстоятельством, что в рамках построенного класса монотонных мер можно выделить меры, результаты расчетов по которым оказываются устойчивыми к вариации значений демографических потенциалов. Это позволяет использовать на практике стандартные возрастные коэффициенты демографического потенциала, что значительно расширяет возможности по использованию монотонных мер сходимости. Отмеченной устойчивостью обладают, в частности, меры с абсолютной и квадратичной функцией уклонений. В то же время куллбаковское расстояние оказывается совершенно неустойчивым к вариации входных параметров.

Не повторяя вывода изложенных результатов [87], распространим их на случай непрерывной популяционной модели. Ниже будем считать, что все рассматриваемые функции удовлетворяют условиям, достаточным для дифференцирования под знаком интеграла и других используемых преобразований. В частности, финитность функции рождаемости, ограниченность и кусочно непрерывная дифференцируемость функций рождаемости, дожития и плотности численности населения достаточны для правомерности следующих ниже выкладок. Рассмотрим наиболее общий случай расстояния между двумя произвольными населениями с одинаковым переменным режимом воспроизводства:

$$D_t = \int_0^{\infty} u(x,t-x)\,d\left(b^1(t-x); b^2(t-x)\right)dx, \tag{70}$$

где $u(x,t)=(l(x,t)c(x,t))/c(0,t)$ – ожидаемые относительные потенциалы младенцев, $b^i(t)=B^i(t)c(0,t)$ – интенсивность прироста абсолютного демографического потенциала населения за счет новорожденных (как и ранее, $B^i(t)$ – интенсивность рождений), $i=1,2$..

Используя постоянство суммарного демографического потенциала (17), имеем:

$$0 = \frac{d}{dt}C(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^{\infty} B(t-x)l(x,t-x)c(x,t-x)\,dx\right] = \frac{d}{dt}\left[\int_0^{\infty} b(t-x)u(x,t-x)\,dx\right] =$$

$$= -b(t-x)u(x,t-x)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} b(t-x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{\tau=t-x} dx = b(t) + \int_0^{\infty} b(t-x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{\tau=t-x} dx. \tag{71}$$

Таким образом, непрерывную модель воспроизводства замкнутого однородного населения можно представить в виде

$$b(t) = \int_0^{\infty} b(t-x)\Delta(x,t-x)\,dx, \tag{72}$$

где $\Delta(x,t) \overset{def}{=} -\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$. Заметим, что имеет место равенство:

$$\int_0^{\infty}\Delta(x,t)dx \equiv u(0,t) = 1. \tag{73}$$

Из (72), в частности, следует, что в классической непрерывной популяционной модели функция рождаемости может быть выражена через демографические потенциалы и функцию дожития:

$$f(x,t) = \frac{\Delta(x,t)c(0,t)}{l(x,t)c(0,t+x)}. \tag{74}$$

Рассмотрим производную расстояния (70):

$$\frac{d}{dt}D_t = \frac{d}{dt}\int_0^{\infty}u(x,t-x)d\left(b^1(t-x);b^2(t-x)\right)dx = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}u(t-y,y)d\left(b^1(y);b^2(y)\right)dy =$$

$$= d\left(b^1(t);b^2(t)\right) - \int_{-\infty}^{t}\Delta(t-y,y)d\left(b^1(y);b^2(y)\right)dy =$$

$$= d\left(b^1(t);b^2(t)\right) - \int_0^{\infty}\Delta(x,t-x)d\left(b^1(t-x);b^2(t-x)\right)dx. \tag{75}$$

Отсюда, из соотношений (72), (73) в предположении о неотрицательности $\Delta(x,t)$ (в классическом случае это есть следствие (74) и неотрицательности функций рождаемости, дожития и демографического потенциала), а так же из неравенства Йенсена для выпуклых функций [88] следуют следующие результаты:

Если функция уклонений выпукла по первой переменной и равна нулю при равенстве своих аргументов, то расстояние (70), в котором место второго населения занимает стабильное население, эквивалентное исследуемому населению с постоянным режимом воспроизводства, монотонно сходится к нулю по мере стабилизации возрастной структуры населения. Заметим, что для населения с постоянным режимом воспроизводства весовую функцию в (70) можно выразить через репродуктивные потенциалы Фишера, а величины $b(t)$ можно трактовать как скорректированные интенсивности рождения так же, как и в дискретном случае, изложенном выше.

Если – дополнительно – функция уклонений выпукла как функция двух переменных, то расстояние (70) между двумя произвольными населениями с одинаковым постоянным режимом воспроизводства монотонно сходится к нулю по мере сближения их возрастных структур.

Наконец, если сузить класс функций уклонений, наложив еще и ограничение однородности, то расстояние (70) монотонно сходится к нулю по мере сближения возрастных структур двух произвольных населений с одинаковым и, быть может, переменным режимом воспроизводства.

Рассмотрим приложение полученных результатов к теории коэффициентов и индексов инстабильности. Коэффициент инстабильности характеризует степень различий между возрастными структурами реального и стабильного населений, и всякая монотонная мера типа (67)-(70) является вполне обоснованным показателем такого рода. Особый интерес для практики представляют робастные меры, упомянутые выше, и среди них следует отметить и показатель инстабильности Пирожкова-Рубинова-Чистяковой. Кроме того, интересными представляются расстояния, в которых слагаемые, содержащие показатели реального и стабильного населения, разделены [87], как в следующем примере:

$$D_t = \sum_{x=0}^{X}u_x\left(\frac{n_x(t)}{\lambda^{t-x}L_x}\right)^2 - \sum_{x=0}^{X}u_x\left(\frac{n_x^*}{\lambda^{t-x}L_x}\right)^2; \tag{76}$$

здесь второе слагаемое, содержащее показатели стабильного населения, неизменно в силу постоянства структуры этого населения (оно равно $V^2(0)/U$), а первое слагаемое монотонно убывает по мере стабилизации структуры реального населения. Иными словами, следующий пока-

затель, не зависящий от структуры стабильного населения, так же монотонно убывает по мере стабилизации населения и может служить индикатором этого процесса:

$$S_t = \sum_{x=0}^{X} u_x \left(\frac{n_x(t)}{\lambda^{t-x} L_x} \right)^2 . \qquad (77)$$

Так же, как возрастание энтропии замкнутой термодинамической системы характеризует необратимость термодинамических процессов, убывание показателя (77) указывает на необратимые изменения возрастной структуры замкнутого населения с постоянным режимом воспроизводства. На основе этого показателя, так же, как и на основе других мер инстабильности, можно построить индекс инстабильности [25, 28], характеризующий интенсивность протекания процессов стабилизации:

$$J_t = S_{t_0} / S_t . \qquad (78)$$

Преимущество этого показателя в отсутствие явной зависимости от асимптотической структуры населения, а так же в робастности (77) по отношению к варьированию весовых коэффициентов. Заметим, что степень интенсивности протекания процесса стабилизации можно так же измерять с помощью расстояния между текущей возрастной структурой реального населения и его же возрастной структурой в некоторый иной момент времени. Выбор для этого монотонной меры сходимости возрастных структур реальных населений с одинаковым режимом воспроизводства обеспечит монотонную сходимость к нулю такого показателя [87]. Представляется, что такой подход более обоснован, чем построение индексов инстабильности типа (78).

Построенный выше класс монотонных мер конвергенции возрастных структур достаточно широк. Однако представляет интерес ответ на вопрос о существовании других монотонных мер, не сводящихся к мерам, входящим в построенный класс или к величинам (77). Заметим, что для модели воспроизводства специального вида такие меры могут быть построены [89]. В случае моделей общего вида указанный вопрос остается открытым.

Монотонные меры сходимости возрастных структур нестабильных населений с одинаковым режимом воспроизводства представляют интерес с точки зрения исследований в области исторической демографии и демографии неоднородного населения. Так, с использованием построенных монотонных мер удалось провести исследование различий в режимах воспроизводства расово-этнических групп США [87]. Отметим, что это исследование опиралось только на данные по возрастно-половой структуре указанных групп, без привлечения обычно недоступных данных о рождаемости и смертности в пределах отдельных групп. В результате удалось выявить, что расово-этнические группы населения США можно объединить в три группы с относительно близкими режимами воспроизводства:

А) все американские индейцы, белое и черное население не испанского происхождения;

Б) все население испанского происхождения, кроме американских индейцев;

В) население азиатского и тихоокеанского неиспанского происхождения.

Помимо самостоятельного интереса подобное группирование населения позволяет разработать модели воспроизводства, учитывающие неоднородность населения, с одной стороны, и близость режимов воспроизводства – с другой.

12. Благодарности

Автор выражает благодарность академику Петрову А.А. за внимание к работе и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров А. А., Шананин А. А.* Математическая модель для оценки эффективности одного сценария экономического роста // Математическое моделирование. 2002, т. 14, №7, с. 27-52.
2. *Lotka A. J.* Relation between birth rates and death rates // Science. 1907, v. 26.
3. *Lotka A. J.* Studies on the model of growth of material aggregates // The American Journal of Science. 1907, v.24.

4. *Lotka A. J.* Elements of Physical Biology. Baltimore: Williams and Wilkins; New York: Dover Publications, 1925.
5. *Lotka A. J.* Theorie Analytique des Associations Biologiques. Part II. Analyse Demographique avec Application Particuliere a l'Espece Humanie. Actualities Scientifiques et Industrielles, No.780. Paris: Hermann and Cie, 1939.
6. *Verhulst P. F.* Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Corres. Math. Phys., 10 (1838): 113-121.
7. *Raeside R.* The use of sigmoids in Modelling and Forecasting human Populations // Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society), v.151, Issue 3, 1988: p.499-513.
8. *Эдиев Д.М.* Демографические и экономико-демографические потенциалы: Дис... канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1999. 206 с.
9. *Fisher R. A.* The genetical theory of natural selection. N.-Y.: Dover Publications, 1930.
10. *Lotka A. J.* The stability of the normal age distribution // Proceedings of the National Academy of Sciences (USA), 1922, v.8, p.339-345.
11. *Leslie P. H.* Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics // Biometrika, XXXV 1948, p.213-245.
12. *Cole L. C.* Dynamics of animal population growth. In M. C. Sheps and J. C. Ridley (eds.), Public Health and Population Change: Current Research Issues. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 1965.
13. *Espenshade T. J., Campbell G.* The Stable Equivalent Population, Age Composition, and Fisher's Reproductive Value Function // Demography, 1977, v.14, p.77-86.
14. *Keyfitz N., Flieger W.* World Population: An Analysis of Vital Data. Chicago: The University of Chicago Press, 1968.
15. *Keyfitz N., Flieger W.* World Population Growth and Aging: Demographic Trends in the Late Twentieth Century. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1990.
16. *Goodman L. A.* On the Age-Sex Composition of the Population That Would Result From Given Fertility and Mortality Conditions // Demography, 1967, v.4, p.423-441.
17. *Goodman L. A.* On the Reconciliation of Mathematical Theories of Population Growth // Journal of the Royal Statistical Society, Ser. A (General), CXXX 1967, p.541-553.
18. *Keyfitz N.* Age Distribution and Stable Equivalent // Demography, 1969, v.6, p.261-269.
19. *Goodman L. A.* An Elementary Approach to the Population Projection-Matrix, to the Population Reproductive Value, and to Related Topics in the Mathematical Theory of Population Growth // Demography, 1968, v.5, p.382-409.
20. *Keyfitz N.* Introduction to the Mathematics of the Population. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.
21. *Keyfitz N.* Applied mathematical demography. N. Y., etc.: Springer, 1985.
22. *Vincent P.* Potentiel d'accroissement d'une population stable // Journal de la Societe de Statistique de Paris, 1945, v.86, p.16-29.
23. *Bourgeois-Pichat J. E.* The Concept of a Stable Population. Application to the Study of Populations of Countries With Incomplete Demographic Statistics. N.Y.: United Nations, 1968.
24. *Bourgeois-Pichat J. E.* Stable, Semi-stable Populations and Growth Potential // Population Studies, 1971, v.25, p.235-254.
25. *Пирожков С. И.* Анализ возрастной структуры населения и закономерности ее формирования. Дис... канд. экон. наук. Киев: КИНХ, 1973.
26. *Кваша А. Я.* Проблемы экономико-демографического развития СССР. – М.: Статистика, 1974.
27. *Андреев Е. М., Пирожков, С. И.* О потенциале демографического роста // Население и окружающая среда. – М.: 1975.
28. *Пирожков С. И.* Демографические процессы и возрастная структура населения. – М.: Статистика, 1976. 136 с.
29. *Вишневский А. Г.* Возрастная структура населения и ее изучение // Вестник статистики, 1977, №1, с.65-69.
30. *Баркалов Н. Б.* Моделирование демографического перехода. – М.: Изд-во МГУ, 1984.
31. *Рубинов А. М., Чистякова Н. Е.* Возрастная структура и потенциал роста населения // Ред. ВолковА.Г. Демографические процессы и их закономерности. – М.: Мысль, 1986, с.38-52.
32. *Keyfitz N.* On the momentum of Population Growth // Demography, 1971, v.8, p.71-80.
33. *Frejka T.* Reflections on the Demographic Conditions Needed to Establish a U.S. Stationary Population Growth // Population Studies, 1968, v.22, p.379-397.
34. *Frejka T.* The Future of Population Growth. N. Y.: John Wiley & Sons, 1973.
35. *Frauenthal J. C.* Birth Trajectory Under Changing Fertility Conditions // Demography, 1975, v.12, p.447-454.
36. *Mitra S.* Influence of instantaneous fertility decline to replacement level on population growth: an alternative model // Demography, 1976, v.13, p.513-519.

37. *Mitra S.* Models of birth trajectories with certain patterns of variation in vital rates // Genus, 1987, v.43, p.1-14.
38. *Tognetti K.* Some Extensions of the Keyfitz Momentum Relationship // Demography, 1976, v.13, p.507-512.
39. *Potter R. G., Wolowyna O. Kulkarni P. M.* Population Momentum: A Wider Definition // Population Studies, 1977, v.31, p.555-569.
40. *Preston S. H., Coale A. J.* Age structure growth, attrition, and accession: a new synthesis // Population Index, 1982, v.48, p.215-259.
41. *Preston S. H.* The relation between actual and intrinsic growth rates // Population Studies, 1986, v.40, p.343-351.
42. *Wachter K. W.* Age group growth rates and population momentum // Population Studies, 1988, v.42, p.487-494.
43. *Schoen R., Kim Y.J.* Movement toward stability as a fundamental principle of population dynamics // Demography, 1991, v.28, p.455-466.
44. *Kim Y. J., Schoen R., Sarma P. S.* Momentum and the growth-free segment of a population // Demography, 1991, v.28, p.159-173.
45. *Cerone P.* On the effects of the generalized renewal integral equation model of population dynamics // Genus, 1996, v.52, p.53-70.
46. *Kim Y. J., Schoen R.* Population momentum expresses population aging // Demography, 1997, v.34, p.421-427.
47. *Tuljapurkar Sh., Li N.* Population momentum. Mountain View Research, 1997. http://www.mvr.org/Papers/momentum/momentum.html
48. *Сафарова Г. Л.* О стабилизации в матричной модели воспроизводства населения. // Ред. Волков А.Г. Демографические процессы и их закономерности. – М.: Мысль, 1986, с.52-59.
49. *Leslie P. H.* On the use of matrices in certain population mathematics // Biometrika. XXXV (1945): p.183-212.
50. *Whelpton P.* K. Reproduction rates adjusted for age, parity, fecundity, and marriage // Journal of the American Statistical Association 1946, v.41, № 236, p.501.
51. *Elizaga J. C.* Métods para medir la fecundidad "actual" de una población // Proceedings of the World Population Conference, Rome, 1954. Vol. 4. New York: United Nations, 1955, p.291-302.
52. *Bourgeois-Pichat J. E.* La mesure de la fécondité des populations humanies // Proceedings of the World Population Conference, Rome, 1954. Vol. 4. United Nations, New York, 1955, p.249-259.
53. *National Center for Health Statistics.* (1995). Vital statistics of the United States, 1991. vol. I. Natality. Washington: Public Health Service.
54. *Hersch L.* De la demographie actuelle a la demographie potentielle. Gen., 1944.
55. *Lefkovitch L. P.* The study of population growth in organisms grouped by stages // Biometrics 1965, v.21, p.1-18.
56. *Law R., Edley M. T.* Transient Dynamics of Populations with Age- and Size-Dependent Vital Rates // Ecology 1990, v.71, №5, p.1863-1870.
57. *Caswell H.* Optimal life histories and the maximization of reproductive value: a general theorem of complex life cycles // Ecology 1982, v.63, p.1218-1222.
58. *Caswell H.* Life cycle models for plants // Lectures on Mathematics in the Life Sciences 1986, v.18, p.171-233.
59. *U. S. Bureau of the Census.* (2000). International Data Base (IDB). http://www.census.gov/ipc/www/idbnew.html. Data updated 5-10-2000.
60. *University of California, Berkeley.* (1998). The Berkeley mortality database. http://demog.berkeley.edu/wilmoth/mortality.
61. *United Nations.* Manual X. Indirect techniques for demographic estimation. N.Y.: UN, 1983.
62. *Ediev D.M.* Principles of aggregate economic-demographic modeling based on demographic potentials' technique // Demographic-macroeconomic modeling. Rostock, 2000, 17 p. www.demogr.mpg.de/Papers/workshops/ws001011.htm
63. *Эдиев Д.М.* Агрегированное прогнозирование численности населения с использованием техники демографического потенциала // Электронный журнал "Исследовано в России", 38, стр. 382-407, 2001 г. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/038.pdf
64. *Ediev D.M.* Application of the demographic potential concept to understanding the Russian population history and prospects: 1897-2100 // Demographic Research. 2001. vol.4, Article 9. p.289-336. http://www.demographic-research.org/volumes/vol4/9/4-9.pdf
65. *United Nations.* World Population Prospects. The 2000 Revision. vol. I, II. N.Y.: UN, 2001.
66. *Госкомстат России.* Население России за 100 лет (1897-1997). – М.: Госкомстат России, 1998.
67. *Андреев Е. М., Дарский Л. Е., Харькова Т. Л.* Демографическая история России: 1927-1959. – М.: Информатика, 1998.

68. *Greville T. N. E.* Some new generalized inverses of with spectral properties // Theory and Application of Generalized Inverses of Matrices. Texas Technological College Mathematics Series No. 4: 26-46. Lubbock: Texas Technological Press, 1968.
69. *Greville T. N. E., Keyfitz N.* Backward population projection by a generalized inverse // Theoretical Population Biology 1974, v.6, p.135-142.
70. *Lee R. D.* Econometric Studies of Topics in Demographic History. Ph.D. Dissertation (1971), Harvard University, Arno Press, 1978.
71. *Lee R. D.* Estimating series of vital rates and structures from baptisms and burials: a new technique, with application to pre-industrial England // Population Studies, 1974, v.28, p.495-512.
72. *Wrigley E. A., Schofield R. S.* The Population History of England, 1541-1871: A Reconciliation. London, 1981.
73. *Oeppen J.* Back Projection and Inverse Projection: Members of a Wider Class of Constrained Projection Models // Population Studies, 1993, v.47, p.245-267.
74. *Lee R. D.* Inverse projection and back projection: a critical appraisal and comparative results for England 1539-1871 // Population Studies 1985, v.39, №2.
75. *Wachter K. W.* Ergodicity and inverse projection // Population Studies 1986, v.40, p.275-287.
76. *Эдиев Д.М.* Реконструкция показателей иммиграции в США с использованием модели демографического потенциала // Электронный журнал "Исследовано в России", 140е, стр. 1619-1635, 2001. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/140e.pdf
77. *U. S. Immigration and Naturalization Service.* Statistical Yearbook of the Immigration and Naturalization Service, 1997. U.S. Government Printing Office: Washington, D.C, 1999.
78. *Bennett M. T.* American Immigration Policies. A History. Washington, D.C.: Public Affairs Press, 1963.
79. *Ueda R.* Postwar Immigrant America. A Social History. Boston-New York: BEDFORD BOOKS of ST. MARTIN'S PRESS, 1994.
80. *Arthur W. B.* The Ergodic Theorems of *Demography*: a Simple Proof // Demography, 1982, v.19, p.439-445.
81. *Arthur W. B.* Why a population converges to stability // American mathematical monthly 1981, v.88, № 8, p.557-563.
82. *Эдиев Д. М.* Взаимосвязь между спектральными свойствами матрицы Лесли и возрастной структурой демографического потенциала // Электронный журнал "Исследовано в России", 74е, 2002 г. с. 815-823. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/074e.pdf
83. *Tuljapurkar Sh.* Why use population entropy? It determines the rate of convergence // Journal of Mathematical Biology 1982, v.13, p.325-337.
84. *Kullback S., Leibler R.* On information and Sufficiency // Ann. of Math. Stat. 1951, v.22, p.79-86.
85. *Kullback S.* Information theory and statistics. New York: John Wiley, 1959. (Reprinted by Dover, New York, 1968).
86. *Эдиев Д. М.* Об условиях монотонной сходимости структуры населения к структуре стабильного эквивалентного населения в куллбаковской метрике в рамках модели воспроизводства демографического потенциала // Электронный журнал "Исследовано в России", 17, стр. 182-190, 2002. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/017.pdf
87. *Ediev D. M.* On monotonic convergence to stability // Demographic Research. 2003. Vol.8, Article 2. P. 31-60. http://www.demographic-research.org/volumes/vol8/2/8-2.pdf
88. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. Пер. с . англ. – М.: ИЛ, 1948 (первое английское издание вышло в 1934 г.).
89. *Эдиев Д. М.* Об условиях монотонной сходимости структуры населения к структуре стабильного эквивалентного населения в квадратичной метрике в рамках модели воспроизводства демографического потенциала // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2002, №4, с.3-6.

Поступила в редакцию 17.03.2003.