5. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
6. *Воронов А. А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
7. *Неймарк Ю. И.* Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива // АиТ. 1948. № 3. С. 190–203.
8. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.
9. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления/Под ред. Воронова А. А., Орурка И. А. М.: Наука, 1984.
10. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
11. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
12. *Кистлеров В. Л.* Принципы построения языка алгебраических вычислений FLAC. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1987.
13. *Hearn A. C.* REDUCE user's manuel. University of Utah, 1973.

Поступила в редакцию
21.XII.1987

ON APPLICATION OF COMPUTER ALGEBRA METHODS TO STABILITY ANALYSIS OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

Grigor'yev F. N., Kistlerov V. L.

A technique is discussed of analyzing the stability of linear dynamic systems with analytical computation.

УДК 62-505.13

О ВЛИЯНИИ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ИЗМАЙЛОВ Р. Н., КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М. А.

(Москва)

Обсуждается эффект роста чувствительности линейной системы при выборе управления, отвечающего некоторым критериям качества: при увеличении степени устойчивости, при уменьшении стоимости управления.

1. Рассматриваемая задача

Пусть изучается линейная управляемая система

(1) $$dx/dt=Ax+Bu, \quad x\in R^n, \quad u\in R^m.$$

Здесь A и B — вещественные матрицы соответствующих размерностей, причем матрица B не считается известной. Известна лишь матрица B_0, для которой

(2) $$\|B-B_0\|<\varepsilon,$$

где ε — достаточно малое число; $\|\cdot\|$ — некоторая фиксированная норма в пространстве матриц соответствующих размерностей. Поэтому при построении управления

(3) $$u=-Lx$$

(здесь L — снова вещественная матрица) приходится исследовать динами-

ку вспомогательной известной системы

$$dx/dt=Ax+B_0u, \tag{4}$$

использующей оценку B_0 матрицы B. Динамика системы (4) при управлении (3) описывается уравнением

$$dx/dt=(A-B_0L)x, \tag{5}$$

а ее устойчивость определяется расположением на комплексной плоскости собственных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ матрицы $A-B_0L$. Спектр $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ матрицы $A-B_0L$ совпадает при этом с набором $\{\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_n\}$ сопряженных чисел.

Управляемость системы (4) позволяет (см. например, [1, 2]) выбрать матрицу L (не обязательно единственным образом) так, чтобы собственные значения матрицы $A-B_0L$ принимали любые заданные значения. В частности, правильным выбором управления (3) всегда можно обеспечить асимптотическую устойчивость системы (4). Естествен вопрос о том, будет ли при этом устойчива система (1), (3)?

В частности, управление (3) может выбираться из некоторых оптимизационных соображений. Здесь снова возникает тот же вопрос: при фиксированном достаточно малом ε (в оценке (2)) оптимальное по некоторому критерию управление системой (4) обеспечивает ли хотя бы устойчивость системы (1)?

Обсуждению одного из аспектов этих вопросов посвящена настоящая статья.

2. Основные результаты

Рассмотрим семейство систем (5), зависящее от вещественного параметра $\mu\geqslant 0$. При этом считаем, что семейство спектров $\{\lambda_1(\mu),\ldots,\lambda_n(\mu)\}$ матриц $A-B_0L(\mu)$ систем (5) k-возрастает, т. е. $(n-k)$ собственных значений ограничены по модулю некоторой константой, а абсолютные величины остальных k элементов спектра неограниченно растут при $\mu\to\infty$.

Пусть $m=1$. Тогда при всех μ матрица L выбирается однозначно по $\lambda_1(\mu),\ldots,\lambda_n(\mu)$ (считаем далее, что B имеет полный ранг).

Теорема 1. Пусть $k\geqslant 2$ и спектр $\{\lambda_1(\mu),\ldots,\lambda_n(\mu)\}$ семейства матриц $A-B_0L$ системы (5) k-возрастает. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\mu_0>0$, обладающее следующим свойством. Каждому $\mu>\mu_0$ отвечает такая матрица B, что $\|B-B_0\|<\varepsilon$ и матрица $A-BL$ неустойчива.

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Оценка $k\geqslant 2$ в теореме 1 неулучшаема в следующем смысле. Можно указать (при $k=1$) такие функции $\lambda_1(\mu),\ldots,\lambda_n(\mu)$ и такие $\mu_0>0$, $\varepsilon>0$, что при всех $\mu>\mu_0$ и всех матрицах B, таких, что $\|B-B_0\|<\varepsilon$, матрица $A-BL$ устойчива. Соответствующий пример приведен в приложении.

При $m>2$ ситуация сложнее: любой спектр $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ реализуется не одной матрицей L, а семейством матриц. Однако если на элементы $\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_k}$ (абсолютные величины которых неограниченно растут) спектра наложить дополнительное условие

$$|\lambda_{i_r}/\lambda_{i_s}|<Q,\ Q>0;\quad r,s=1,\ldots,k, \tag{6}$$

то будет справедлива

Теорема 2. Пусть $k\geqslant m+1$, спектр $\{\lambda_1(\mu),\ldots,\lambda_n(\mu)\}$ семейства матриц $A-BL$ систем (5) k-возрастает и при этом выполнено условие (6). Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\mu_0>0$, обладающее следующим свойством. При

всех $\mu>\mu_0$ и любых матрицах L, таких, что спектр матрицы $A-B_0L$ совпадает с $\{\lambda_1(\mu),\ldots,\lambda_n(\mu)\}$, существует такая матрица B, что $\|B-B_0\|<\varepsilon$ и матрица $A-BL$ неустойчива.

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

3. Примеры

1. Рассмотрим систему (1) и будем выбирать матрицу L обратной связи так, чтобы переходный процесс в этой системе затухал асимптотически как можно быстрее. Для этого следует увеличивать степень устойчивости μ матрицы системы (5), т. е. добиваться того, чтобы собственные значения матрицы $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ удовлетворяли неравенствам

$$\operatorname{Re}\lambda_1\leqslant-\mu,\ldots,\qquad \operatorname{Re}\lambda_n\leqslant-\mu,\quad \mu>0.$$

Отсюда следует, что при $\mu\to\infty$ спектр $\{\lambda_1(\mu),\ldots,\lambda_n(\mu)\}$ матрицы $A-B_0L$ является n-возрастающим. Поэтому, если управление $u(t)$ скалярно ($m=1$), то применима теорема 1: увеличение степени устойчивости μ влечет возрастание ее чувствительности.

Если же $2<m<n$, то, как следует из теоремы 2, повышение степени устойчивости μ системы (5) влечет возрастание ее чувствительности тогда, когда спектр системы (5) удовлетворяет условию (6).

2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}&dx/dt=Ax+Bu,\quad x\in R^n,\quad u\in R^m,\\ &y=Cx,\quad y\in R^l,\quad x(0)=x_0\end{aligned}\tag{7}$$

и будем с помощью выбора управления (3) минимизировать функционал

$$J(L)=\int_0^\infty [y(t)^Ty(t)+u(t)^TNu(t)]\,dt,$$

где матрица N симметрична и положительно определена. Как известно [1, 2], эта задача сводится к решению соответствующего уравнения Риккати.

В ряде ситуаций представляет интерес «дешевое» управление, т. е. выбор L при «малых» матрицах N. Поведению системы и ее спектра для этого случая посвящено много работ (см., например, [2] и приведенную там библиографию).

Особенно хорошо исследован случай скалярного ($m=1$) управления, где $N=\varepsilon$, $\varepsilon\to0$. Запишем систему (7) в каноническом [1—2] виде:

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}0&1&\ldots&0&0\\0&0&\ldots&0&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\\0&0&\ldots&0&1\\-a_n&-a_{n-1}&\ldots&-a_2&-a_1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}u,\ x(0)=x_0,\tag{8}$$

$$y=Dx\tag{9}$$

и обозначим через $\varphi(\lambda)$ многочлен степени q, удовлетворяющий равенству

$$\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\vdots\\\lambda^{n-1}\end{pmatrix}D^TD[1,-\lambda,\ldots,(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}]=\varphi(\lambda)\varphi(-\lambda).$$

Тогда [2] спектр $\{\lambda_1(\varepsilon),\ldots,\lambda_n(\varepsilon)\}$ ведет себя (при $\varepsilon\to 0$) следующим образом: q элементов множества $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ стремятся к корням многочлена $\varphi(\lambda)$, а остальные $n-q$ стремятся к числам

$$\varepsilon^{-1/(n-k)}\exp\left[\frac{i\pi}{2(n-k)}(n-k+1+2\nu)\right],\qquad \nu=0,1,\ldots,n-k-1.$$

Из теоремы 1 следует, что при $q\leqslant n-2$ уменьшение «стоимости» управления (когда $\mu=1/\varepsilon\to\infty$) влечет возрастание чувствительности системы. Именно для этого случая (при $n=2$) в [3, 4] были приведены примеры роста чувствительности. Отметим, что неравенство $q\leqslant n-2$ выполнено, если наблюдаемый сигнал $y(t)$ зависит не более, чем от $(n-2)$ производных переменной x_1 (если система (7) имеет канонический вид (8)–(9)).

При $m>2$ также, для некоторых ситуаций, может происходить потеря устойчивости при «уменьшении» матрицы N. Именно, положим $G(\lambda)=D^TD(\lambda E-A)^{-1}BN^{-1/2}$ и будем умножать N на ε^2, где $\varepsilon\to 0$. Пусть ранг $G(\lambda)$ над $R[\lambda]$ равен r и ранг DB равен r. Тогда [2] $(n-r)$ собственных значений матрицы $A-BL$ стремятся (при $\varepsilon\to 0$) к $(n-r)$ корням некоторого многочлена, а прочие r корней асимптотически стремятся к $-\varepsilon^{-1}\nu_i$, где ν_i — это положительные собственные значения матрицы $N^{-1/2}B^TD^TDBN^{-1/2}$. Если $r\geqslant m+1$, то выполнено условие (6) и применима теорема 2: чувствительность системы возрастает при $\varepsilon\to 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Поскольку все нормы в пространстве матриц эквивалентны, достаточно доказать теорему в одной из них. Приведем систему (5) к каноническому виду (8) и нормой матрицы будем называть наибольшее из абсолютных значений ее элементов.

Считаем, без нарушения общности, что k-возрастание спектров $\{-\lambda_1(\mu),\ldots,-\lambda_n(\mu)\}$ семейства матриц $A-BL(\mu)$ происходит следующим образом:

$$|\lambda_n(\mu)|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_{n-k+1}(\mu)|=\mu>R\geqslant|\lambda_{n-k}(\mu)|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_1(\mu)|, \tag{П.1}$$

где $\operatorname{Re}\lambda_i>0$ при $i=1,\ldots,n$. Положим

$$S_l^r(\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_l})=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n\\ \{i_1,\ldots,i_r\}\in\{j_1,\ldots,j_l\}}}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}.$$

Если $l=n$, то вместо $S_n^r(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ будем писать S_n^r. Считаем, что $S_l^0(\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_l})=1$ и $S_l^m(\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_l})=0$ при $m<0$ и при $m>l$. Строка параметров обратной связи имеет вид

$$L=(S_n^n-a_n,\ldots,S_n^1-a_1),$$

причем $S_n^i>0$ при $i=1,\ldots,n$. Положим $B^T=(0,\ldots,0,-\varepsilon,0,\ldots,0,1)$, где $(-\varepsilon)$ стоит на k-м месте справа. Тогда в силу (8) характеристический многочлен матрицы $A-BL$ имеет вид

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+(S_n^1-\varepsilon S_n^k+\varepsilon a_k)\lambda^{n-1}+\ldots \tag{П.2}$$

Оценим коэффициент φ_{n-1} при λ^{n-1}. Из (П.1) следует оценка

$$|S_n^1|\leqslant(n-k)R+k|\lambda_n|. \tag{П.3}$$

Из определения $S_l^r(\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_l})$ вытекает равенство

$$S_n^k=\sum_{i=0}^{k}S_k^{k-i}(\lambda_n,\ldots,\lambda_{n-k+1})S_{n-k}^{i}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k}).$$

Поскольку в силу (П.1) справедливы неравенства

$$|S_{n-k}^{r}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k})|\leqslant 2^{n-k}R^r;\quad r=1,\ldots,n-k,$$

$$|S_k^r(\lambda_n,\ldots,\lambda_{n-k+1})|\leqslant 2^k|\lambda_n\ldots\lambda_{n-r+1}|;\ r=1,\ldots,k,$$

то имеет место цепочка соотношений

$$|S_n^k|=|\lambda_n\ldots\lambda_{n-k+1}+\sum_{i=1}^{k}S_k^{k-i}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k+1})S_{n-k}^{i}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k})|\geqslant$$

$$\geqslant|\lambda_n\ldots\lambda_{n-k+1}|-2^nR|\lambda_n\ldots\lambda_{n-k+2}|-\ldots-2^nR^{n-k+1}\geqslant|\lambda_n\ldots\lambda_{n-k+1}|/2;$$

последнее неравенство выполнено при $\mu\geqslant\mu_1>0$, где μ_1 достаточно велико. Так как $k\geqslant 2$, то $S_n^k\geqslant|\lambda_n|\mu$. Следовательно,

$$|\varphi_{n-1}|=|S_n^1-\varepsilon S_n^k+\varepsilon a_k|\leqslant(n-k)R+k|\lambda_n|+|\varepsilon a_k|-|\lambda_n|\mu<0$$

при $\mu\geqslant\mu_2>0$, где μ_2 достаточно велико. Положим $\mu_0=\max\{\mu_1,\mu_2\}$. Так как у многочлена $\varphi(\lambda)$ есть (при $\mu>\mu_0$) корень с положительной вещественной частью, то матрица $A-BL$ неустойчива. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Как и при доказательстве теоремы 1, будем доказывать теорему 2 для канонического [1] вида матриц A и B_0:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ \ldots & & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,n-1} & a_{mn}\end{pmatrix},\quad B_0=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

При этом строки $(a_{11},\ldots,a_{1n}),\ldots,(a_{m1},\ldots,a_{mn})$ матрицы A имеют номера n_1, $n_1+n_2,\ldots,n_1+\ldots+n_m=n$ соответственно (n_i – это индексы управляемости [2]), а прочие элементы матрицы A совпадают с соответствующими элементами матрицы системы (8). Матрица $B_0=(b_{ij})$ имеет единичные элементы при $(i,\ j)\in\{(n_1,\ 1),(n_1+n_2,\ 2),\ldots,(n_1+\ldots+n_m,\ m)\}$, а прочие элементы этой матрицы равны нулю. Матрица $L=(f_{ij}+a_{ij})$ выбирается так, чтобы спектр матрицы

$$A-B_0L=\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & & \ldots & & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1,n-1} & f_{1n}\\ \ldots & & \ldots & & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ f_{m1} & f_{m2} & \ldots & f_{m,n-1} & f_{mn}\end{pmatrix}$$

совпадал с множеством $\{-\lambda_1,\ldots,-\lambda_n\}$. Оценим коэффициент φ_k при λ^{n-k} характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$ матрицы $A-BL$. Он равен (с точностью до знака) сумме определителей диагонально-симметричных подматриц матрицы $A-B_0L$, имеющих размерность k. Следовательно, φ_k – это многочлен степени m от переменных $f_{11},f_{12},\ldots,f_{mn}$. Так как число диагонально-симметричных подматриц равно $C_n^m<2^n$, то φ_k состоит не более чем из 2^n мономов.

Считаем, что k-возрастание спектра $\{-\lambda_1,\ldots,-\lambda_n\}$ происходит по схеме (П.1). Тогда из доказательства теоремы 1 следует, что при $\mu\geqslant\mu_1$ справедлива оценка $|\varphi_k|\geqslant\mu^k/2$, т. е. один из мономов, входящих в φ_k, превышает по абсолютной величине число $\mu^k/2^{n+1}$. В свою очередь, один из сомножителей этого монома (обозначим его через f_{ij}) превышает по абсолютной величине число $\mu^{k/m}/2^{n+1}$. Рассмотрим

матрицу B, j-й элемент i-й строки которой на $\varepsilon \operatorname{sign} f_{ij}$ меньше соответствующего элемента матрицы B_0, а остальные элементы этих матриц совпадают. Тогда коэффициент φ_{n-1} при λ^{n-1} характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$ матрицы $A-BL$ равен $S_n^1-\varepsilon a_{ij} \operatorname{sign} f_{ij}-\varepsilon|f_{ij}|$. Поэтому $\varphi_{n-1}<0$ при $\mu\geqslant\mu_L>0$, где μ_L достаточно велико. Следовательно, матрица $A-BL$ устойчива. Теорема 2 доказана.

Неулучшаемость оценки $k\geqslant 2$ в теореме 1 вытекает из следующего предложения.

Теорема 3. Пусть $\lambda_i(\mu)=\lambda_i$ (при $i=1,\ldots,n-1$), $\lambda_n(\mu)=\mu$ при всех $\mu>0$ и пусть числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ попарно различны и не равны нулю. Тогда существуют такие $\varepsilon>0$, $\mu_0>0$, что при всех столбцах B, таких, что $\|B-B_0\|<\varepsilon$, матрица $A-B_0L$ устойчива при всех $\mu>\mu_0$.

Доказательство. Приведем систему (5) к каноническому виду (8) и будем рассматривать матрицы B следующего вида: $B^T=(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{n-1}, 1+\varepsilon_n)$, где $|\varepsilon_i|<\varepsilon$. Тогда матрица $K=A-BL$ равна

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 a_n-\varepsilon_1 S_n^n & \varepsilon_1 a_{n-1}-\varepsilon_1 S_n^{n-1}+1 & \ldots & \varepsilon_1 a_1-\varepsilon_1 S_n^1 \\ \varepsilon_2 a_n-\varepsilon_2 S_n^n & \varepsilon_2 a_{n-1}-\varepsilon_2 S_n^{n-1} & \ldots & \varepsilon_2 a_1-\varepsilon_2 S_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -(1+\varepsilon_n)(S_n^n-a_n)-a_n & -(1+\varepsilon_n)(S_n^{n-1}-a_{n-1})-a_{n-1} & \ldots & -(1+\varepsilon_n)(S_n^1-a_1)-a_1 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты d_i характеристического многочлена f матрицы $A-B_0L$ равны $g_i\mu$, где $g_i\to S_{n-1}^{i-1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$ при $\mu\to\infty$. Коэффициенты D_i характеристического многочлена F матрицы $A-BL$ совпадают (с точностью до знака) с суммой определителей диагонально-симметричных подматриц матрицы K.

Пусть подматрица S содержит часть n-й строки матрицы K. Разделим на $(1+\varepsilon_n)$ все элементы этой строки и к каждой i-й (где $i<n$) строке из S прибавим последнюю строку из S, умноженную на ε_i. Тогда определитель подматрицы S отличается от соответствующего определителя подматрицы из $A-B_0L$ не более чем на $\varepsilon\mu N$, где N – число, зависящее от $a_1,\ldots,a_n$.

Пусть подматрица S не содержит элементов n-й строки матрицы K. Разделим на ε_k (где k – это номер последней строки матрицы K, которая пересекается с S) элементы последней строки из S, а затем вычитаем полученную строку, умноженную на ε_i, из i-х строк матрицы K, пересекающихся с S. Полученный минор отличается от соответствующего минора в $A-B_0L$ не более чем на $\varepsilon\mu M$, где M – число, зависящее от $a_1,\ldots,a_n$.

Поэтому $D_i/\mu=G_i$, где $|G_i-g_i|<P\varepsilon$, $i=1,\ldots,n$, а P – некоторое число, зависящее лишь от $a_1,\ldots,a_n$. Покажем, что при малых ε и больших μ можно выбрать такой вектор $\Delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ (где $|\delta_i|<1/2$, $i=1,\ldots,n$), что

$$F(y)=(y+\lambda_1(1+\delta_1))\ldots(y+\lambda_n(1+\delta_n)). \tag{П.4}$$

Так как векторы $(D_1/\mu,\ldots,D_n/\mu)$ и $(d_1/\mu,\ldots,d_n/\mu)$ мало отличаются один от другого при малых $\varepsilon>0$, то для доказательства равенства (П.4) достаточно показать, что при больших $\mu>\mu_0$ зависимость вектора

$$W=\frac{1}{\mu}[S_n^1(\lambda_1(1+\delta_1),\ldots,\lambda_n(1+\delta_n)),\ldots,S_n^n(\lambda_1(1+\delta_1),\ldots$$
$$\ldots,\lambda_n(1+\delta_n))]$$

от $\delta_1,\ldots,\delta_n$ является невырожденной. Для этого вычислим $\det(\partial W/\partial\Delta)$ в точке $\Delta=0$ при условии $\mu>\mu_0$. Из определения величин S_l^r вытекают следующие равенства:

$$\lim_{\mu\to\infty}[\partial(S_n^k(\lambda_1(1+\delta_1),\ldots,\lambda_n(1+\delta_n))/\mu)/\partial\delta_i]=$$
$$=\lambda_i S_{n-2}^{k-2}[\lambda_i,\lambda_n],\qquad i=1,\ldots,n-1,$$
$$\lim_{\mu\to\infty}[\partial(S_n^k(\lambda_1(1+\delta_1),\ldots,\lambda_n(1+\delta_n))/\mu)/\partial\delta_n]=\lambda_i S_{n-1}^{k-1}[\lambda_n]$$

(квадратные скобки означают, что число $S_l^r[\lambda_j, \ldots]$ определяется множеством $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \setminus \{\lambda_j, \ldots\}$). Следовательно, предел искомого определителя при $\mu \to \infty$ равен произведению

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & S_{n-2}^1[\lambda_1, \lambda_n] & \ldots & S_{n-2}^{n-2}[\lambda_1, \lambda_n] \\ & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 1 & S_{n-2}^1[\lambda_{n-1}, \lambda_n] & \ldots & S_{n-2}^{n-2}[\lambda_{n-1}, \lambda_n] \\ 1 & S_{n-1}^1[\lambda_n] & S_{n-2}^2[\lambda_n] & \ldots & S_{n-1}^{n-1}[\lambda_n] \end{pmatrix}$$

и числа $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$. Поскольку числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ попарно различны и не равны нулю, то полученный определитель отличен от нуля и теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1985.
2. *Уонэм У.* Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
3. *Lehtomaki N., Sandell N., Athans M.* Robustness results in linear-quadratic gaussian based on multivariable control designs // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. AC-26. № 1. P. 75–93.
4. *Soroka E., Shaked U.* On the robustness of LQ regulators // IEEE Trans. Automat. Control. 1984. V. AC-29. № 7. P. 664–665.

Поступила в редакцию
12.XI.1987

ON THE PERFORMANCE CRITERION INFLUENCING THE SENSITIVITY OF LINEAR SYSTEMS

Izmaylov R. N., Krasnosel'skiy M. A.

The impact is discussed made by increasing sensitivity of a linear system on the choice of control which is to meet certain performance criteria with increasing stability and with decreasing control costs.