А. Г. Хачатрян, Исследование устойчивости стационарных и периодических решений нелинейных параболических систем, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1979, том 84, 286–304

А.Г.Хачатрян

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ I. Введение

В работе дано обоснование метода линеаризации в задаче об устойчивости стационарных и периодических решений нелинейных параболических систем.в пространствах $C^s(\Omega)$ с любым $s \geqslant 0$.

Вопросам устойчивости решений нестационарных уравнений и систем посвящена обширная литература (см.напр.,работы [I-7]). Однако применяемая в большинстве этих работ техника исследования нестационарных уравнений в гильбертовых пространствах и в пространствах $L_p(\Omega)$ позволяет охватить сравнительно узкий класс нелинейных задач. Значительно более широкий класс задач удается рассмотреть, если в качестве основного пространства выбрать пространство C^s, как это сделано в работах В.С.Белоносова, М.П.Вишневского и Т.И.Зеленяка [8-I0]. Аналитической основой этих работ послужили оценки решения линейных параболических начально-краевых задач в гельдеровских нормах, полученные В.А.Солонниковым [II].

В [8,I0] показано, что стационарное решение $u(x)$ нелинейной $2b$ -параболической начально-краевой задачи устойчиво относительно малых возмущений из класса $C^{2b+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, если спектр соответствующей стационарной линеаризованной на $u(x)$ задачи расположен в левой полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Более того, в одномерном случае с помощью полученных в [8] оценок решений линейных задач в весовых гельдеровских пространствах функций установлено, что если исходная система линейно зависит от производных $D^\alpha u$ при $k < |\alpha| \leq 2b$, то упомянутое решение устойчиво также относительно малых возмущений из класса C^s, $s \geqslant k$.

В настоящей работе этот результат распространяется на многомерный случай. Необходимые для этого оценки решений линейных задач получены В.А.Солонниковым и автором [I2,I3].

Результат этой работы был недавно анонсирован В.С.Белоносовым [I4].

Введем необходимые нам функциональные пространства. Пусть Ω - область пространства R^n с гладкой границей S. Обозначим через $C^s(\Omega)$, $s \geqslant 0$ пространство функций, заданных в Ω, $[s]$ раз непрерывно дифференцируемых и имеющих конечную норму

$$|u|^{(s)}_{\Omega}=\sum_{|\alpha|<s}|\mathcal{D}^{\alpha}u(x)|_{\Omega}+[u]^{(s)}_{\Omega},$$

где $\mathcal{D}^{\alpha}u(x)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$,

$$|v|_{\Omega}=\sup_{x\in\Omega}|v(x)|,\quad [u]^{(s)}_{\Omega}=|\mathcal{D}^{\alpha}u|_{\Omega}$$

при целом s,

$$[u]^{(s)}_{\Omega}=\sum_{|\alpha|=[s]}\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|\mathcal{D}^{\alpha}u(x)-\mathcal{D}^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{s-[s]}}$$

при нецелом s.

Пространством $C^{\ell,\frac{\ell}{2b}}(Q_T)$ при любом нецелом $\ell>0$ и целом $b>0$ назовем пространство функций, заданных в $Q_T=$ $=\Omega\times(0,T)$ $(x\in\Omega,\ t\in(0,T))$ и имеющих конечную норму

$$|u|^{(\ell)}_{Q_T}=[u]^{(\ell)}_{Q_T}+\sum_{2bk+|\alpha|<\ell}|\mathcal{D}^k_t\mathcal{D}^{\alpha}_x u(x,t)|_{Q_T},$$

где

$$[u]^{(\ell)}_{Q_T}=\sup_{\substack{t\geq T\\ t\leq T}}[u]^{(\ell)}_{\Omega}+\sum_{\ell-2b<2bk+|\alpha|<\ell}\ \sup_{\tau<t<T}\frac{|\mathcal{D}^k_t\mathcal{D}^{\alpha}_x u(x,t)-\mathcal{D}^k_{\tau}\mathcal{D}^{\alpha}_x u(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\frac{\ell-2bk-|\alpha|}{2b}}}\tag{I.I}$$

Определим теперь весовое пространство $C^{\ell,\frac{\ell}{2b}}_s(Q_T)$ с любым $s\in[0,\ell]$ как замыкание множества функций из $C^{\ell,\frac{\ell}{2b}}(Q_T)$ в норме

$$|u|^{(\ell)}_{s,Q_T}=\sup_{t<T}t^{\frac{\ell-s}{2b}}[u]^{(\ell)}_{Q'_t}+\sum_{s<2bk+|\alpha|<\ell}\sup_{t<T}t^{\frac{2bk+|\alpha|-s}{2b}}|\mathcal{D}^k_t\mathcal{D}^{\alpha}_x u(x,t)|_{\Omega}+\tag{I.2}$$

$$+[u]^{(s)}_{Q_T}+\sum_{2bk+|\alpha|<s}\sup_{t<T}|\mathcal{D}^{\alpha}_x\mathcal{D}^k_t u(x,t)|_{\Omega}.$$

Здесь $Q'_t=\Omega\times(\frac{t}{2},t)$, а $[u]^{(s)}_{Q_T}$ как при целом, так и при нецелом s определяется формулой (I.I). При $s<0$ определим пространство $C^{\ell,\frac{\ell}{2b}}_s(Q_T)$ той же формулой (I.2) без двух последних членов правой части. Очевидно, что $C^{\ell,\frac{\ell}{2b}}_{\ell}(Q_T)=C^{\ell,\frac{\ell}{2b}}(Q_T)$.

Аналогично определяются пространства $C^{\ell,\frac{\ell}{2b}}(S_T)$ и $C_s^{\ell,\frac{\ell}{2b}}(S_T)$, $S_T = S\times(0,T)$

Приведем нужные нам свойства пространств $C_s^{\ell,\frac{\ell}{2b}}(Q_T)$

ЛЕММА I.I. Если $f\in \overset{\circ}{C}{}^{\alpha}(Q_T)$ и $u\in C_s^{2b+\alpha,\, 1+\frac{s}{2b}+\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, $s\geq 0$, то функция $g(x,t)=f(x,t)D_x^{\beta}u(x,t)$, $[s]+1\leq|\beta|\leq 2b$ удовлетворяет неравенству

$$|g(x,t)|^{(\alpha)}_{s-2b,Q_T}\leq C|u|^{(2b+\alpha)}_{s,Q_T}|f|^{(\alpha)}_{0,Q_T}T^{\frac{2b-|\beta|}{2b}} \tag{I.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем, во-первых,

$$\sup_{t<T} t^{\frac{2b-s}{2b}}|g(x,t)|_{\Omega}\leq T^{\frac{2b-|\beta|}{2b}}\sup_{t<T}|f|_{\Omega}\sup_{t<T} t^{\frac{|\beta|-s}{2b}}|D_x^{\beta}u|_{\Omega} \tag{I.4}$$

Оценим теперь $t^{\frac{\alpha+2b-s}{2b}}[g]^{(\alpha)}_{Q'_t}$. Из неравенства

$$[g]^{(\alpha)}_{Q'_t}\leq |f|_{Q'_T}[D_x^{\beta}u]^{(\alpha)}_{Q'_t}+[f]^{(\alpha)}_{Q'_t}|D_x^{\beta}u|_{Q'_T}$$

следует

$$\sup_{t<T} t^{\frac{\alpha+2b-s}{2b}}[g]^{(\alpha)}_{Q'_t}\leq T^{\frac{2b-|\beta|}{2b}}\Big(|f|_{Q_T}\sup t^{\frac{|\beta|+\alpha-s}{2b}}|D_x^{\beta}u|^{(\alpha)}_{Q'_t}+$$

$$\sup_{t<T} t^{\frac{\alpha}{2b}}[f]^{(\alpha)}_{Q'_t}\sup_{t<T} t^{\frac{|\beta|-s}{2b}}|D_x^{\beta}u|_{\Omega}\Big).$$

Складывая это неравенство с (I.4) выводим (I.3), что и требовалось.

Следующие три свойства $C_s^{\ell,\frac{\ell}{2b}}(Q_T)$ приведены в книге [8] :

I. Если $s_1\leq s_2$ и $\ell_1\leq\ell_2$, то $C_{s_2}^{\ell_2,\frac{\ell_2}{2b}}(Q_T)\subset C_{s_1}^{\ell_1,\frac{\ell_1}{2b}}(Q_T)$, при этом для любой функции из класса $C_{s_2}^{\ell_2,\frac{\ell_2}{2b}}(Q_T)$ имеет место оценка

$$|u|^{\ell_1}_{s_1,Q_T}\leq C|u|^{\ell_2}_{s_2,Q_T} \tag{I.5}$$

где C зависить от ℓ_1,ℓ_2,s_1,s_2 и T.

2. Если $u\in C_s^{\ell,\frac{\ell}{2b}}(Q_T)$ и $p=2bk+|\alpha|$, то $D_x^{\alpha}D_t^{k}u\in$ $\in C^{\ell-p}_{s-p}(Q_T)$, причем

$$|D_x^{\alpha}D_t^{k}u|^{\ell-p}_{s-p,Q_T}\leq|u|^{\ell}_{s,Q_T} \tag{I.6}$$

3. Если $u\in C_s^{\ell,\frac{\ell}{2b}}(Q_T)$, где $[s]<\ell$ и $D_x^{[s]}u(x,t)|_{t=0}=0$, то

$$\lim_{\tau\to 0}|D_x^{[s]}u|^{(\ell-[s])}_{0,Q_\tau}=0 \tag{I.7}$$

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-A\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(x,t) \tag{I.8}$$

$$\mathcal{B}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u|_{x\in S} = \Phi(x,t) \qquad (I.9)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)\ , \qquad (I.10)$$

где $u=(u_1,\dots,u_m)$, $f=(f_1,\dots,f_m)$, $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$, (I.8)-система, $2b$- параболическая по Петровскому, $\mathcal{B}$ - матричный дифференциальный оператор с $r=bm$ строками и m столбцами, удовлетворяющий условию дополнительности [II]. $\Phi=(\Phi_1,\dots,\Phi_r)$. Предполагается, что порядок оператора $B_{qj}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})$ - элемента матрицы $\mathcal{B}$ - не превосходит σ_q+2b, причем $-2b\leq\sigma_q\leq-1$. В [I2,I3] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА I.I. Пусть $0<s<2b$, $S\in C^{2b+\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$ коэффициенты оператора $\mathcal{A}$ принадлежат $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, операторов B_{qj} - $C^{\alpha-\sigma_q,\frac{\alpha-\sigma_q}{2b}}(S_T)$. Задача (I.8)-(I.I0) имеет единственное решение $u=(u_1,\dots,u_m)$, $u_j\in C_s^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$ при любых $f_j\in C_{s-2b}^{\alpha,\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, $\varphi_j\in C^{s}(\Omega)$, $\Phi_q\in C_{s-2b+\sigma_q}^{\alpha-\sigma_q,\frac{\alpha-\sigma_q}{2b}}(S_T)$ удовлетворяющих условиям согласования

$$\sum_{j=1}^{m} B_{qj}(x,0,\frac{\partial}{\partial x})\varphi_j|_S = \Phi_q(x,0) \qquad (I.II)$$

для тех q, для которых $\sigma_q+2b\leq s$ и при всех $t\leq T$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{m}|u_j|^{(2b+\alpha)}_{s,Q_T}\leq C(T)\Big[\sum_{j=1}^{m}|f_j|^{(\alpha)}_{s-2b,Q_T}+ \qquad (I.I2)$$
$$+\sum_{q=1}^{r}|\Phi_q|^{(\alpha-\sigma_q)}_{s-\sigma_q-2b,S_t}+\sum_{j=1}^{m}|\varphi_j|^{(s)}_{\Omega}\Big].$$

Если указанные выше условия выполнены при $s=0$ и, кроме того, старшие коэффициенты оператора $\mathcal{A}$ непрерывно дифференцируемы по x и при некотором $\delta\in(0,1]$ конечна норма $\sup\limits_{t<T} t^{1-\frac{\delta}{2b}}|f(x,t)|_{\Omega}$, то задача (I.8)-(I.I0) имеет единственное решение $u\in C_0^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, и оно удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j=1}^{m}|u_j|^{(2b+\alpha)}_{0,Q_t}\leq C(T)\Big[\sum_{j=1}^{m}|f_j|^{(\alpha)}_{-2b,Q_t}+ \qquad (I.I3)$$
$$\sum_{q=1}^{r}|\Phi_q|^{(\alpha-\sigma_q)}_{-2b-\sigma_q,S_t}+\sum_{j=1}^{m}|\varphi_j|_{\Omega}+\sum_{j=1}^{m}\sup_{\tau\leq t}\tau^{1-\frac{\delta}{2b}}|f_j|_{\Omega}\Big].$$

Постоянная $C(T)$ в неравенствах (I.12),(I.13) может расти при $T\to\infty$, однако мы будем пользоваться этими неравенствами при конечном T.

ТЕОРЕМА I.2. Если операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ удовлетворяют условиям теоремы I.I при $T=\infty$, то в области $Q_{t_0,t}=\Omega\times(t_0,t)$, где $t>t_0>0$, решение задачи (I.8)-(I.10) подчиняется неравенству

$$|u|^{(2b+\alpha)}_{Q_{t_0,t}}\le C\left(|f|^{(\alpha)}_{Q_{t_0,t}}+|u(x,t_0)|^{(2b+\alpha)}_{\Omega}+|u|^{(\alpha)}_{Q_{t_0,t}}\right) \qquad (I.14)$$

с постоянной C, не зависящей от t.

Независимость постоянной C от t легко усматривается при доказательстве неравенства (I.14) методом Шаудера. Оценки типа (I.14) использовались для исследования устойчивости решений нестационарных задач в работах [8,10].

§ 2. Разрешимость нелинейной задачи

Рассмотрим нелинейную задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+\mathfrak{A}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(x,t,u,\nabla u,\dots,\nabla_{2b}u)\\ \mathfrak{B}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)u\big|_{x\in S}=0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\end{gathered} \qquad (2.I)$$

где $\nabla_\tau u$ - вектор компонентами которого являются всевозможные производные $\mathcal{D}^\beta u_i$ порядка $|\beta|=\tau$ компонент вектора u, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ подчиняются условиям §1, а вектор f имеет вид

$$f(x,t,p^{(0)},p^{(1)},\dots,p^{(2b)})=f_0(x,t,p^{(0)},p^{(1)},\dots,p^{(k)})+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k<|\beta|\le 2b}f_j^\beta(x,t,p^{(0)},p^{(1)},\dots,p^{(k)})p_j^\beta\,,\quad 0\le k<2b$$

($p^{(\tau)}$ - вектор с компонентами p_j^β, $|\beta|=\tau$ той же размерности, что $\nabla_\tau p$).

Предположим, что вектор f_0 и матрицы f_i^β обладают следующими свойствами:

а) f_0, f_i^β определены на множестве $K_{\rho,Q_T}=$
$=\{(x,t)\in Q_T,\ |p^{(k)}|\le\rho\}$.

б) при фиксированных $(x,t)\in Q_T$ f_0,f_i^β дважды непрерывно дифференцируемы по аргументам p_i^β.

в) при фиксированных $p^r f_0$ и f_i^β, а также их производные по p_i^β принадлежат $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, $\alpha\in(0,1)$ и их нормы ограничены постоянной, не зависящей от p_i^β

г) $f_0(x,t,0,\dots,0)=\frac{\partial f_0}{\partial p_i^\beta}\Big|_{p^{(\tau)}}=0,\ f_i^\beta(x,t,0,\dots,0)=0.$

Для доказательства разрешимости задачи (2.I) и устойчивости решения нам понадобятся некоторые оценки функции

$$f(x,t,u,\dots,\nabla_{2b}u).$$

ЛЕММА 2.I. Справедливо неравенство

$$|g(x,t,u,\dots,\nabla_K u)|^{(\alpha)}_{0,Q_T}\le C_1|u|^{(\alpha+K)}_{K,Q_T}, \tag{2.2}$$

где g – какая-либо из функций $f_0, f_i^\beta, \frac{\partial f_0}{\partial p_i^\beta}$. Если $g=\frac{\partial f_i^\beta}{\partial p_j^r}$, то

$$|g(x,t,u,\dots,\nabla_K u)|^{(\alpha)}_{0,Q_T}\le C_2(|u|^{(\alpha+K)}_{K,Q_T}+1). \tag{2.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$|g(x,t,u,\dots,\nabla_K u|^{(\alpha)}_{0,Q_T}\le \sup_{t\le T} t^{\frac{\alpha}{2b}}|g(x,t,u,\dots,\nabla_K u)|_\Omega +$$

$$+\sup_{(y,\tau)\in Q_T}[g(x,t,u(y,\tau),\dots,\nabla_K u(y,\tau)]^{(\alpha)}_{Q_T}+\sup_{Q_T(y,\tau)\in Q_T}[g(y,\tau,u(x,t),\dots,\nabla_K u(x,t)]^{\alpha}_{Q_T}$$

Так как g удовлетворяет условию Липшица по p_j^r, то последний член не превосходит $C\sum_{j=0}^{K}[\nabla_j u]^{(\alpha)}_{Q_T}\le C|u|^{(K+\alpha)}_{K,Q_T}$. Первые два слагаемых правой части ограничены некоторой постоянной $C(T)$, но если $g(x,t,0,\dots,0)=0$, то из формулы

$$g(x,t,u,\dots,\nabla_K u)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{|r|\le K}\int_0^1\frac{\partial g}{\partial p_j^r}(x,t,\theta u,\dots,\theta\nabla_K u)\,d\theta\,\mathcal{D}^r u_j$$

следует, что и они оцениваются через $C|u|^{(K+\alpha)}_{K,Q_T}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Для любых $u,v\in C_S^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $|u|\le\tau,\dots,|\nabla_K u|\le\tau, |v|\le\tau,\dots,|\nabla_K v|\le\tau$, справедливо неравенство

$$|f(x,t,u,\dots,\nabla_{2b}u)-f(x,t,v,\dots,\nabla_{2b}v)|^{(\alpha)}_{S-2b,Q_T}\le$$

$$\le C(T)\{|u|^{(K+\alpha)}_{K,Q_T}|u-v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}+(|u|^{(K+\alpha)}_{K,Q_T}+|v|^{(K+\alpha)}_{K,Q_T})|u-v|^{(K+\alpha)}_{K,Q_T}+$$

$$+|v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}(|u|^{(k+\alpha)}_{k,Q_T}+|v|^{(k+\alpha)}_{k,Q_T}+1)|u-v|^{(k+\alpha)}_{k,Q_T}\}. \qquad (2.4)$$

Воспользуемся формулами

$$f_0(x,t,v,\dots,\nabla_k v)-f_0(x,t,u,\dots\nabla_k u)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\gamma|\le k}\int_0^1\frac{\partial f_0}{\partial p_i^{\gamma}}(x,t,u+\theta w,\dots,\nabla_k u+\theta\nabla_k w)d\theta\mathcal{D}^{\gamma}w_i, \qquad (2.5)$$

$$f_i^{\beta}(x,t,v,\dots,\nabla_k v)\mathcal{D}^{\beta}v_i-f_i^{\beta}(x,t,u,\dots,\nabla_k u)\mathcal{D}^{\beta}u_i=$$

$$=f_i^{\beta}(x,t,u,\dots,\nabla_k u)\mathcal{D}^{\beta}w_i+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\gamma|\le k}\int_0^1\frac{\partial f_i^{\beta}}{\partial p_j^{\gamma}}(x,t,u+\theta w,\dots,\nabla_k u+\theta\nabla_k w)d\theta\mathcal{D}^{\gamma}w_j\mathcal{D}^{\beta}v_i \qquad (2.6)$$

Из этих формул и из лемм I.I и 2.I следует, что

и $|f_0(x,t,v,\dots,\nabla_k v)-f_0(x,t,u,\dots,\nabla_k u)|^{(\alpha)}_{S-2b,Q_T}\le$ (2.7)

$$\le C(|u|^{(\alpha+k)}_{k,Q_T}+|v|^{(\alpha+k)}_{k,Q_T})|w|^{(k+\alpha)}_{k+S-2b,Q_T},$$

$$|f_i^{\beta}(x,t,v,\dots,\nabla_k v)\mathcal{D}^{\beta}v_i-f_i^{\beta}(x,t,u,\dots,\nabla_k u)\mathcal{D}^{\beta}u_i|^{(\alpha)}_{S-2b,Q_T}\le$$

$$\le C|u|^{(k+\alpha)}_{k,Q_T}|w|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}+C|v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}\sum_{j=1}^{m}\sum_{|\gamma|\le k}\int_0^1|\frac{\partial f_i^{\beta}}{\partial p_j^{\gamma}}\mathcal{D}^{\gamma}w_j|^{(\alpha)}_{0,Q_T}d\theta.$$

Подынтегральное выражение в правой части оценки с помощью легко доказываемого неравенства

$$|f(x,t)g(x,t)|^{(\alpha)}_{0,Q_T}\le|f|^{(\alpha)}_{0,Q_T}|g|^{(\alpha)}_{0,Q_T} \qquad (2.8)$$

и воспользуемся оценкой (2.8). Это дает

$$|f_i^{\beta}(x,t,v,\dots,\nabla_k v)\mathcal{D}^{\beta}v_i-f_i^{\beta}(x,t,u,\dots,\nabla_k u)\mathcal{D}^{\beta}u_i|^{(\alpha)}_{S-2b,Q_T}\le$$

$$\le C|v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}(|u|^{(\alpha+k)}_{k,Q_T}+|v|^{(\alpha+k)}_{k,Q_T}+1)|w|^{(k+\alpha)}_{k,Q_T}+$$

$$+C|u|^{(k+\alpha)}_{k,Q_T}|w|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}.$$

Из этого неравенства и из (2.7) и следует (2.4). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для всех $u,v\in C_S^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, удовлетворяющих условиям леммы,

$$|f(x,t,u,\dots,\nabla_{2b}u)-f(x,t,v,\dots,\nabla_{2b}v)|^{(\alpha)}_{S-2b,Q_T}\le$$

$$\leq \varepsilon(|u|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T} + |v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T})|u-v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}, \tag{2.9}$$

где $\varepsilon(\rho)$ - неубывающая непрерывная функция, причем $\varepsilon(0)=0$ в частности,

$$|f(x,t,v,\ldots,\nabla_{2b}v)|^{(\alpha)}_{S-2b,Q_T} \leq \varepsilon(|v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T})|v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T} \tag{2.10}$$

ЛЕММА 2.3. Предположим, что функции и удовлетворяют условиям а), б), в), г) в области $Q_\infty = \Omega\times(0,\infty)$. Тогда для любого вектора $v \in C^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, такого, что $|v|\leq \tau,\ldots,$ $|\nabla_k|\leq \tau$, справедлива оценка

$$|e^{at}f(x,t,e^{-at}v,\ldots,\nabla_{2b}e^{-at}v)|^{(\alpha)}_{Q_\infty} \leq C_\alpha(|v|^{(2b+\alpha)}_{Q_\infty})^2, \tag{2.11}$$

если $a\geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f(x,t,p^{(0)},\ldots,p^{(2b)})$ и ее производные по p_j^γ обращаются в нуль при $p_j^\gamma=0$, поэтому

$$f(x,t,p^{(0)},\ldots,p^{(2b)}) = \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{|\beta|,|\gamma|\leq 2b}\int_0^1(1-\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^\beta \partial p_j^\gamma}(x,t,\theta p^{(0)},\ldots,\theta p^{(2b)})\times p_i^\beta p_j^\gamma \tag{2.12}$$

Из этой формулы следует, что

$$e^{at}|f(x,t,e^{-at}v,\ldots,\nabla_{2b}e^{-at}v)|_\Omega \leq Ce^{-at}\sum_{|\beta|\leq 2b}|D^\beta v|^2 \leq$$

$$\leq C(|v|^{(2b+\alpha)}_{Q_\infty})^2 e^{-at}. \tag{2.13}$$

Оценим теперь полунорму

$$[e^{at}f(x,t,e^{-at}v(x,t),\ldots,e^{-at}\nabla_{2b}v(x,t))]^{(\alpha)}_\Omega \leq$$

$$\leq \sup_{y\in\Omega}[e^{at}f(x,t,e^{-at}v(y,t),\ldots,e^{-at}\nabla_{2b}v(y,t))]^{(\alpha)}_\Omega +$$

$$+ \sup_{y\in\Omega}[e^{at}f(y,t,e^{-at}v(x,t),\ldots,e^{-at}\nabla_{2b}v(x,t))]^{(\alpha)}_\Omega .$$

Первое слагаемое в правой части также оценим с помощью формулы (2.12) через $C(|v|^{(2b+\alpha)}_{Q_\infty})^2$. Для оценки второго слагаемого воспользуемся формулой

$$f(y,t,p^{(0)},\ldots,p^{(2b)}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{|\beta|\leq 2b}\int_0^1\frac{\partial f}{\partial p_i^\beta}(y,t,\theta p^{(0)},\ldots,\theta p^{(2b)})d\theta\, p_i^\beta$$

из которой следует

$$[e^{at} f(y,t,e^{-at}v(x,t),\dots,e^{-at}\nabla_{2b}v(x,t)]_{\Omega}^{(\alpha)} \le$$

$$\le c\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{|\beta|\le 2b}|D^{\beta}v_i|_{\Omega}\int_0^1[\frac{\partial f}{\partial p_i^{\beta}}(y,t,\theta e^{-at}v(x,t),\dots,\theta e^{-at}\nabla_{2b}v(x,t)]_{\Omega}^{(\alpha)}d\theta +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{|\beta|\le 2b}[D^{\beta}v_i]_{\Omega}^{(\alpha)}\int_0^1|\frac{\partial f}{\partial p_i^{\beta}}(y,t,\theta e^{-at}v(x,t),\dots,\theta e^{-at}\nabla_{2b}v(x,t)|_{\Omega}d\theta] \le$$

$$\le c(|v|_{Q_t}^{(2b+\alpha)})^2.$$

Таким образом,

$$\sup_{t>0}[e^{at} f(x,t,e^{-at}v(x,t),\dots,e^{-at}\nabla_{2b}v(x,t)]_{\Omega}^{(\alpha)} \le c(|v|_{Q_\infty}^{(2b+\alpha)})^2. \quad (2.14)$$

Переходим к оценке постоянной Гельдера по переменной функции $e^{at}F(x,t)\equiv g(x,t)$, где $F(x,t)= =f(x,t,e^{-at}v(x,t),\dots,e^{-at}\nabla_{2b}v(x,t))$. Имеем

$$g(x,t+h)-g(x,t)=[e^{a(t+h)}-e^{at}]F(x,t+h)+$$

$$+e^{at}[F(x,t+h)-F(x,t)].$$

Рассуждая, как при доказательстве оценки (2.13), можно показать, что

$$|F(x,t+h)-F(x,t)|\le c e^{-at}(|v|_{Q_\infty}^{(2b+\alpha)})^2 h^{\alpha}.$$

Учитывая (2.13), получаем

$$|g(x,t+h)-g(x,t)|\le c[(1-e^{-ah})+h^{\alpha}](|v|_{Q_\infty}^{(2b+\alpha)})^2,$$

а значит

$$\sup_{h>0}\frac{|g(x,t+h)-g(x,t)|}{h^{\alpha}}\le c_1(|v|_{Q_\infty}^{(2b+\alpha)})^2.$$

Отсюда и из (2.13),(2.14) следует (2.11). Лемма доказана.

Докажем теперь основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $S\in C^{2b+\alpha}$, матрицы A и B удовлетворяют условиям теоремы 1.1 в области Q_T, а вектор f – условиям а)–г). Существуют такие постоянные $M(T)$ и $\delta(T)$, что если $\varphi\in C^{s}(\Omega)$, где $s\in[k,2b)$, а при $k=0$ то $s\in(0,2b)$, и если $|\varphi|_{\Omega}^{(s)}<\delta(T)$ и выполняется условие согласования (1.11), то задача (2.1) имеет единственное решение в пространстве $C_s^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$ и

$$|u|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T} \leq \mathcal{M}(T)|\varphi|^{(S)}_{\Omega}.$$

Теорема справедлива и при $K=S=0$, если $f^{\beta}_{i}=0$ для $|\beta|=2b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $S>0$. Как и в теореме 6.4 [8], установим разрешимость задачи (2.I) при всех $\varphi\in C^{S}(\Omega)$, удовлетворяющих условию $|\varphi|^{(S)}_{\Omega}\leq\delta_0(T)$, с помощью принципа сжатых отображений. Возьмем в качестве $\mathcal{M}(T)$ и $\delta_0(T)$ числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\mathcal{M}(T)\geq 2C(T),\ \mathcal{M}(T)\delta_0(T)\leq\tau,\ \varepsilon(\mathcal{M}(T)\delta_0(T))\mathcal{M}(T)\leq 1,$$

$$\varepsilon(2\mathcal{M}(T)\delta_0(T))C(T)<1$$

где $C(T)$ - постоянная в неравенстве (I.I2), а $\varepsilon(\rho)$ - та же функция, что в (2.I0).

Обозначим через $\hat{C}^{2b+\alpha}_{S}(Q_T)$ множество векторов из $C^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}_{S}(Q_T)$, удовлетворяющих условию $u(x,0)=\varphi(x)$ и неравенству $|u|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}\leq\mathcal{M}(T)|\varphi|^{(S)}_{\Omega}$ В силу теоремы I.I, это множество непусто. На $\hat{C}^{2b+\alpha}_{S}(Q_T)$ определим оператор V, взяв в качестве $u=V(v)$ решение задачи (I.8)-(I.I0) с вектором $f(x,t,v,\dots,\nabla_{2b}v)$ в правой части. Этот вектор также принадлежит $\hat{C}^{2b+\alpha}_{S}(Q_T)$, так как в силу (I.I2) и (2.I0)

$$|V(v)|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}\leq C(T)(|\varphi|^{(S)}_{\Omega}+|f(x,t,v,\dots,\nabla_{2b}v)|^{(\alpha)}_{S-2b})\leq$$

$$\leq C(T)[|\varphi|^{(S)}_{\Omega}+\varepsilon(|v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T})|v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}]\leq$$

$$\leq C(T)(1+\varepsilon(\mathcal{M}(T)|\varphi|^{(S)}_{\Omega})\mathcal{M}(T))|\varphi|^{(S)}_{\Omega}\leq 2C(T)|\varphi|^{(S)}_{\Omega}\leq \tag{2.I5}$$
$$\leq\mathcal{M}(T)|\varphi|^{(S)}_{\Omega}$$

Далее, оператор V сжимающий на $\hat{C}^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}_{S}(Q_T)$, так как

$$|V(v_1)-V(v_2)|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}\leq C(T)|f(x,t,v_1,\dots,\nabla_{2b}v_1)-$$

$$-f(x,t,v_2,\dots,\nabla_{2b}v_2)|^{(\alpha)}_{S-2b,Q_T}\leq$$

$$\leq C(T)\varepsilon(2\mathcal{M}(T)\delta(T))|v_1-v_2|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}<|v_1-v_2|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_T}$$

В силу принципа сжатых отображений, в $\hat{C}^{2b+\alpha}_{S}(Q_T)$ есть единственное решение задачи (2.I). Покажем, что оно единственно в $C^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}_{S}(Q_T)$, если $|\varphi|^{(S)}_{\Omega}\leq\delta(T)$, где $\delta(T)\in(0,\delta_0(T))$ Пусть $v(x,t)\in C^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}_{S}(Q_T)$ какое либо решение задачи (2.I), а

$t_0<T$ – точная верхняя граница тех t, для которых $v(x,t)=u(x,t)$ при любом $x\in\Omega$. Вектор $w=u-v$ удовлетворяет при $t\in(t_0,T)$ соотношениям

$$\frac{\partial w}{\partial t}+A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})w=f(x,t,u+w,\dots,\nabla_{2b}u+\nabla_{2b}w)-$$
$$-f(x,t,u,\dots,\nabla_{2b}u),$$
$$B(x,t,\frac{\partial}{\partial x})w|_S=0,$$

и, кроме того, $w|_{t=0}=0$. В силу (I.I2) и (2.4), в цилиндре $Q_{t_0,t_0+\tau}=\Omega\times(t_0,t_0+\tau)$, где $t_0+\tau<T$, верна оценка

$$|w|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_{t_0,t_0+\tau}}\le C_1|w|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_{t_0,t_0+\tau}}|u|^{(k+\alpha)}_{k,Q_{t_0,t_0+\tau}}+$$
$$+C_2|w|^{(k+\alpha)}_{k,Q_{t_0,t_0+\tau}}\le C_3|w|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_{t_0,t_0+\tau}}|\varphi|^{(S)}_{\Omega}+C_2|w|^{(k+\alpha)}_{k,Q_{t_0,t_0+\tau}},\tag{2.16}$$

где постоянная C_1 от u и v не зависит и равна произведению $C(T)$ на константу C в неравенстве (2.4).

Выберем постоянные $\delta(T)$ так, чтобы

$$\delta(T)C_3\le\frac{1}{2},\quad \delta(T)\le\delta_0(T),\quad \delta(T)\le\frac{\delta_0(T)}{M(T)},$$

а число τ возьмем столь малым, чтобы $C_2|w|^{(k+\alpha)}_{k,Q_{t_0,t_0+\tau}}\le\frac{M(T)}{4}\delta(T)$

(Это можно сделать, в силу свойства 3) пространств $C^{\ell,\frac{\ell}{2b}}_{S}(Q_T)$ см. § I). Тогда при $|\varphi|^{(S)}_{\Omega}\le\delta(T)$ из (2.16) будет следовать

$$|w|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_{t_0,t_0+\tau}}\le 2C_2|w|^{(k+\alpha)}_{k,Q_{t_0,t_0+\tau}}\le\frac{1}{2}M(T)\delta(T)\le\frac{1}{2}M(T)\delta_0(T)$$

Значит, u и v при $t>t_0$ оказываются решениями задачи (2.I) совпадающими при $t=t_0$ и удовлетворяющими неравенствам

$$|u|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_{t_0,t_0+\tau}}\le M(T)\delta(T)\le M(T)\delta_0(T)$$
$$|v|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_{t_0,t_0+\tau}}\le|u|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_{t_0,t_0+\tau}}+|w|^{(2b+\alpha)}_{S,Q_{t_0,t_0+\tau}}\le$$
$$\le M(T)\delta(T)+\frac{1}{2}M(T)\delta_0(T)\le M(T)\delta_0(T),$$

причем $|u(x,t_0)|^{(S)}_{\Omega}\le M(T)\delta(T)\le\delta_0(T)$. Выше мы видели, что такие решения совпадают, но это противоречит тому, что $u\ne v$ при $t>t_0$. Тем самым теорема доказана при $S>0$.

Изложенное доказательство проходит и при $k=S=0$, но вместо оценки (I.I2) для решения задачи (2.I) мы должны пользоваться оценкой (I.13). Так как при $K=0$ вектор f предполагается не зависящим от производных $\mathcal{D}^{\beta} v_i$, $|\beta|=2b$, то

$$\sup_{\tau\le t} \tau^{1-\frac{1}{2b}} |f(x,t,v,\dots,\nabla_{2b-1}v)|_{\Omega} \le c(T)|v|_{Q_t}|v|^{(2b+\alpha)}_{0,Q_t}$$

Кроме того, из (2.4) и (2.5) следует, что для любых $u,v\in C_0^{2b+\alpha,\,1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, таких, что $|u|_{Q_T}\le\tau$, $|v|_{Q_T}\le\tau$

$$\sup_{\tau\le t} \tau^{1-\frac{1}{2b}} |f(x,t,v,\dots,\nabla_{2b-1}v)-f(x,t,u,\dots,\nabla_{2b-1}u)|_{\Omega}\le$$

$$\le c\{|u|_{Q_t}|u-v|^{(2b+\alpha)}_{0,Q_t}+(|v|^{(2b+\alpha)}_{0,Q_t}+1)(|u|_{Q_t}+|v|_{Q_t})|u-v|_{Q_t}\}.$$

Поэтому неравенства (2.8)и (2.9) остаются в силе (может быть, с другими постоянными), а значит теорема справедлива и при $S=0$.

§ 3. Устойчивость периодических и стационарных решений нелинейных параболических систем

Пусть $u_0(x,t)$ - ω-периодическое решение нелинейной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathcal{F}(x,t,u,\dots,\nabla_{2b}u)=0, \qquad (3.1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\mathcal{B}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u|_S=0 .$$

Предположим, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ являются ω -периодическими функциями t и что в результате линеаризации (3.1) на векторе $u_0(x,t)$ получается $2b$ - параболическая система, причем оператор $\mathcal{B}$ связан с ней условием дополнительности. Для нового неизвестного вектора $v=u-u_0$ система (3.1) запишется в виде $\frac{\partial v}{\partial t}-A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})v=f(x,t,v,\dots,\nabla_{2b}v)$, и вопрос об устойчивости $u_0(x,t)$ сводится к вопросу о поведении при $t\to\infty$ решений начально-краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t}-A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})v=f(x,t,v,\dots,\nabla_{2b}v), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{B}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})v|_S=0,\ v|_{t=0}=\varphi, \qquad (3.3)$$

матрица A здесь также периодически зависит от ω. Пусть $\hat{C}^S(\Omega)$ - пространство векторов $u\in C^S(\Omega)$, удовлетворяющих условиям согласования (I.11). Назовем разрешающим оператором задачи (I.8)-(I.10) оператор, сопоставляющий вектору

$\varphi \in \tilde{C}^s(\Omega)$ решение $v(x,t) = Z(t,\tau)\varphi$ задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(x,t\frac{\partial}{\partial x})v = 0 \ , \ t \geq \tau$$
$$B(x,t,\frac{\partial}{\partial x})v|_S = 0 \quad , \ v|_{t=\tau} = \varphi(x). \tag{3.4}$$

Операторы $Z(t,\tau)$ образуют полугруппу: $Z(t,s)Z(s,\tau) = Z(t,\tau)$, $\tau \leq s \leq t$; $Z(t,t) = I$ и являются ограниченными линейными операторами в пространстве $\tilde{C}^s(\Omega)$. Кроме того, из теоремы I.I следует, что при $t > \tau$ оператор $Z(t,\tau)$ действует из пространства $C^S(\Omega)$ в пространство $C^{2b+\alpha}(\Omega)$ и при всех $s_1 \in [s, 2b+\alpha]$ справедлива оценка

$$|Z(t,\tau)\varphi|_\Omega^{(s_1)} \leq \frac{C_0}{(t-\tau)^{\frac{s_1-s}{2b}}} |\varphi|_\Omega^{(s)}. \tag{3.5}$$

Оператор $Z(\omega,0)$ называется оператором монодромии. Он удовлетворяет условию $Z((K+1)\omega, K\omega) = Z(\omega,0) \equiv Z(\omega)$ при всех $K \geq 0$.

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть спектр оператора монодромии $Z(\omega)$ задачи (I.8)-(I.IO) лежит внутри единичного круга, т.е.

$$|\sigma(Z)| \leq q < 1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|Z(t,\tau)\varphi|_\Omega^{(s)} \leq C_{01} e^{-\lambda(t-\tau)} |\varphi|_\Omega^{(s)}. \tag{3.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (3.5) воспользуемся формулами Рисса

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda(\lambda I - Z(\omega))^{-1} d\lambda$$
$$Z^n(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^n(\lambda I - Z(\omega)) d\lambda. \tag{3.7}$$

При условиях теоремы в качестве контура Γ можно взять окружность $|\lambda| = q < 1$. Из (3.7) следует

$$|Z^n(\omega)\varphi|_\Omega^{(s)} \leq C' q^n |\varphi|_\Omega^{(s)}.$$

Представим оператор $Z(t,\tau)$ в виде

$$Z(t,\tau) = Z(t,n\omega)Z(n\omega,(n-1)\omega)\dots Z(\ell\omega,\tau)$$

с целыми $n, \ell > 0$ и $t - n\omega > 0, \ell\omega - \tau > 0$, откуда получим

$$|Z(t,\tau)\varphi|_\Omega^{(s)} \leq |Z(t,n\omega) Z^{n-\ell}(\omega) Z(\ell\omega,\tau)|_\Omega^{(s)} \leq$$
$$\leq C_{01} e^{-\lambda(t-\tau)} |\varphi|_\Omega^{(s)},$$

где $\lambda = -\frac{\ln q}{\omega}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняются условия теоремы 3.I, то для разрешающего оператора $Z_1(t,\tau)$ задачи типа (I.8)-(I.I0), где оператор $A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})$ заменен на $A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})+aI$, где $a<-\frac{\ln q}{\omega}$ и справедлива оценка

$$|Z_1(t,\tau)\varphi|_{\Omega}^{(s)} \le C_a e^{-\lambda_1(t-t_0)} |\varphi|_{\Omega}^{(s)}, \tag{3.8}$$

в которой $\lambda_1=\lambda-a$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполняются условия теоремы I.I при $\Phi=0$ теоремы 3.I. Тогда

$$|v|_{Q_{t_0,t}}^{(2b+\alpha)} \le C_1[|v(x,t_0)|_{\Omega}^{(2b+\alpha)}+|f|_{Q_{t_0,t}}^{(\alpha)}], \tag{3.9}$$

где C_1 не зависит от t.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи (I.8)-(I.I0) при $\Phi=0$ и $t\geq t_0$ можно записать в виде

$$v(x,t)=Z(t,t_0)v(x,t_0)+\int_{t_0}^{t} Z(t,\tau)f(x,\tau)d\tau, \tag{3.I0}$$

при помощи оценки (3.6) из (3.I0) получим

$$|v(x,t)|_{\Omega}^{(\alpha)} \le C_{01} e^{-\lambda(t-t_0)}|v(x,t_0)|_{\Omega}^{(\alpha)}+C_{01}\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)}|f(x,t)|_{\Omega}^{(\alpha)}d\tau$$

где $\lambda>0$ и, следовательно

$$|v(x,t)|_{\Omega}^{(\alpha)} \le C_2(|u(x,t_0)|_{\Omega}^{(\alpha)}+\sup_{\tau<t}|f(x,\tau)|_{\Omega}^{(\alpha)}) \tag{3.II}$$

где C_2 не зависит от t. Неравенство (3.7) вытекает из (3.II) и (I.I4).

СЛЕДСТВИЕ. Для решения задачи (I.8)-(I.I0), в которой оператор $A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})$ заменен на $A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})+aI$, $a<-\frac{\ln q}{\omega}$ справедлива оценка

$$|v|_{Q_{t,t_0}}^{(2b+\alpha)} \le C_4(a)[|v(x,t_0)|_{\Omega}^{(2b+\alpha)}+|f|_{Q_{t_0 t}}^{(\alpha)}], \tag{3.I2}$$

где $C_4(a)$ не зависит от t.

Переходим к вопросу об устойчивости решения $u_0(x,t)$ системы (3.I), или, что то же самое, нулевого решения системы (3.2), (3.3).

ТЕОРЕМА 3.3. Если спектр оператора монодролии для задачи (3.4) лежит внутри единичного круга, то при $|\varphi|_{\Omega}^{(s)}\le\rho$ где ρ - некоторое малое положительное число, задача (3.2),(3.3) имеет единственное решение $v(x,t)$ определенное при всех $t>0$, принадлежащее классу $C_S^{2b+\alpha,1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_\infty)$ и подчиняющееся неравенству

$$|v(x,t)|_{\Omega}^{(2b+\alpha)} \le C_0 e^{-\lambda t} |\varphi|_{\Omega}^{(s)}, \quad t \ge t_0 > 0 \tag{3.13}$$

Число s удовлетворяет условиям: $s > K$; $s > 0$ при $K = 0$, но если $f_i^{\beta} = 0$ при $|\beta| = 2b$ и $K = 0$, то $s \ge 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.I, решение задачи (3.2), (3.3) $v \in C_S^{2b+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_{2\omega})$ существует и удовлетворяет неравенству $|v|_{S,Q_{2\omega}}^{(2b+\alpha)} \le M|\varphi|_{\Omega}^{(s)}$, если $|\varphi|_{\Omega}^{(s)} \le \delta$ (здесь $M = M(2\omega)$, $\delta = \delta(\omega)$). Тем более

$$|v(x,\omega)|_{\Omega}^{(2b+\alpha)} \le M|\varphi|_{\Omega}^{(s)} \omega^{\frac{s-2b}{2b}} \equiv M'|\varphi|_{\Omega}^{(s)}. \tag{3.14}$$

Рассмотрим при $t > \omega$ задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t,\frac{\partial}{\partial x})v = f(x,t,v,\dots,\nabla_{2b}v),$$

$$B(x,t,\frac{\partial}{\partial x})v|_S = 0,$$

$$v|_{t=\omega} = v(x,\omega) \equiv v_0(x)$$

и докажем, что при малых v_0 существует ее решение из класса $C^{2b+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_{\omega,\infty})$, где $Q_{\omega,\infty} = \Omega \times (\omega,\infty)$. Пусть решение определено в области $Q_{\omega,T} = \Omega \times (\omega,T)$. В силу теоремы 3.2 и леммы 2.3, оно подчиняется неравенству

$$|v|_{Q_{\omega,t}}^{(2b+\alpha')} \le C_1[|v_0|_{\Omega}^{(2b+\alpha')} + C_2(|v|_{Q_{\omega,t}}^{(2b+\alpha')})^2] \tag{3.15}$$

где C_1 и C_2 – постоянные в оценках (3.9) и (2.II), $t \le T$, $\alpha' < \alpha$. Покажем, что если $|v_0|_{\Omega}^{(2b+\alpha')} \le \frac{1}{6C_1^2C_2}$, то

$$|v|_{Q_{\omega,t}}^{(2b+\alpha')} \le 2C_1|v_0|_{\Omega}^{(2b+\alpha')} \tag{3.16}$$

при всех $t \le T$. Пусть $t_1 \le T$ – точная верхняя граница тех t, для которых $|v|_{Q_{\omega,t}}^{(2b+\alpha')} \le 2C_1|v_0|_{\Omega}^{(2b+\alpha')}$.

В силу (3.15), этих t

$$|v|_{Q_{\omega,t}}^{(2b+\alpha')} \le C_1[|v_0|_{\Omega}^{(2b+\alpha')} + 2C_1C_2|v_0|_{\Omega}^{(2b+\alpha')} |v|_{Q_{\omega,t}}^{(2b+\alpha')}] \le$$

$$\le C_1|v_0|_{\Omega}^{(2b+\alpha')} + \frac{1}{3}|v|_{Q_{\omega,t}}^{(2b+\alpha')}$$

и

$$|v|_{Q_{\omega,t}}^{(2b+\alpha')} \le \frac{3}{2}C_1|v_0|_{\Omega}^{(2b+\alpha')}.$$

Так как $|v|^{(2b+\alpha')}_{Q_t}$ является непрерывной функцией t при $v \in C^{2b+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_T)$, то из полученной оценки можно заключить, что $t_1 = T$. Итак (3.I6) установлено для всех $t \leq T$. Из (2.I6) следует, что при всех

$$|v(x,t)|^{(s)}_{\Omega} \leq C_3 |v|^{(2b+\alpha')}_{\Omega} \leq 2C_1C_3|v_0|^{(2b+\alpha')}_{\Omega}. \qquad (3.I7)$$

Предположив, что $2C_1C_3|v_0|^{(2b+\alpha')}_{\Omega} \leq \delta$, мы можем с помощью теоремы 2.I построить в цилиндре $Q_{T-\varepsilon, T-\varepsilon+2\omega}$, $\forall \varepsilon > 0$ решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A v = f, \qquad Bu|_S = 0, \; v|_{t=T-\varepsilon} = v(x, T-\varepsilon).$$

из класса $C_S^{2b+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_{T-\varepsilon, T-\varepsilon+2\omega})$ В силу единственности решения, оно на самом деле принадлежит классу $C^{2b+\alpha}(Q_{T-\varepsilon, T-\varepsilon+2\omega})$. При этом, оценка (3.I6) справедлива при всех $t \leq T-\varepsilon+2\omega$ и указанное продолжение можно осуществлять неограниченно, если только

$$|v_0|^{(2b+\alpha')}_{\Omega} \leq \min\left(\frac{1}{6C_1^2C_2}, \frac{\delta}{2C_1C_3}\right).$$

В силу (3.I4), это условие выполняется при

$$|\psi|^{(s)}_{\Omega} \leq \rho \leq \frac{1}{M} \min\left(\frac{1}{6C_1^2C_2}, \frac{\delta}{2C_1C_3}\right).$$

Из неравенства (3.I6) и теоремы 2.I следует, что

$$|v|^{(2b+\alpha)}_{Q_{\omega,\infty}} \leq C_4 |v_0|^{(2b+\alpha')}_{\Omega}. \qquad (3.I7)$$

Докажем теперь неравенство (3.I3). Вектор $w = e^{at} v$; $0 < a < -\frac{\ln q}{\omega}$ является решением задачи

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - a\omega + A\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega = e^{at} f(x,t,e^{-at}w, \ldots, e^{-at}\nabla_{2b} w),$$

$$B\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right) w|_S = 0,$$

$$w|_{t=0} = v_0(x).$$

В силу следствия теоремы 3.2 и леммы 2.3, для вектора w справедлива оценка (3.I5) с другими постоянными, скажем, C_1' и C_2'. Повторяя проведенное выше рассуждение, можно показать, что при

$$\rho \leq \frac{1}{M} \min\left\{\frac{1}{6C_1^2C_2'}, \frac{\delta}{2C_1'C_3}\right\}$$

вектор w подчиняется неравенству (3.I7) и тем более (3.I3). Теорема доказана.

Теперь сформулируем теоремы о неустойчивости и о существовании инвариантных многообразий, которые доказываются примерно так же, как это сделано в работе [I]. Обозначим через $V(t)$ разрешающий оператор задачи (3.2), т.е. нелинейный оператор, сопоставляющий элементу $\varphi \in \tilde{C}^{s}(\Omega)$ решение $v = V(t)\varphi(x) \in$ $\in C_{s}^{2b+\alpha, 1+\frac{2b}{\alpha}}(Q_T)$ задачи (3.2). В дальнейшем мы будем рассматривать $V(t)$, как оператор действующий из $\tilde{C}^{s}(\Omega)$ в $C^{s}(\Omega)$

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.I и пусть спектр $\sigma(Z)$ оператора монодромии $Z(\omega)$ распадается на две замкнутые компоненты: $\sigma(Z) = \sigma_1(Z) \cup \sigma_2(Z)$ из которых $\sigma_1(Z)$ лежит в круге радиуса $\beta_1 > 1$, а $|\sigma_2(Z)| \le 1$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое n и такой элемент $\varphi \in \tilde{C}^{s}(\Omega)$, что $|\varphi|_{\Omega}^{(s)} \le \delta$, $|V(n\omega)\varphi|_{\Omega}^{(s)} \ge \varepsilon$ (ε не зависит от δ), т.е. периодическое решение будет неустойчивым.

Когда спектр оператора монодромии Z распадается на две замкнутые компоненты, как это описано в теореме 3.4, то Z можно представить в виде суммы $Z = Z_1 + Z_2$, где

$$Z_K = \frac{1}{2\pi i}\int \lambda(\lambda I - Z)^{-1} d\lambda$$

В качестве Γ_1 возьмем две окружности $|\lambda| = \beta_1$ и $|\lambda| = \beta^{(1)}$ (окружность с радиусом $\beta^{(1)}$ должна охватывать весь спектр Z), а в качестве Γ_2 – окружность $|\lambda| = \beta_2 < \beta_1$. Это разложение Z порождает разложение пространства $\tilde{C}^{s}(\Omega)$ в прямую сумму $\tilde{C}^{s}(\Omega) = \tilde{C}_1^{s}(\Omega) \dotplus \tilde{C}_2^{s}(\Omega)$, причем операторы

$$P_K = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_K} \lambda(\lambda I - Z)^{-1} d\lambda$$

являются проекторами на $\tilde{C}_K^{s}(\Omega)$, $K = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть выполнены все условия теоремы 2.I и пусть известно еще, что $\sigma(Z) = \sigma_1(Z) \cup \sigma_2(Z)$, где $|\sigma_1(Z)| < 1$ и $|\sigma_2(Z)| > 1$. Тогда в шаре $K_\varepsilon = \{\varphi : \varphi \in$ $\in \tilde{C}^{s}(\Omega), |\varphi|_{\Omega}^{(s)} \le \varepsilon\}$ достаточно малого радиуса ε существуют два многообразия $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, инвариантные относительно нелинейного оператора V, касающиеся пространств $\tilde{C}_1^{(s)}(\Omega)$ и $\tilde{C}_2^{(s)}(\Omega)$ в точке $\varphi = 0$ и обладающие следующими свойствами:

I) для $\forall \varphi \in \mathcal{Y}_2$ элементы $V^n\varphi \in \mathcal{Y}_2$ $n = 1, 2, \dots$ и $|V^n\varphi|_{\Omega}^{(s)} \to 0$ при $n \to \infty$,

2) для $\forall \Psi \in \mathcal{Y}_1$ определены отрицательные степени $V^{-n}\Psi \in \mathcal{Y}_1$ и $V^{-n}\Psi \to 0$ при $n \to \infty$,

3) если $\varphi \bar{\in} \mathcal{Y}_2$, то найдутся такое $n > 2$, что точка $V^n\varphi$ выйдет из шара K_ε.

Пусть коэффициенты матрицы A и B не зависят от и пусть $\vartheta_0(x)$ – стационарное решение системы (3.I) и удовлетворяет граничным условиям $\mathcal{B}(x,\frac{\partial}{\partial x})\vartheta_0|_S=0$, тогда исследование устойчивости решения $\vartheta_0(x)$ или что то же самое, нулевого решения системы (3.2)-(3.3) проводится при помощи таких же рассуждений, как это делалось для периодического случая.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть выполнены все условия теоремы 2.I и пусть спектр оператора $\mathcal{A}$ находится в левой полуплоскости, т.е. $Re\,\lambda \leq -\nu < 0$, то при $|\varphi|_{\Omega}^{(s)} \leq \rho$, где ρ – некоторое малое положительное число, задача (3.2)-(3.3) имеет единственное решение $\vartheta(x,t)$ проделенное при всех $t>0$, принадлежащее классу $C_s^{2b+\alpha,\,1+\frac{\alpha}{2b}}(Q_\infty)$ и подчиняющееся неравенству

$$|\vartheta(x,t)|_{\Omega}^{(2b+\alpha)} \leq c\,e^{-\lambda_0 t}|\varphi|_{\Omega}^{(s)},\quad t \geq t_0 > 0, \qquad (3.18)$$

число S, удовлетворяет условиям: $S \geq K$; $S>0$ при $K=0$ но если $f_i^{\beta}=0$ при $|\beta|=2b$ и $K=0$, $S\geq 0$.

Автор благодарен своему научному руководителю В.А.Солонникову за большую помощь при выполнении работы.

Литература

I. Л а д ы ж е н с к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А. О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики. – Зап.науч.семинаров Ленингр.отд. Мат.ин-та АН СССР, 1973, т.38, с.46-93.

2. Ю д о в и ч В.И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. – Докл.АН СССР, 1965, т.I6I, № 5, с.I037-I040.

3. Ю д о в и ч В.И. Об устойчивости автокалебаний жидкости. – Докл.АН СССР, 1970,т.195, № 3, с.574-576.

4. Ю д о в и ч В.И. Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. – Докл.АН СССР, 1970, т.195, № 2, с.292-295.

5. Д а л е ц к и й Ю.Л., К р е й н М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., "Наука", 1970.

6. N a r f s i m h e n R. On the asymptotic stability of solutions of parabolic differentiab egution. – Journ. Rat.Mech. and Anal., 1954, 3, p.303-313.

7. H a n s j ö r g K i e l h ö f e r, On the Syapunov-stability of stationary solutions of semilinear parabolic differential equations. – Journ.Diff. Eguat.,1976,22, p.193-208.

8. Б е л о н о с о в В.С., З е л е н я к Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. – НГУ, 1975, 156 с.
9. В и ш н е в с к и й М.П. Об условной асимптотической устойчивости стационарных решений параболических систем. – Динамика сплошной среды, вып.16, 1974, с.84-90.
10. Б е л о н о с о в В.С., В и ш н е в с к и й М.П. Об устойчивости стационарных решений нелинейных параболических систем. – Мат.сб., 1977, 104(146), с.534-558.
11. С о л о н н и к о в В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1965, т.83, с.3-165.
12. С о л о н н и к о в В.А. Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи. – Препринт ЛОМИ Р-2-77, Ленинград, 1977, с.3-20.
13. С о л о н н и к о в В.А., Х а ч а т р я н А.Г. Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гельдеровских нормах. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 197
14. Б е л о н о с о в В.С. Оценки решений параболических систем в гельдеровских классах с весом. – Докл.АН СССР, 1978, т.241, № 2, с.265-268.
15. В и ш н е в с к и й М.П. Периодическое и близкие к ним решения параболических систем. Динамика сплошной среды, вып.16, 1974, с.84-90.
16. С о л о н н и к о в В.А. Оценки решений нестационарной системы Навье-Стокса. – Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1973, т.38, с.153-231.