Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

Н. В. МИРОШИН

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства E^n точек $x = (x_1; \ldots; x_n)$, состоящая из конечного числа конечносвязных областей; ∂G — граница области G — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^{m+1}; $G^* \rightleftharpoons E^n \setminus \overline{G}$. В области G^* рассматривается дифференциальный оператор

$$L(x, D)\, u = \sum_{|s|,\, |t| \leqslant m} (-1)^{|s|} D^s (a_{st}(x) D^t u) \tag{1}$$

с коэффициентами $a_{st}(x)$, которые могут иметь степенной порядок вырождения при подходе к границе $\partial G \rightleftharpoons \partial G^*$ и на бесконечности.

Основная часть работы посвящена выделению главной части оператора $L(x, D)$, которая в случае невырождающего эллиптического оператора (в конечной области) соответствует членам

$$L_0(x, D) = \sum_{|s|=|t|=m} (-1)^m D^s (a_{st}(x) D^t)$$

и от которой зависит постановка краевых условий и задание условий на бесконечности. При дополнительных ограничениях на эту часть оператора (условия коэрцитивности в смысле монографии [1, гл. II, п. 9]) для оператора $L(x, D)$ ставится обобщенная первая краевая задача и доказывается ее фредгольмова разрешимость в некотором специально подобранном весовом пространстве. В случае ограниченной области такое рассмотрение первой краевой задачи проведено в работе автора [2].

Настоящая работа состоит из двух параграфов. В § 1 даются основные определения и доказываются вспомогательные утверждения, имеющие самостоятельный интерес (теоремы вложения с ε для весовых пространств). В § 2 рассматривается краевая задача.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Обозначим через $\rho(x)$ функцию класса $C^m(E^n)$, эквивалентную расстоянию от точки $x \in G^*$ до границы ∂G^* (такая функция существует, так как граница ∂G^* — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^{m+1}); $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$, $|x|^2 \rightleftharpoons x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Пусть $K_R \rightleftharpoons \{x \in E^n, |x| < R\}$, $K_R^* = E^n \setminus \overline{K}_R$ (где $\overline{K}_R = K_R \cup \partial K_R$) и пусть G_1 — такая область в E^n, что $\overline{G} \subset G_1$. В дальнейшем мы считаем, что R выбрано так, что $\overline{G}_1 \subset K_R$. Введем пространства ($1 < p < \infty$)

$$W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G) = \{u \in L_p(G_1 \setminus G), |u, W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)| < \infty\},$$

$$|u, W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)|^p = \int\limits_{G_1 \setminus G} \Big(\rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + |u|^p\Big)\, dx;$$

$$W^m_{p,\beta,\gamma}(E^n) = \{u; |u, W^m_{p,\beta,\gamma}(E^n)| < \infty\},$$

$$|u, W^m_{p,\beta,\gamma}(E^n)|^p = \int\limits_{E^n} \Big(d(x)^\beta \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + d(x)^\gamma |u|^p\Big)\, dx.$$

Здесь α, β, γ — вещественные числа, $s \rightleftharpoons (s_1; \ldots; s_n)$ — мультииндекс, $|s| \rightleftharpoons s_1 + \ldots + s_n$. Наконец, символом $\overset{\circ}{B}$ мы будем обозначать замыкание множества бесконечно дифференцируемых, финитных относительно бесконечности функций в метрике пространства B. Для получения теорем вложения с ε для введенных пространств нам понадобится

Лемма 1. А). *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, удовлетворяющие условиям*

1) $X \subset Y \subset Z$, 2) *вложение X в Y компактно. Тогда* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K(\varepsilon) > 0$ *такая, что* $\forall u \in X$

$$|u, Y| \leqslant \varepsilon |u, X| + K(\varepsilon) |u, Z|. \tag{2}$$

Б) *Пусть* 1) $X \subset Y \subset Z$, 2) *вложение X в Z компактно,* 3) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K(\varepsilon) > 0$ *такая, что* $\forall x \in X$ *имеет место* (2). *Тогда вложение X в Y компактно.*

Доказательство пункта (А) см. в работе [1, гл. 1, п. 16]. Пункт Б) приведен для полноты, в дальнейшем не используется, и поэтому доказательство не проводится (в случае специального $K(\varepsilon)$ см. [3, гл. VI]).

Лемма 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $m > k \geqslant 0$, α *и* $\alpha_1 \geqslant 0$. *Рассмотрим пространства* $W^m_{p,\alpha}(\Omega)$ *и* $W^k_{p,\alpha_1}(\Omega)$, *где* Ω — *ограниченная область в* E^n, *состоящая из конечного числа конечносвязных областей (в частности,* $\Omega \rightleftharpoons G_1 \setminus \overline{G}$). *Пусть выполняется хотя бы одно из неравенств*:

а) $m - \dfrac{\alpha}{p} > k - \dfrac{\alpha_1}{p}$,

б) $\alpha_1 > \alpha \dfrac{k}{m}$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K(\varepsilon) > 0$ *такая, что* $\forall u \in W^m_{p,\alpha}(\Omega)$

$$|u, W^k_{p,\alpha_1}(\Omega)| < \varepsilon |u, W^m_{p,\alpha}(\Omega)| + K(\varepsilon) |u, L_p(\Omega)|.$$

Доказательство. Случай (б) при $p \rightleftharpoons 2$ доказан в работе автора [4], при $1 < p < \infty$ доказательство проводится аналогично, если воспользоваться неравенством (*), приведенном в лемме 3. Докажем лемму в случае выполнения условия а).

Положим $\beta_0 = \alpha - p(m - k)$. Из условия а) получаем, что $\alpha_1 > \beta_0$ и, следовательно, $\gamma \rightleftharpoons \alpha_1 - \beta_0 > 0$. Рассмотрим сначала случай $\beta_0 < 0$. В этом случае $m - \alpha/p \rightleftharpoons k - \beta_0/p > 0$, так как $k \geqslant 0$ и мы можем применить известные теоремы вложения ([5]):

$$W^m_{p,\alpha}(\Omega) \subset W_p^{m-\frac{\alpha}{p}}(\Omega) \subset W^k_p(\Omega) \subset W^k_{p,\alpha_1}(\Omega) \subset L_p(\Omega).$$

Вложение $W_p^{m-\alpha/p}(\Omega)$ в $W_p^k(\Omega)$ компактно, так как $m - \alpha/p > k \geqslant 0$, а остальные вложения, по крайней мере, ограничены. Тогда к цепочке пространств

$$W_{p,\alpha}^m(\Omega) \subset W_{p,\alpha_1}^k(\Omega) \subset L_p(\Omega)$$

мы можем применить пункт А) леммы 1. Получаем

$$|u, W_{p,\alpha_1}^k(\Omega)| < \varepsilon |u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)| + K(\varepsilon)|u, L_p(\Omega)|.$$

Пусть теперь $\beta_0 \geqslant 0$. Тогда $W_{p,\alpha}^m(\Omega) \subset W_{p,\beta_0}^k(\Omega)$ и, следовательно, $|u, W_{p,\beta_0}^k(\Omega)| \leqslant C|u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)|$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\int_\Omega \rho(x)^{\alpha_1} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leqslant \varepsilon^\gamma \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \rho(x)^{\beta_0} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx +$$
$$+ c_1 (\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx.$$

Здесь $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ — область с границей $\partial\Omega_\varepsilon$ класса C^{m+1} такая, что $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) < 2\varepsilon$, $\operatorname{diam}\Omega = \sup(|x-y|;\ x, y \in \Omega)$. В силу компактности вложения $W_p^m(\Omega_\varepsilon)$ в $W_p^k(\Omega_\varepsilon)$ $\forall \eta > 0\ \exists K_1(\eta) > 0$ такая, что

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leqslant \eta \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K_1(\eta) \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^p dx \leqslant$$
$$\leqslant \eta \frac{C_2}{\varepsilon^\alpha} \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K_1(\eta) \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^p dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\eta C_2}{\varepsilon^\alpha} \int_\Omega \rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K_1(\eta) \int_\Omega |u|^p dx.$$

Отсюда

$$\int_\Omega \rho(x)^{\alpha_1} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx < \varepsilon^\gamma \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} \rho(x)^{\beta_0} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx +$$
$$+ C_1 (\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1} \left[\frac{\eta C_2}{\varepsilon^\alpha} |u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)|^p + K_1(\eta) |u, L_p(\Omega)|^p \right] \leqslant$$
$$\leqslant \left(C\varepsilon^\gamma + C_1 C_2 (\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1} \frac{\eta}{\varepsilon^\alpha} \right) |u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)|^p + C_1 (\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1} K_1(\eta) |u, L_p(\Omega)|^p.$$

Выбираем η так, чтобы $C\varepsilon^\gamma = (\eta/\varepsilon^\alpha) C_1 C_2 (\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1}$, переобозначаем $2C\varepsilon^\gamma \to \varepsilon^p$ и после несложных преобразований приходим к неравенству

$$|u, W_{p,\alpha_1}^k(\Omega)| < \varepsilon |u, W_{p,\alpha}^m(\Omega)| + K(\varepsilon)|u, L_p(\Omega)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $1 < p < \infty$, $m > k \geqslant 0$, и пусть выполнено одно из условий:*

а) $\beta > \theta\alpha + (1-\theta)\gamma$, *где* $\theta = k/m$;

б) $\beta + pk > \alpha + pm$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon) > 0$ *такая, что* $\forall u(x) \in \widetilde{W}_{p,\alpha,\gamma}^m(E^n)$

$$|u, W_{p,\beta,\gamma}^k(E^n)| < \varepsilon |u, W_{p,\alpha,\gamma}^m(E^n)| + K(\varepsilon)|u, L_{p,\gamma}(E^n)|.$$

Доказательство. Пусть выполнено б) и $\gamma > \alpha + pm$. В этом случае легко показать, что вложение $\widetilde{W}_{p,\alpha,\gamma}^m(E^n)$ в $\widetilde{W}_{p,\beta,\gamma}^k(E^n)$ компактно, и нужная нам оценка следует из леммы 1. Если же при условии б) $\gamma \leqslant \alpha + pm$, то

$$\theta\alpha + (1-\theta)\gamma \leqslant \theta\alpha + (1-\theta)(\alpha + pm) = \alpha + p(m-k),$$

и, следовательно, из условия б) следует выполнение условия а), т. е. достаточно доказать лемму при выполнении условия а) и при $\gamma \leqslant \alpha + pm$.

Воспользуемся известным неравенством (см. [3, гл. III, § 15], где рассматриваются гораздо более общие неравенства и имеющиеся там ссылки):

$$\int_\Omega \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{\theta}} \int_\Omega \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + \left(\varepsilon^{-\frac{1}{1-\theta}} + 1\right) \int_\Omega |u|^p dx, \qquad (*)$$

$0 < \theta = k/m < 1$ (случай $\theta = 0$, т. е. $k = 0$, очевиден и далее без оговорок отбрасывается).

Это неравенство мы рассмотрим для шара $K_1 = \{x \in E^n;\ |x| < 1\}$ и шарового слоя $\Pi_1 = \{x \in E^n,\ 1 < |x| < 2\}$. Положим в этом неравенстве $\varepsilon = \eta\lambda$. В дальнейшем у нас λ будет ограниченным параметром. Переобозначая $\eta^{1/\theta}$ снова через ε, приходим к неравенству:

$$\int_\Omega \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leqslant \varepsilon\lambda^{\frac{1}{\theta}} \int_\Omega \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + \lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} K(\varepsilon) \int_\Omega |u|^p dx.$$

Заметим, что в $K_1^* = E^n \setminus \overline{K}_1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|} < d(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{|x|}.$$

Отсюда для шарового слоя Π_1

$$\int_{\Pi_1} |x|^{-\beta} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx < C\left(\varepsilon\lambda^{\frac{1}{\theta}} \int_{\Pi_1} |x|^{-\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + \right.$$
$$\left. + K(\varepsilon)\lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} \int_{\Pi_1} |x|^{-\gamma} |u|^p dx\right).$$

Пусть $x \in \Pi_1$, $u(x) = v(Rx)$. Тогда $y = Rx \in \Pi_R$, $dx = R^{-n} dy$, $D_x^s v(Rx) = R^{|s|} D_y^s v(y)$. Приходим к неравенству $R^{\beta+pk-n} \int_{\Pi_R} |y|^{-\beta} \sum_{|s|=k} |D^s v(y)|^p dy \leqslant$

$$\leqslant C\left(\varepsilon\lambda^{\frac{1}{\theta}} R^{\alpha+pm-n} \int_{\Pi_R} |y|^{-\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s v(y)|^p dy + K(\varepsilon)\lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} R^{\gamma-n} \int_{\Pi_R} |y|^{-\gamma} |u(y)|^p dy\right).$$

Выбираем λ так, чтобы

$$\lambda^{\frac{1}{\theta}} R^{\alpha+pm-\beta-pk} = 1,$$

$$\lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} R^{\gamma-\beta-pk} = 1,$$

т. е. $\theta(\beta + pk - \alpha - pm) = (1-\theta)(\gamma - \beta - pk)$. Отсюда после простых преобразований получаем

$$\beta = \theta\alpha + (1-\theta)\gamma.$$

Кроме того, так как $\gamma \leqslant \alpha + pm$, то легко проверяется, что $\alpha + pm \geqslant \beta + pk$ достаточно для ограниченности параметра λ при всех $R \geqslant 1$. Тогда и при любом $\beta \geqslant \theta\alpha + (1-\theta)\gamma$ в Π_R выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Pi_R} d(x)^{\beta} \sum_{|s|=k} |D^s v|^p\,dx \leqslant C\left(\varepsilon \int\limits_{\Pi_R} d(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s v|^p\,dx + K(\varepsilon)\int\limits_{\Pi_R} d(x)^{\gamma}|v|^p\,dx\right).$$

Мы воспользовались тем, что при $R \geqslant 1$ $d(x) \sim |x|^{-1}$. Записывая аналогичное неравенство для шара K_1, полагая R последовательно равным 2^n, $n = 0, 1, 2 \ldots$, и суммируя полученные неравенства, получаем

$$\int\limits_{E^n} d(x)^{\beta} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p\,dx \leqslant C\Bigl(\varepsilon \int\limits_{E^n} d(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p\,dx + K(\varepsilon)\int\limits_{E^n} d(x)^{\gamma}|u|^p\,dx.$$

Отсюда следует лемма.

Пусть $r(x) \in C(E^n)$, $r(x) \equiv \alpha$ при $x \in \overline{G}_1$ и $r(x) \equiv -\beta$ при $x \in \overline{K}_R^*$. Введем пространство

$$W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*) = \{u \in L_{p,\gamma}(G^*);\ |u, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| < \infty\},$$

$$|u, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)|^p = \int\limits_{G^*}\Bigl\{\rho(x)^{r(x)} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + d(x)^{\gamma}|u|^p\Bigr\}\,dx.$$

Пусть G_2 — область с гладкой границей, промежуточная между G и G_1, т. е. $\overline{G} \subset G_2$ и $\overline{G}_2 \subset G_1$. Построим следующее разбиение единицы: $e_1(x)$, $e_2(x)$, $e_3(x)$ — функции класса $C^\infty(E^n)$, удовлетворяющие условиям:

1) $e_i(x) \geqslant 0$ $\forall x \in E^n$;

2) $e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) \equiv 1$ $\forall x \in E^n$;

3) $e_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \overline{G}_2, \\ 0, & \text{при } x \in \overline{G}_1^*, \end{cases}$

$e_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \overline{K}_{2R}^*, \\ 0, & \text{при } x \in \overline{K}_R. \end{cases}$

Положим $u_i(x) = u(x)e_i(x)$, т. е. $u = u_1 + u_2 + u_3$.

Лемма 4. Пусть $u(x) \in W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)$. *Тогда*

1) $u_1(x) \in W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)$, $u_2(x) \in W^m_p(K_{2R} \setminus G_2)$, $u_3(x) \in W^m_{p,\beta,\gamma}(K_R^*)$;

2) $|u, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| \sim |u_1, W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)| + |u_2, W^m_p(K_{2R} \setminus G_2)| + {} + |u_3, W^m_{p,\beta,\gamma}(K_R^*)|$.

Доказательство. Имеем

$$u_1 + u_2 + u_3, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| \leqslant |u_1; W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| + |u_2, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| + {} + |u_3; W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| \leqslant C\,[|u_1; W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)| + |u_2; W^m_p(K_{2R} \setminus G_2)| + {} + |u_3; W^m_{p,\beta,\gamma}(K_R^*)|].$$

С другой стороны, например, для $u_1(x)$ получаем

$$|u_1(x), W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)| = \int\limits_{G_1 \setminus G}\Bigl[\rho(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s(e_1 u)|^p + |e_1 u|^p\Bigr]dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{G_1 \setminus G}\Bigl[\rho(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + |u|^p\Bigr]dx + {}$$
$$+ C \int\limits_{G_1 \setminus G_2} \rho(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} \sum_{0<t\leqslant s} |D^t e_1(x)|^p\,|D^{s-t}u(x)|^p\,dx.$$

Поскольку

$$\max_{x \in E^n}\ \max_{|t| \leqslant m} |D^t e_1(x)|^p = M < \infty,$$

то, в силу известных теорем вложения для невесовых классов, второй интеграл оценивается величиной $C|u,\ W_p^m(C_1\setminus G_2)|^p$, а она, очевидно, не превосходит величину $C|u,\ W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)|^p$, умноженную на некоторую константу.

Таким образом, мы доказали

$$|u_1, W^m_{p,\alpha}(G_1\setminus G)| \leqslant C|u,\ W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)|.$$

Аналогично доказываются неравенства для функций $u_2(x)$ и $u_3(x)$. Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем считаем $p=2$. Перейдем к оценкам формы Дирихле оператора $L(x, D)$, т. е. формы

$$a(u, v) = \int\limits_{G^*} \sum_{|s|,\ |t| \leqslant m} a_{st}(x) D^t u \overline{D^s v}\, dx, \tag{3}$$

которая рассматривается первоначально на гладких финитных относительно бесконечности функциях. Предположим, что в $\Omega = \overline{G_1\setminus G}$ форма (3) представима в виде суммы

$$a(u,\ v) = a_1(u,\ v) + \ldots + a_r(u,\ v) \tag{4}$$

таких форм $a_j(u,\ v)$, что

$$|a_j(u,\ v)| \leqslant C_j|u,\ W^{m_j}_{2,\alpha_j}(\Omega)|\ |v,\ W^{m_j}_{2,\alpha_j}(\Omega)|, \tag{4'}$$

где $m = m_1 > m_2 > \ldots > m_r > 0$, а α_j — некоторые неотрицательные числа.

Пусть аналогично в $\overline{K}^*_R$ форма $a(u,\ v)$ представима в виде суммы

$$a(u,\ v) = a'_1(u,\ v) + \ldots + a'_k(u,\ v) \tag{5}$$

таких форм $a'_j(u,\ v)$, что

$$|a'_j(u, v)| \leqslant C'_j|u, W^{m_j}_{2,\beta_j,\gamma}(K^*_R)|\cdot|v, W^{m_j}_{2,\beta_j,\gamma}(K^*_R)|, \tag{5'}$$

где $m = m_1 > m_2 > \ldots > m_k > 0$, а β_j и γ — некоторые вещественные числа.

Дадим следующие определения:

Определение 1. *Форму $a_1(u, v)$ назовем старшей в $\Omega = \overline{G_1\setminus G}$. Далее, обозначим для удобства $m = m_1$ через l_1, α_1 через α_{l_1} и $a_1(u,v)$ через $a_{l_1}(u,v)$. Другие старшие в Ω формы определим по индукции. Пусть уже указаны старшие в Ω формы $a_{l_1}(u,\ v), \ldots, a_{l_{n-1}}(u,\ v)$ и пусть l_n — наибольшее из чисел $\{m_1; \ldots; m_r\}$, меньшее l_{n-1}, для которого одновременно выполняются неравенства*

$$l_n - \frac{1}{2}\alpha_{l_n} \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{l_i - \frac{1}{2}\alpha_{l_i}\right\},$$

$$\frac{1}{l_n}\alpha_{l_n} \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{l_i}\alpha_{l_i}\right\}.$$

Тогда форму $a_{l_n}(u,\ v)$ также назовем старшей в Ω. Если же такого l_n не найдется, то старшими в Ω будем называть только формы $a_{l_1}(u,\ v), \ldots, a_{l_{n-1}}(u,\ v)$.

Определение 2. Форму $a'_1(u, v)$ назовем старшей в K^*_R. Далее, обозначим для удобства $m = m_1$ через q_1, β_1 через β_{q_1}, $a'_1(u,v)$ через $a'_{q_1}(u,v)$. Другие *старшие формы определим по индукции. Пусть уже указанные старшие в K_R^* формы $a'_{q_1}(u, v), \ldots, a'_{q_{n-1}}(u, v)$ и пусть q_n — наибольшее из чисел $\{m_1; \ldots; m_k\}$, меньшее q_{n-1}, для которого одновременно выполняются неравенства*

$$\beta_{q_n} + 2q_n \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{\beta_{q_i} + 2q_i\},$$

$$\beta_{q_n} < \min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \left\{\beta_{q_i} \frac{q_n}{q_i} + \left(1 - \frac{q_n}{q_i}\right)\gamma\right\}.$$

Тогда форму $a'_{q_n}(u, v)$ также назовем старшей в K_R^*. Если же такого q_n не найдется, то старшими будем называть только формы $a'_{q_1}(u, v), \ldots$ $\ldots, a'_{q_n}(u, v)$.

Пусть $\{a_{l_j}(u, v)\}_{j=1}^{p}$ и $\{a'_{q_j}(u, v)\}_{j=1}^{h}$ — старшие формы в Ω и K_R^* соответственно, выбранные согласно данным выше определениям. На каждую из старших форм мы наложим условия коэрцитивности в соответствующих пространствах, т. е. $\exists \lambda_j, \lambda'_j \geqslant 0$ и $\exists \delta_j, \delta'_j > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re}\{a_{l_j}(u, u) + \lambda_j |u, L_2(\Omega)|^2\} \geqslant \delta_j |u, W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega)|^2, \tag{6}$$

$$\operatorname{Re}\{a'_{q_j}(u, u) + \lambda'_j |u, L_{2,\gamma}(K_R^*)|^2\} \geqslant \delta'_j |u, W_{2,\beta_{q_j},\gamma}^{q_j}(K_R^*)|^2. \tag{7}$$

Заметим, что $l_1 = q_1 = m$. Пусть можно выбрать форму $a_0(u, v)$ такую, что

$$a_0(u, v) \equiv a_{l_1}(u, v) \text{ в } \Omega,$$

$$a_0(u, v) \equiv a'_{q_1}(u, v) \text{ в } K_R^*,$$

и пусть $\exists r(x) \in C(E^n)$, $r(x) \equiv \alpha_{l_1}$ при $x \in \overline{\Omega}$, $r(x) \equiv -\beta_{q_1}$ при $x \in \overline{K}_R^*$, и такая что

$$\operatorname{Re}\{a_0(u, u) + \lambda' |u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} \geqslant \delta' |u, W_{2,r(x),\gamma}^{m}(G^*)|^2 \tag{8}$$

с некоторыми λ' и $\delta' > 0$.

Коэффициенты оператора $L(x, D)$ будем считать комплекснозначными, измеримыми в G^* функциями, ограниченными в $\overline{K_{2R} \setminus G_2}$. Заметим, что в других частях области G^* поведение коэффициентов $a_{st}(x)$ определено оценками (4)—(5) и (6)—(7).

Введем пространство

$$H_+ = \{u \in L_{2,\gamma}(G^*),\ |u, H_+| = \|u\|_+ < \infty\},$$

$$\|u\|_+^2 = \sum_{j=1}^{p} |u_1, W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega)|^2 + |u_2, W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|^2 + \sum_{j=1}^{h} |u_3, W_{2,\beta_{q_j},\gamma}^{q_j}(K_R^*)|^2,$$

а функции u_1, u_2, u_3 ($u \equiv u_1 + u_2 + u_3$) те же, что в лемме 4. Наконец, через $\tilde{H}_+$ мы обозначаем замыкание гладких, финитных относительно бесконечности функций в метрике H_+.

Теорема 1. *Пусть форма $a(u, v)$ на гладких, финитных относительно бесконечности функциях удовлетворяет наложенным выше условиям ((4)—(5), (6)—(8) и условию ограниченности $a_{st}(x)$ в $K_{2R} \setminus G_2$). Тогда $\exists \lambda_0 \geqslant 0$, $\delta_0 > 0$, $C_0 > 0$ такие, что для всех $u, v \in \tilde{H}_+$ выполняются оценки:*

1) $|a(u, v)| \leqslant C_0 \|u\|_+ \|v\|_+$,

2) $\operatorname{Re}\{a(u, u) + \lambda_0 |u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} \geqslant \delta_0 \|u\|_+^2$.

Доказательство. 1) Полагая $u = u_1 + u_2 + u_3$, $v = v_1 + v_2 + v_3$, получаем

$a(u, v) = a(u_1; v_1) + a(u_1; v_2) + a(u_2; v_1) + a(u_2; v_2) + a(u_2; v_3) + a(u_3; v_2) + a(u_3; v_3)$.

Оценка для $a(u_1; v_1)$ получается следующим образом. Так как носители u_1 и v_1 лежат в G_1, то имеем

$$|a(u_1; v_1)| \leqslant \sum_{j=1}^{r} |a_j(u_1; v_1)| \leqslant \sum_{j=1}^{r} C_j |u_1; W_{2,\alpha_j}^{m_j}(\Omega)| \cdot |v_1; W_{2,\alpha_j}^{m_j}(\Omega)| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{j=1}^{p} |u_1; W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega)| \cdot |v_1; W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega)|.$$

Первое и второе неравенство следуют из (4) и (4′), а последнее из определения старшей формы.

Аналогично

$$|a(u_2; v_2)| \leqslant C |u_2; W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)| \cdot |v_2; W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|,$$
$$|a(u_3; v_3)| \leqslant C \sum_{j=1}^{h} |u_3; W_{2,\beta_{q_j},\gamma}^{q_j}(K_R^*)| \cdot |v_3, W_{2,\beta_{q_j},\gamma}^{q_j}(K_R^*)|.$$

Оценим форму $a(u_1; v_2)$. Другие формы оцениваются аналогично. Для $a(u_1; v_2)$ имеем

$$a(u_1; v_2)| = \left| \int\limits_{G_1 \setminus G_2} \sum_{|s|,\, |t| \leqslant m} a_{st}(x)\, D^t u_1 \overline{D^s v_2}\, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant M \int\limits_{G_1 \setminus G_2} \sum_{|s|,\, |t| \leqslant m} |D^t u_1| \cdot |D^s v_2|\, dx \leqslant M C_1 |u_1; W_2^m(G_1 \setminus G_2)| \times$$
$$\times |v_2, W_2^m(G_1 \setminus G_2)| \leqslant C |u_1, W_{2,\alpha_{l_1}}^{l_1}(\Omega)| \cdot |v_2, W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|.$$

Отсюда уже легко получить первую из доказываемых оценок.

2) Докажем вторую оценку. Положим $a'(u, v) = a(u, v) - a_0(u, v)$. Тогда

$$\mathrm{Re}\,\{a(u, u) + \lambda |u, L_{2,j}(G^*)|^2\} = \mathrm{Re}\{a_0(u, u) + \lambda' \times |u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} +$$
$$+ \mathrm{Re}\,\{a'(u, u) + (\lambda - \lambda')|u;\ L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} \geqslant \delta' |u,\ W_{2,r(x),\gamma}^m(G^*)|^2 +$$
$$+ \mathrm{Re}\,\{a'(u, u) + (\lambda, \lambda')|u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} \geqslant \delta''(|u_1, W_{2,\alpha_{l_1}}^{l_1}(\Omega)|^2 + |u_2, W_2^m(K_{2R} \setminus$$
$$\setminus G_2)|^2 + |u_3,\ W_{2,\beta_{q_1},\gamma}^{q_1}(K_R^*)|^2) + \mathrm{Re}\{a'(u, u) + (\lambda - \lambda')|u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\}.$$

Предпоследнее неравенство следует из оценки (8), а последнее из леммы 4. Форму $a'(u, u)$ представим в виде $a'(u, u) = a'(u_1, u_1) + a'(u_1, u_2) + a'(u_2; u_1) + a'(u_2; u_2) + a'(u_2; u_3) + a'(u_3; u_2) + a'(u_3; u_3)$.

Так как форма $a'(u, v)$ не содержит членов с обеими старшими производными, то, пользуясь неравенствами

$$|D^s u_1| |D^t u_2| \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} |D^s u_1|^2 + \frac{1}{2} \eta |D^t u_2|^2,$$
$$\int\limits_{G_2 \setminus G_2} \frac{1}{\eta} |D^s u_1|^2 dx \leqslant \varepsilon \frac{1}{\eta} |u_1, W_2^m(G_1 \setminus G_2)|^2 + \frac{1}{\eta} K(\varepsilon) |u_1, L_2(G_1 \setminus G_2)^2 \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon \frac{1}{\eta} |u_1, W_{2,\alpha_{l_1}}^{l_1}(\Omega)|^2 + CK(\varepsilon) \frac{1}{\eta} |u_1, L_2(\Omega)|^2$$

при $|t| \leqslant m$ и $|s| < m$, выбирая сначала η, а затем ε достаточно малыми, легко оцениваем слагаемые $a'(u_1;\ u_2)$, $a'(u_2,\ u_1)$, $a'(u_2;\ u_2)$. Оценки для $a'(u_2;\ u_3)$ и $a'(u_3;\ u_2)$ получаем аналогично.

Для $a'(u_1;\ u_1)$ получаем

$$\operatorname{Re} a'(u_1;\,u_1) = \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Re} a_{l_j}(u_1;\,u_1) + \sum_i \operatorname{Re} a_i(u_1;\,u_1).$$

Во вторую сумму включены не старшие формы. Из определения 4 и леммы 2 следует, что для любой не старшей формы $a_i(u_1;\ u_1)$ найдется старшая форма $a_{l_i}(u_1;\ u_1)$ такая, что

$$\operatorname{Re} a_{l_i}(u_1;\ u_1) + \lambda_i\,|\,u_1,\ L_2(\Omega)\,|^2 \geqslant \delta_i\,|\,u_1;\ W_{2,\alpha l_i}^{l_i}(\Omega)\,|^2,$$

$$\operatorname{Re} a_i(u_1;\ u_1) \leqslant |\,a_i(u_1;\ u_1)\,| \leqslant C_i\,|\,u_1,\ W_{2,\alpha_i}^{m_i}(\Omega)\,|^2 \leqslant C_i\,[\varepsilon_i\,|\,u_1,\ W_{2,\alpha_{l_i}}^{l_i}(\Omega)\,|^2 + {} \\ + K(\varepsilon)\,|\,u_1,\ L_2(\Omega)\,|^2].$$

Отсюда, выбирая ε_i достаточно малыми, а параметр λ достаточно большим, получаем

$$\operatorname{Re} a'(u_1;\,u_1) \geqslant \sum_{j=2}^{p} \operatorname{Re} a_{l_j}(u_1;\,u_1) - \sum_i |\,a_i(u_1;\,u_1)\,| \geqslant \sum_{j=2}^{p} \frac{1}{2}\,\delta_j\,|\,u_1;\,W_{2,\alpha l_j}^{l_j}(\Omega)|^2 - {} \\ - \lambda\,|\,u,\ L_2(\Omega)\,|^2.$$

Аналогично оценивается слагаемое $a'(u_3;\ u_3)$. Из приведенных выше оценок слагаемых $a'(u_i;\,u_j)$ легко следует вторая оценка теоремы. Теорема доказана.

§ 2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Перейдем к постановке и решению краевой задачи. Пусть $\hat{H}_+$ — то же пространство, что и в § 1, и пусть s_0 — целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\mu - \frac{1}{2} \leqslant s_0 < \mu + \frac{1}{2},$$

где $\mu = \max\{l_j - {}^1/_2\alpha_{l_j},\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$.

Тогда у любой функции u из H_+ на границе ∂G существуют следы:

$$u\,\big|_{\partial G} = \varphi_0 \in W_2^{\mu-\frac{1}{2}}(\partial G), \ldots, \frac{\partial^{s_0-1}u}{\partial n^{s_0-1}}\Big|_{\partial G} = \varphi_{s_0-1} \in W_2^{\mu - s_0 + \frac{1}{2}}(\partial G),$$

где $n = n(\vec{x})$ — единичная внешняя нормаль к ∂G. Это легко следует из строения пространства H_+ и теорем о следах функций из весовых пространств, приведенных, например, в работе [6] (если $s_0 \leqslant 0$, то функция не имеет следов на ∂G).

Обозначим через $\hat{H}_+^0$ подпространство функций из $\hat{H}_+$ с нулевыми выписанными следами на ∂G. По пространствам $\hat{H}_+^0$ и $L_{2,\gamma}(G^*)$ построим оснащенное гильбертово пространство $\hat{H}_+^0 \subset L_{2,\gamma} \subset \hat{H}_-^0$ (относительно определения оснащенного пространства и построения $\hat{H}_-^0$ см. [7, гл. 1]). Наконец, определим класс

$$\mathfrak{M} = \{g,\ |\,a(g,\ u)\,| \leqslant C(g)\,|\,u,\ H_+\,|\} \tag{9}$$

для всякой функции $u \in \hat{H}_+^0$.

Рассмотрим следующую задачу: для заданного элемента $g \in \mathfrak{M}$ и заданного функционала $F \in \mathring{H}^0_-$ найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$a(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^0_+, \tag{10}$$

$$u - g \in \mathring{H}^0_+. \tag{11}$$

Из (9) следует, что $a(g, \varphi)$ является при фиксированном g линейным функционалом над $\mathring{H}^0_+$, следовательно, $\exists G \in \mathring{H}^0_-$ такой, что $a(g, \varphi) = < G, \varphi >$, где $<\cdot; \cdot>$ обозначает действие функционала из $\mathring{H}^0_-$ на элемент из $\mathring{H}^0_+$. Переобозначив $(u - g)$ снова через u, а$(F - G)$ снова через F, задачу (10)—(11) сводим к задаче

$$a(u, \varphi) = < F, \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^0_+, \tag{12}$$

$$u \in \mathring{H}^0_+. \tag{13}$$

Наряду с задачей (12)—(13) рассмотрим вспомогательную задачу

$$a(u, \varphi) + \lambda(u, \varphi)_{2,\gamma} = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^0_+, \tag{14}$$

$$u \in \mathring{H}^0_+, \tag{15}$$

и отвечающие задаче (14) — (15) однородную и формально сопряженные задачи:

$$a(u, \varphi) + \lambda(u, \varphi)_{2,\gamma} = 0 \quad \forall \varphi \in \widetilde{H}^0_+, \tag{16}$$

$$u \in \widetilde{H}^0_+; \tag{17}$$

$$a^+(v, \varphi) + \overline{\lambda}(v, \varphi)_{2,\gamma} = \langle \Phi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \widetilde{H}^0_+, \tag{18}$$

$$v \in \widetilde{H}^0_+; \tag{19}$$

$$a^+(v, \varphi) + \overline{\lambda}(v, \varphi)_{2,\gamma} = 0 \quad \forall \varphi \in \widetilde{H}^0_+, \tag{20}$$

$$v \in \widetilde{H}^0_+. \tag{21}$$

Здесь $(u, \varphi)_{2,\gamma}$ обозначает скалярное произведение функций в гильбертовом пространстве $L_{2,j}(G^*)$, $a^+(u, \varphi) = \overline{a(\varphi, u)}$.

Теорема 2. *Пусть форма $a(u, v)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и пусть вложение пространства $\mathring{H}^0_+$ в $L_{2,\gamma}(G^*)$ компактно. Тогда задачи (14) — (21) фредгольмовы в следующем смысле:*

1) *задача (14)—(15) разрешима для тех и только тех $F \in \mathring{H}^0_-$, которые удовлетворяют условию $< F, v > \equiv 0$ на всех решениях задачи (20)—(21);*

2) *задача (16) — (17) имеет ненулевое решение лишь для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$; $|\lambda_k| \to \infty$;*

3) *задача (20) — (21) имеет те же собственные значения, что и задача (16) — (17), причем размерности пространств решений, отвечающих одному и тому же значению параметра λ, конечны и равны.*

Доказательство теоремы 2 для случая невырождающегося эллиптического оператора хорошо известно (см., например, [7 гл. II, § 3]). В нашем случае оно проводится аналогично с использованием оценок теоремы 1 и компактности вложения $\mathring{H}^0_+$ в $L_{2,\gamma}(G^*)$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия*

$$\mu = \max\left\{l_j - \frac{1}{2}\alpha_{l_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant p\right\} > 0, \tag{22}$$

$$\gamma > \min\{\beta_{q_j} + 2q_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant h\}. \tag{23}$$

Тогда вложение $\mathring{H}_+$ в $L_{2,\gamma}(G^*)$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in \mathring{H}_+$,— такая последовательность, что $\sup_n \| u_n\|_+ < M$. Покажем, что

$$\exists \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$| w_n - w_m;\ L_{2,\gamma}(G^*) | \to 0,\quad n, m \to \infty.$$

Отсюда будет следовать лемма. Пусть $\{e_i(x)\}_{i=1}^{3}$ — разбиение единицы, построенное в § 1; рассмотрим последовательность функций $u_{1n}(x) = u_n e_1(x)$.

Тогда $u_{1n}(x) \in \bigcap_{j=1}^{p} W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega) = B_1$ и $\forall n\ | u_{1n};\ B_1 | < C_1 M$. Но вложение B_1 в $L_2(\Omega)$ компактно, так как

$$B_1 = \bigcap_{j=1}^{p} W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega) \subset W_2^{\mu}(\Omega) \subset L_2(\Omega),$$

а последнее вложение, в силу условия $\mu > 0$ и ограниченности Ω, компактно. Следовательно, существует подпоследовательность

$$\{v_{1n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{u_{1n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$| v_{1n}(x) - v_{1m}(x)\ L_2(\Omega) | \to 0,\qquad n, m \to \infty.$$

Рассмотрим $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(v_{1n} = v_n e_1(x))$. Аналогично, положим $v_{2n}(x) = v_n(x) e_2(x)$. Тогда

$$v_{2n}(x) \in W_2^{m}(K_{2R} \setminus G_2)$$

и

$$\sup_n | v_{2n},\ W_2^{m}(K_{2R} \setminus G_2) | < C_2 M.$$

В силу компактности вложения $W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)$ в $L_2(K_{2R} \setminus G_2)$ получаем

$$\exists \{h_{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{v_{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$| h_{2n} - h_{2m};\ L_2(K_{2R} \setminus G_2) | \to 0,\quad n, m \to \infty.$$

Рассмотрим, далее, последовательность $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(h_{2n}(x) = h_n(x) e_2(x))$ и заметим, что

$$h_{3n}(x) = e_3(x)\, h_n(x) \in \bigcap_{j=1}^{h} W_{2,\beta_{q_j},\gamma}^{q_j}(K_R^*) = B_3,\quad \sup_n | h_{3n},\ B_3 | < C_3 M.$$

Обозначим, далее, через $\bar{q}$ и $\beta_{\bar{q}}$ те значения q_j и β_{q_j}, на которых достигается минимум в (23). Тогда

$$B_3 \subset W_{2,\beta_{\bar{q}},\gamma}^{\bar{q}}(K_R^*) \subset L_{2,\gamma}(K_R^*),$$

а последнее вложение компактно в силу условия $\gamma > \beta_{\bar{q}} + 2\bar{q}$ (см. [8, гл. VI, с. 301—302]). Отсюда

$$\exists \{w_{3n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{h_{3n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$| v_{3n} - v_{3m},\ L_{2,\gamma}(K_R^*) | \to 0,\qquad n, m \to \infty.$$

Тогда для последовательности $\{w_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

$$| w_n - w_m,\ L_{2,\gamma}(G^*) | \leqslant C\{| w_{1n} - w_{1m},\ L_2(\Omega) | + | w_{2n} - w_{2m},\ L_2(K_{2R} \setminus G_2) | + | w_{3n} - w_{3m},\ L_{2,\gamma}(K_R^*) |\} \to 0,$$

так как каждый член справа стремится к нулю при n и $m \to \infty$. Лемма доказана.

В качестве следствия леммы 5 и теоремы 2 для задачи (12) — (13) получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и леммы* 5. *Тогда для задачи* (12)—(13) *имеет место следующая альтернатива: либо однородная задача*

$$a(u, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \widetilde{H}^0_+, \tag{24}$$

$$u \in \widetilde{H}^0_+ \tag{25}$$

имеет ненулевое решение, либо задача (12)—(13) *разрешима и притом однозначно при любом* $F \in \widetilde{H}^0_-$. *Если задача* (24)—(25) *имеет ненулевое решение, то задача* (12)—(13) *разрешима для тех и только тех* $F \in \widetilde{H}^0_-$, *которые удовлетворяют условию* $\langle F, v\rangle \equiv 0$ *на всех решениях задачи*

$$a^+(v, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \widetilde{H}^0_+,$$

$$v \in \widetilde{H}^0_+.$$

Отметим, что идея использования норм весовых пространств для оценки формы Дирихле оператора Лапласа в неограниченной области впервые реализована Л. Д. Кудрявцевым в работе [9] (см. также имеющуюся там библиографию). Внешние краевые задачи для полигармонического оператора рассмотрены В. И. Половинкиным [10] (см. также монографию [8] и имеющиеся там ссылки).

В заключение рассмотрим один простой пример указанной схемы. Пусть $L(x, D)$ равен сумме двух вырождающихся полигармонических операторов:

$$L(x, D) = L_m(x, D) + L_k(x, D),$$

т. е. операторов, которым соответствуют формы Дирихле вида

$$a(u, v) = a_m(u, v) + a_k(u, v) = \int_{G^*} \Big(\sum_{|s|=|t|=m} a_{st}(x) D^t u \overline{D^s v} \Big) dx +$$

$$+ \int_{G^*} \Big(\sum_{|s|=|t|=K} b_{st}(x) D^t u \overline{D^s v} \Big) dx. \tag{26}$$

Будем считать, что коэффициенты $a_{st}(x)$ и $b_{st}(x)$ являются комплекснозначными, измеримыми в G^* функциями, и пусть для $x \in G_1$ ($\overline{G} \subset G_1$)

$$\max_{|s|=|t|=m} |a_{st}(x)| \leqslant M_1 (\rho(x))^{\alpha}, \qquad \max_{|s|=|t|=K} |b_{st}(x)| \leqslant M_2 (\rho(x))^{\alpha_1},$$

и вне некоторого большого шара K_R ($\overline{G}_1 \subset K_R$)

$$\max_{|s|, |t|=m} |a_{st}(x)| \leqslant N_1 (d(x))^{\beta}, \qquad \max_{|s|=|t|=K} |b_{st}(x)| \leqslant N_2 (d(x))^{\beta_1}.$$

Числа α и α_1 неотрицательные, а β и β_1 любые вещественные.

Кроме того, пусть в $K_R \setminus G$ коэффициенты $a_{st}(x)$, $b_{st}(x)$ ограничены. Пусть, наконец, $\exists$ — функция $r(x)$, непрерывная, равная α в $\overline{G}_1$ и $(-\beta)$ в K_R^*, такая, что

$$\operatorname{Re} a_m(u, u) \geqslant \delta \,|\, u, \ \omega^m_{2, r(x)} (G^*) \,|^2,$$

где

$$|u, \omega^m_{2, r(x)} (G^*)|^2 = \int_{G^*} \rho(x)^{r(x)} \sum_{|s|=m} |D^s u|^2 \, dx.$$

Из условий, наложенных на коэффициенты, очевидна оценка

$$|a_m(u, v)| \leqslant C|u, \omega^m_{2,r(x)}(G^*)| \cdot |v, \omega^m_{2,r(x)}(G^*)| \tag{27}$$

на все функции из $\omega^m_{2,r(x)}(G^*)$.

Займемся оценкой формы $a_k(u, v)$. В области G_1 (т. е., по крайней мере, на гладких функциях с носителями в G_1) имеет место оценка

$$|a_k(u, v)| \leqslant C_1|u, \omega^k_{2,\alpha_1}(G_1 \setminus G)| \cdot |v, \omega^k_{2,\alpha_1}(G_1 \setminus G)|, \tag{28}$$

а в K_R^* —

$$|a_k(u, v)| \leqslant C_2|u, \omega^k_{2,-\beta_1}(K_R^*)| \cdot |v; \omega^k_{2,-\beta_1}(K_R^*)|. \tag{29}$$

Если одновременно выполняются неравенства

$$k - \frac{1}{2}\alpha_1 \geqslant m - \frac{1}{2}\alpha, \qquad \frac{1}{k}\alpha_1 \leqslant \frac{1}{m}\alpha, \tag{30}$$

то, согласно определению 1, форму $a_k(u, v)$ мы называем старшей в $G_1 \setminus G$ и на нее накладываем дополнительное условие (в данном случае $\lambda = 0$)

$$\operatorname{Re} a_k(u, u) \geqslant \delta|u, \omega^k_{2,\alpha_1}(G_1 \setminus G)|^2, \tag{31}$$

которое должно выполняться на всех достаточно гладких функциях с носителями в $G_1 \setminus G$ с некоторой константой $\delta > 0$. Если же хотя бы одно из неравенств (30) не выполняется, то на форму $a_k(u, v)$ условие (31) не накладывается.

Аналогично, если для некоторого числа γ, удовлетворяющего неравенству

$$\gamma > \min\{\beta_1 + 2k, \ \beta + 2m\}, \tag{32}$$

одновременно выполняются неравенства

$$\beta_1 + 2k \leqslant \beta + 2m, \qquad \beta_1 < \beta\frac{k}{m} + \left(1 - \frac{k}{m}\right)\gamma, \tag{33}$$

то форму $a_k(u, v)$, согласно определению 2, мы называем старшей в K_R^* и накладываем на нее условие

$$\operatorname{Re} a_k(u, u) > \delta'|u, \omega^k_{2,-\beta_1}(K_R^*)|^2, \tag{34}$$

которое должно выполняться, по крайней мере, на всех достаточно гладких функциях с носителями, лежащими в K_R^* и финитными на бесконечности.

Если же условия (33) не выполняются, то условие (34) не накладывается. Заметим, что в данном простом случае всегда можно γ брать равным любому числу, большему $\beta + 2m$. Тогда при выполнении неравенства $\beta_1 + 2k \leqslant \beta + 2m$ второе из неравенств (33) выполняется автоматически.

Рассмотрим, например, случай, когда форма $a_k(u, v)$ является старшей в K_R^*, но не старшей в $\Omega = G_1 \setminus G$. Тогда в качестве пространства H_+ мы берем пространство с нормой

$$\|u\|_+^2 = |u_1; W^m_{2,\alpha}(\Omega)|^2 + |u_2; W^m_2(K_{2R} \setminus G_2)|^2 + |u_3; W^m_{2,\beta,\gamma}(K_R^*)|^2 + \\ + |u_3; W^k_{2,\beta_1,\gamma}(K_R^*)|^2.$$

Область G_2, шар K_{2R} и функции u_1, u_2 и u_3 строятся так же, как в § 1. Как и ранее, обозначим через $\mathring{H}_+$ замыкание финитных относительно бесконечности функций в норме пространства H_+. Условия леммы 5 (т. е. условия компактности вложения $\mathring{H}_+$ в $L_{2,\gamma}(G)$) в данном случае сводятся к требованию: $m - {}^1/_2\alpha > 0$, так как γ уже выбрано: $\gamma > \beta + 2m$. В качестве правых частей мы можем брать функционалы из пространства $\overset{\circ}{H}{}^0_-$ ($\overset{\circ}{H}{}^0_+$ — подпространство в $\overset{\circ}{H}_+$, которое состоит из функций с нулевым допустимым следом на ∂G). В качестве начальных данных мы может брать функции из пространства

$$\mathfrak{M} \supseteq \omega^m_{2,\, r(x)}(G^*) \bigcap \omega^k_{2,\, -\beta}\,(K^*_R),$$

так как из оценок (27) и (29) следует, что это пространство вложено в класс $\mathfrak{M}$.

Теперь для данной формы легко ставится краевая задача и для нее получаются результаты теорем 2 и 3. Аналогично рассматриваются другие случаи.

Очевидно, полученные результаты легко распространяются на случай нескольких полигармонических вырождающихся на границе операторов.

Автор выражает глубокую благодарность профессору П. И. Лизоркину за постановку задачи и постоянное внимание, проявляемое к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. *Мирошин Н. В.* Первая краевая задача для эллиптических операторов, вырождающихся на границе области.— ДАН СССР, 1976, 230, № 2, с. 275—278.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
4. *Мирошин Н. В.* Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. Некоторые спектральные свойства.— Диф. уравнения, 1976, 12, № 6.
5. *Успенский С. В.* О теоремах вложения функций в гладких областях.— Труды Симп. по теоремам вложения, Баку, 1966. М.: Наука, 1970.
6. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением.—ДАН СССР, 1964, 159, № 3, с. 512—515.
7. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова Думка, 1965.
8. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Решение краевых задач в неограниченных областях при конечности интеграла энергии.— Труды Симп. по теоремам вложения, Баку, 1966. М.: Наука, 1970.
10. *Половинкин В. И.* Внешняя задача Дирихле и Неймана для полигармонического уравнения.— Диф. уравнения, 1971, 7, № 1.