К. А. Кириллов, М. В. Носков, Вариант двумерного дискретного преобразования Хаара с узлами на Π_0-сетках, *Уфимск. матем. журн.*, 2013, том 5, выпуск 1, 56–62

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 56-62.

УДК 517.518.87

ВАРИАНТ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА С УЗЛАМИ НА Π_0-СЕТКАХ

К.А. КИРИЛЛОВ, М.В. НОСКОВ

Аннотация. Предложен вариант двумерного дискретного преобразования Хаара с 2^D узлами, образующими Π_0-сетки, связанный с треугольными частичными суммами ряда Фурье – Хаара заданной функции. Вследствие структуры Π_0-сеток вычисление коэффициентов этого дискретного преобразования основано на кубатурной формуле с 2^D узлами, точной для полиномов Хаара степеней, не превосходящих D, благодаря чему все коэффициенты $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ построенного преобразования совпадают с коэффициентами Фурье – Хаара $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ для функций, являющихся полиномами Хаара степеней не выше $D - \max\{m_1, m_2\}$ $(0 \leqslant m_1 + m_2 \leqslant d$, где $d \leqslant D)$. Стандартное двумерное дискретное преобразование Хаара с 2^D узлами таким свойством не обладает.

Ключевые слова: кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара, дискретное преобразование Хаара, Π_0-сетки.

1. Введение

Существенный интерес в вычислительной математике вызывает задача применения кубатурных формул, точных на некоторой конечной ортонормированной системе функций, к дискретному преобразованию Фурье по этой системе. Так, приложения кубатурных формул высокой тригонометрической точности к дискретному преобразованию Фурье по тригонометрической системе рассмотрены в [1].

Идея использования треугольных частичных сумм ряда Фурье заданной функции при построении дискретного преобразования Фурье, реализованная в статье [1] для случая тригонометрической системы, в настоящей работе применена к построению варианта двумерного дискретного преобразования Хаара с узлами, образующими Π_0-сетки, являющиеся сетками, узлы которых распределены достаточно равномерно – если Π_0-сетка образована 2^D узлами, то каждый двоичный прямоугольник площади 2^{-D} содержит ровно один ее узел. Благодаря указанной структуре Π_0-сеток, вычисление коэффициентов построенного в данной работе дискретного преобразования основано на кубатурной формуле с 2^D узлами, точной для полиномов Хаара степеней, не превосходящих D, вследствие чего для любой функции, являющейся полиномом Хаара степени, не выше $D - \max\{m_1, m_2\}$ $(0 \leqslant m_1 + m_2 \leqslant d$, где $d \leqslant D)$, все коэффициенты $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ построенного преобразования равны соответствующим коэффициентам Фурье – Хаара $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$. Последнее свойство отсутствует у стандартного двумерного дискретного преобразования Хаара, связанного с прямоугольными частичными суммами ряда Фурье – Хаара функции и основанного на кубатурной формуле с прямоугольной сеткой узлов, для которой степень точности Хаара равна $M = \min\{M_1, M_2\}$, где 2^{M_1} и 2^{M_2} – число индексов по каждой компоненте при построении узлов кубатурной формулы, $M_1 + M_2 = D$.

K.A. Kirillov, M.V. Noskov, A version of discrete Haar transform with nodes of Π_0-grids.

Поступила 20 декабря 2011 г.

2. Основные определения и вспомогательные утверждения

В настоящей работе используется оригинальное определение функций$\chi_{m,j}(x)$, введенное А. Хааром [2], отличное от определения этих функций из [3] в их точках разрыва.

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}$, $j/2^{m-1}$ ($m = 1, 2, \ldots,\quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$). Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1 – замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l^-_{m,j}$ и $l^+_{m,j}$ соответственно.

Двоичными прямоугольниками назовем множества $l_{m_1,j_1} \times l_{m_2,j_2}$, замкнутыми двоичными прямоугольниками – замыкания этих множеств, $m_n = 1, 2, \ldots,\quad j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n-1}$, $n = 1, 2$.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \ldots,\quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^-_{m,j}, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^+_{m,j}, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m,j}}, \\ \frac{1}{2}[\chi_{m,j}(x-0) + \chi_{m,j}(x+0)], & \text{если } x \text{ — внутренняя} \\ & \text{точка разрыва,} \end{cases}$$

$\overline{l_{m,j}} = [\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}]$, $\quad m = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_{0,1}(x) \equiv 1$, которую отнесем к нулевой группе.

В двумерном случае полиномами Хаара степени d будем называть линейные комбинации с вещественными коэффициентами функций$\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)$, называемых мономами Хаара ($m_1 + m_2$ – степень монома), $m_1 + m_2 = 0, 1, \ldots, d$, $j_n \in \Lambda_{m_n}$,

$$\Lambda_{m_n} = \begin{cases} \{1, \ldots, 2^{m_n-1}\}, & \text{если } m_n > 0, \\ \{1\}, & \text{если } m_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$n = 1, 2$, при этом хотя бы один из коэффициентов при мономах Хаара степени d должен быть отличен от нуля.

Пусть функция $f(x_1, x_2)$ определена и суммируема на $[0, 1]^2$. Будем говорить, что кубатурная формула

$$I[f] = \int_0^1\!\!\int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = Q[f] \tag{2}$$

с узлами $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0, 1]^2$ и коэффициентами при узлах $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ обладает d-свойством Хаара, или просто – d-свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P(x_1, x_2)$ степени, не превосходящей d, т. е.

$$Q[P] = I[P].$$

Кубатурную формулу (2) будем называть формулой степени точности d Хаара, или d-точной, если она обладает d-свойством, но $(d + 1)$-свойством не обладает.

Имеет место

Предложение 1. [4] *Если кубатурная формула (2) обладает d-свойством, то число ее узлов N удовлетворяет неравенству*

$$N \geqslant 2^{d-1} + 1.$$

В [3] используется определение функций Хаара, отличное от определения этих функций, введенного в [2], – в [3] функции Хаара считаются непрерывными справа в точках разрыва, в связи с чем двоичные промежутки $l_{m,j}$ $(m = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1})$ определяются следующим образом:

$$l_{m,j} = \begin{cases} [0,1], & \text{если } m = 1,\ j = 1, \\ [\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}), & \text{если } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ j \in \{1, 2, \ldots, 2^{m-1} - 1\}, \\ [1 - \frac{1}{2^{m-1}}, 1], & \text{если } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ j = 2^{m-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Будем говорить, что 2^d точек единичного квадрата $[0,1]^2$ образуют Π_0-сетку, если каждый двоичный прямоугольник $l_{m_1,j_1} \times l_{m_2,j_2}$ площади 2^{-d} $(m_1 + m_2 = d + 2,\ j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n-1},$ $n = 1, 2)$, являющийся декартавым произведением двоичных промежутков, определенных согласно (3), содержит ровно одну из этих точек.

В [5] показано, что существуют функции $\kappa_{m,j}(x)$, являющиеся линейными комбинациями функций Хаара групп номер $0, 1, \ldots, m$, которые удовлетворяют равенству

$$\kappa_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^m & \text{при } x \in l_{m+1,j}, \\ 2^{m-1} & \text{при } x \in \overline{l_{m+1,j}} \setminus l_{m+1,j}, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m+1,j}}, \end{cases} \tag{4}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^m$.

Функции $\kappa_{m_1,j_1}(x_1)\kappa_{m_2,j_2}(x_2)$ будем называть κ-мономами степени d, где $m_1 + m_2 = d$, $j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n},\ n = 1, 2$.

Имеет место

Предложение 2. [4] *Кубатурная формула (2) обладает d-свойством, тогда и только тогда, когда она точна для всех κ-мономов степени d.*

Замечание 1. Из равенства (4) следует, что каждый замкнутый двоичный прямоугольник площади 2^{-d} является носителем некоторого κ-монома степени d, именно: $\overline{l_{m_1+1,j_1} \times l_{m_2+1,j_2}} = \operatorname{supp}\{\kappa_{m_1,j_1}(x_1)\kappa_{m_2,j_2}(x_2)\},\ m_n = 0, 1, 2, \ldots,\ j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n},\ n = 1, 2.$

Докажем

Предложение 3. *Если $K_d(x_1, x_2)$ – произвольный κ-моном степени d, то*

$$I[K_d] = \int_0^1\!\!\int_0^1 K_d(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1. \tag{5}$$

Доказательство. Из соотношения (4) следует, что $K_d(x_1, x_2) = 2^d$ во внутренних точках множества $\operatorname{supp}\{K_d\}$. Учитывая, что $\operatorname{supp}\{K_d\}$ является двоичным прямоугольником площади 2^{-d} (замечание 1), приходим к равенству (5). Предложение доказано.

Имеет место

Предложение 4. [4] *В точках непрерывности функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ $(m = 1, 2, \ldots,$ $j = 1, \ldots, 2^{m-1})$ имеет место равенство:*

$$\chi^2_{m,j}(x) = \kappa_{m-1,j}(x). \tag{6}$$

Всюду, за исключением точек, в которых функции $\chi_{k,i}(x)$ и $\chi_{m,j}(x)$ одновременно терпят разрыв (если такие точки существуют), произведение этих функций

$$\chi_{k,i}(x)\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}}\chi_{m,j}(x), & \textit{если}, l_{m,j} \subseteq l^-_{k,i}, \\ -2^{\frac{k-1}{2}}\chi_{m,j}(x), & \textit{если}, l_{m,j} \subseteq l^+_{k,i}, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{7}$$

где $m \geqslant k,\ i \neq j$ при $m = k$.

Из предложения 4 следует

Предложение 5. *Всюду, за исключением точек, в которых полиномы Хаара $P(x_1, x_2)$, $R(x_1, x_2)$ степеней, не превосходящих d, одновременно терпят разрыв (если такие точки существуют), функция $F(x_1, x_2) = P(x_1, x_2)R(x_1, x_2)$ есть полином Хаара степени, не превосходящей $2d$.*

3. Стандартный метод дискретного преобразования Хаара

Пусть $f(x_1, x_2)$ – функция, определенная и суммируемая на $[0, 1]^2$, допускающая разложение в абсолютно сходящийся ряд Фурье – Хаара:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{2} \sum_{m_n=0}^{\infty} \sum_{j_n \in \Lambda_{m_n}} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2), \tag{8}$$

где Λ_{m_n} определяется равенством (1), $n = 1, 2$.

При стандартном двумерном дискретном преобразовании Хаара устанавливается взаимно однозначное соответствие между последовательностью значений функции $f(x_1, x_2)$ в узлах $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0, 1]^2$ $(i = 1, 2, \dots, 2^D)$ и множеством коэффициентов этого преобразования $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ $(m_n = 0, 1, \dots, M_n,\ j_n \in \Lambda_{m_n},\ n = 1, 2,\ \ M_1 + M_2 = D)$ так, что полином Хаара

$$H(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{2} \sum_{m_n=0}^{M_n} \sum_{j_n \in \Lambda_{m_n}} A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2) \tag{9}$$

восстанавливает функцию $f(x_1, x_2)$ в указанных узлах:

$$H(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}),\ i = 1, 2, \dots, 2^D;$$

при этом число $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ есть кубатурная сумма в кубатурной формуле

$$\begin{aligned} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} &= \int_0^1\!\!\int_0^1 f(x_1, x_2)\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx \\ &\approx 2^{-D} \sum_{i=1}^{2^D} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})\chi_{m_1,j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2,j_2}(x_2^{(i)}) = A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}, \end{aligned} \tag{10}$$

т. е. приближенное значение коэффициента Фурье – Хаара $c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ функции $f(x_1, x_2)$, $m_n = 0, 1, \dots, M_n,\ j_n \in \Lambda_{m_n},\ n = 1, 2$. Узлы $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ $(i = 1, 2, \dots, 2^D)$, в которых вычисляются значения функции $f(x_1, x_2)$, считаются принадлежащими прямоугольной сетке

$$\{\big((2i_1 - 1)2^{-M_1-1}, (2i_2 - 1)2^{-M_2-1}\big) :\ i_n = 1, 2, \dots, 2^{M_n},\ n = 1, 2\}.$$

Таким образом, в соответствии с (9) стандартный метод двумерного дискретного преобразования Хаара предполагает множество индексов m_1, m_2 таковым, что

$$S(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{2} \sum_{m_n} \sum_{j_n \in \Lambda_{m_n}} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2) \tag{11}$$

есть прямоугольная частичная сумма ряда (8) (m_n в сумме из правой части (11) принимает значения $0, 1, \dots, M_n,\ n = 1, 2$), а вычисление приближенных значений коэффициентов

Фурье – Хаара по формуле (10) проводится на основе кубатурной формулы

$$\begin{gathered} I[f] = \int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx \\ \approx 2^{-M_1-M_2} \sum_{i_1=1}^{2^{M_1}} \sum_{i_2=1}^{2^{M_2}} f\left((2i_1-1)2^{-M_1-1}, (2i_2-1)2^{-M_2-1}\right) = Q_1[f], \end{gathered} \tag{12}$$

являющейся декартовым произведением двух квадратурных формул с 2^{M_1} и 2^{M_2} узлами.

Предложение 6. *Степень точности Хаара кубатурной формулы (12) равна* $M = \min\{M_1, M_2\}$.

Доказательство. Каждому замкнутому двоичному прямоугольнику площади 2^{-M} принадлежат ровно $2^{\max\{M_1,M_2\}}$ узлов кубатурной формулы (12), причем все эти узлы являются его внутренними точками. Тогда в соответствии с замечанием 1 и равенствами (4), (5) для каждого κ-монома $K_M(x_1, x_2)$ степени M имеем:

$$Q_1[K_M] = 2^{-M_1-M_2} \times 2^{\max\{M_1,M_2\}} \times 2^{\min\{M_1,M_2\}} = 1 = I[K_M].$$

В силу предложения 2 отсюда следует, что кубатурная формула (12) обладает M-свойством. Однако $(M+1)$-свойством она не обладает, так как в случае $M = M_1$ не точна, например, для κ-монома $\kappa_{M+1,1}(x_1)$, а в случае $M = M_2$ – для $\kappa_{M+1,1}(x_2)$. Таким образом, степень точности Хаара формулы (12) равна M. Предложение доказано.

Из предложений 5, 6 следует, что при условии $m_1 + m_2 \leqslant M$ для коэффициентов Фурье – Хаара функций $f(x_1, x_2)$, являющихся полиномами Хаара степеней, не превосходящих $M - \max\{m_1, m_2\}$, в приближенном равенстве (10) имеет место точное равенство

$$A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2} = c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2},\ j_n \in \Lambda_{m_n}, n = 1, 2, \tag{13}$$

а если $m_1 + m_2 > M$, то выполнение равенства (13) нельзя гарантировать даже для $f(x_1, x_2) \equiv \mathrm{const}$ ни при каких значениях индексов m_1, m_2.

4. Дискретное преобразование Хаара с узлами, образующими Π_0-сетки

Рассматриваемый вариант дискретного преобразования Хаара с 2^D узлами связан с треугольной частичной суммой ряда (8), т. е. с суммой (11), у которой нижние индексы m_1, m_2 входящих в нее коэффициентов ряда Фурье – Хаара удовлетворяют условию

$$m_1 + m_2 \leqslant d, \tag{14}$$

где $d \leqslant D$ – некоторое фиксированное натуральное число. Вычисление коэффициентов $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ $(m_1 + m_2 \leqslant d,\ j_n \in \Lambda_{m_n},\ n = 1, 2)$ данного дискретного преобразования проводится по формулам (10), при этом считается, что узлы $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0, 1]^2$ $(i = 1, \ldots, 2^D)$ не лежат на границах двоичных прямоугольников $l_{m_1,j_1} \times l_{m_2,j_2}$ площади 2^{-D} $(m_1 + m_2 = D + 2)$ и образуют Π_0-сетку. Таким образом, вычисление коэффициентов $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ основано на кубатурной формуле

$$I[f] = \int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx 2^{-D} \sum_{i=1}^{2^D} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = Q_2[f] \tag{15}$$

с вышеуказанным расположением узлов.

Предложение 7. *Степень точности Хаара формулы (15) равна* D.

Доказательство. Каждому замкнутому двоичному прямоугольнику площади 2^{-D} принадлежит ровно 1 узел кубатурной формулы (15), который является его внутренней точкой. Тогда в соответствии с замечанием 1 и равенствами (4), (5) для каждого κ-монома $K_D(x_1, x_2)$ степени D

$$Q_2[K_D] = 1 = I[K_D].$$

В силу предложения 2 отсюда следует, что кубатурная формула (15) обладает D-свойством. Однако $(D+1)$-свойством она не обладает, так как число узлов любой кубатурной формулы, обладающей $(D+1)$-свойством, не меньше, чем $2^D + 1$ (предложение 1). Таким образом, степень точности Хаара формулы (15) равна D. Предложение доказано.

Из предложений 5, 7 следует, что в приближенном равенстве (10) имеет место точное равенство (13) для коэффициентов Фурье – Хаара функций $f(x_1, x_2)$, являющихся полиномами Хаара степеней, не превосходящих $D - \max\{m_1, m_2\}$.

Число коэффициентов Фурье – Хаара, нижние индексы которых удовлетворяют неравенству (14), обозначим через $\widetilde{N}(d)$. Указанное число находится по формуле:

$$\widetilde{N}(d) = 2^d(0.5\,d + 1). \tag{16}$$

Значение параметра d в неравенстве (14) будем выбирать следующим образом:

$$d = \max\{p \in \mathbb{N} :\ 2^p(0.5\,p + 1) \leqslant 2^D\}. \tag{17}$$

Предложение 8. *Для каждого $D \in \mathbb{N}$ существует единственное представление вида*

$$D = 2^{r+1} + r + s - 1, \quad \text{где} \ \ s = 0, 1, \ldots, 2^{r+1},\ \ r = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Значение d, удовлетворяющее равенству (17), находится по формуле

$$d = 2^{r+1} + s - 2 = D - r - 1, \tag{19}$$

где r, s – значения параметров в представлении (18) соответствующего числа D.

Доказательство. При фиксированном $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\Delta_r = \{2^{r+1} + r + s - 1 :\ s = 0, 1, \ldots, 2^{r+1}\}$$

есть множество натуральных чисел отрезка $[2^{r+1} + r - 1, 2^{r+2} + r - 1]$, причем различным значениям $s \in \{0, 1, \ldots, 2^{r+1}\}$ соответствуют различные натуральные числа этого отрезка. Δ_{r+1} есть множество натуральных чисел отрезка $[2^{r+2} + r, 2^{r+3} + r]$, не пересекающегося с $[2^{r+1} + r - 1, 2^{r+2} + r - 1]$. Следовательно, различным упорядоченным парам (r, s) соответствуют различные значения $2^{r+1} + r + s - 1$ $(s = 0, 1, \ldots, 2^{r+1},\ r = 0, 1, 2, \ldots)$, и тогда представление (18) единственно для тех значений D, для которых оно существует. А так как

$$\bigcup_{r=0}^{\infty} \Delta_r = \bigcup_{r=0}^{\infty} \{[2^{r+1} + r - 1, 2^{r+2} + r - 1] \cap \mathbb{N}\} = \mathbb{N},$$

то существует оно для любого $D \in \mathbb{N}$.

Докажем теперь, что значение d, найденное по формуле (19), удовлетворяет условию (17).

Действительно, в соответствии с (16)

$$\widetilde{N}(2^{r+1} + s - 2) = \widetilde{N}(D - r - 1) = 2^{D-1} + 2^{D-r-2}s \leqslant 2^D,$$

так как $s \leqslant 2^{r+1}$. В то же время

$$\widetilde{N}(2^{r+1} + s - 1) = \widetilde{N}(D - r) = 2^D + 2^{D-r-1}(s + 1) > 2^D.$$

Предложение доказано.

Замечание 2. Если значение d найдено по формуле (19), то $\widetilde{N}(d) = 2^D$ только в случае $s = 2^{r+1}$, т. е. для $D = 2^{r+2} + r - 1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ В случае $s = 0$ $(D = 2^{r+1} + r - 1$, $r = 0, 1, 2, \ldots)$ $\widetilde{N}(d) = 2^{D-1}$, а случае $0 < s < 2^{r+1}$ величина $\widetilde{N}(d)/2^D \in (0.5, 1)$ и увеличивается с ростом s.

Таким образом, при $D \neq 2^{r+2} + r - 1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, в треугольной частичной сумме (11), содержащей мономы Хаара $\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)$ степеней не выше d, меньше слагаемых, чем в соответствующей прямоугольной частичной сумме, включающей мономы Хаара, для которых $m_n \leqslant M_n$, $n = 1, 2$, $M_1 + M_2 = D$. Однако, учитывая стремление к нулю коэффициентов $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ при увеличении $m_1 + m_2$, можно ожидать, что качество предлагаемого варианта дискретного преобразования Хаара не хуже, чем при использовании стандартной схемы.

В то же время предложенный в настоящей работе вариант дискретного преобразования Хаара обладает некоторыми преимуществами по сравнению со стандартным преобразованием. Во-первых, при том же числе узлов, что и в стандартном преобразовании, расширяется множество функций $f(x_1, x_2)$, для коэффициентов которых имеет место равенство (13), причем в отличии от стандартного преобразования все коэффициенты $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье – Хаара $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ для полиномов Хаара первых нескольких степеней. Во-вторых, уменьшение числа слагаемых в частичной сумме (11) приводит к уменьшению объема вычислений при аппроксимации функции указанной частичной суммой, в которой вместо коэффициентов Фурье – Хаара $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ заданной функции берутся соответствующие значения $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2} \approx c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашкин В.Б., Носков М.В., Осипов Н.Н. *Вариант дискретного преобразования Фурье с узлами на параллелепипедальных сетках* // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 41. 2001. № 3. С. 355–359.
2. A. Haar *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme* // Math. Ann. 1910. Vol. 69. P. 331–371.
3. Соболь И.М. *Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.* М.: Наука, 1969. 288 с.
4. M.V. Noskov, K.A. Kirillov *Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials* // Journal of Approximation Theory. Vol. 162. Issue 3. March 2010. P. 615–627.
5. Кириллов К.А., Носков М.В. *Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 6. С. 791–799.

Кирилл Анатольевич Кириллов,
Сибирский федеральный университет,
ул. Киренского, 26,
660074, г. Красноярск, Россия
E-mail: `KKirillov@rambler.ru`

Михаил Валерианович Носков,
Сибирский федеральный университет,
ул. Киренского, 26,
660074, г. Красноярск, Россия
E-mail: `MVNoskov@yandex.ru`