



УДК 517.958

## Детальный баланс, обращение времени и генераторы квантовых марковских полугрупп

Ф. Фаньола, В. Уманита

В статье рассматривается характеристика генераторов  $\mathcal{L}$  непрерывных по норме квантовых марковских полугрупп, допускающих представление Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблад в терминах операторов  $H, L_k$ :  $\mathcal{L}(x) = i[H, x] - (1/2) \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k)$  и удовлетворяющих квантовому условию детального равновесия относительно антиунитарного обращения времени.

Библиография: 19 названий.

**1. Введение.** Пусть  $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0} = e^{t\mathcal{L}}$  является равномерно непрерывной (т.е. непрерывной относительно нормы) полугруппой вполне положительных нормальных отображений алгебры фон Неймана  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  всех ограниченных операторов в комплексном гильбертовом пространстве  $\mathfrak{h}$  с генератором Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада [1], [2]

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k) \quad (1)$$

( $H, L_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ ), и пусть  $\rho$  является точным нормальным  $\mathcal{T}$ -инвариантным состоянием. Квантовая марковская полугруппа (КМП)  $\mathcal{T}$  удовлетворяет квантовому условию детального баланса (КДБ) в смысле Алицкого [3], [4], Фриджеро и Горини [5], Коссаковского, Фриджеро и Горини и Верри [6] относительно состояния  $\rho$ , если КМП  $\widetilde{\mathcal{T}}$ , порождаемая отображением  $\widetilde{\mathcal{L}}$ , заданным формулой (1) с заменой  $H$  на  $-H$ , совпадает с полугруппой, двойственной к  $\mathcal{T}$  относительно скалярного произведения  $\langle a, b \rangle = \text{tr}(\rho a^* b)$  на  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , заданного точным состоянием  $\rho$ ; более точно, если

$$\text{tr}(\rho \widetilde{\mathcal{T}}_t(y)x) = \text{tr}(\rho y \mathcal{T}_t(x)) \quad (2)$$

для всех  $t \geq 0$  и  $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . Это условие, очевидно, эквивалентно следующему условию, выраженному в терминах генераторов:

$$\text{tr}(\rho \widetilde{\mathcal{L}}(y)x) = \text{tr}(\rho y \mathcal{L}(x)),$$

и может быть записано в эквивалентном виде

$$\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}} = 2i[H, \cdot]. \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке проекта MIUR PRIN 2005 “Квантовые марковские полугруппы и квантовые стохастические дифференциальные уравнения”.

Приведенное выше определение может быть подвергнуто критике, поскольку оно содержит гамильтониан  $H$  в ГКСЛ-разложении генератора, не являющийся однозначно определенным. Тем не менее, можно показать, что если полугруппа  $\mathcal{T}$  имеет двойственную, удовлетворяющую (2), то можно найти выделенное ГКСЛ-разложение (мы напомним это определение ниже в разделе 2), в котором гамильтониан  $H$  коммутирует с  $\rho$  и определен единственным возможным образом с точностью до оператора, кратного тождественному, который, как нетрудно видеть, не изменяет значение коммутатора  $[H, x]$  (см. [7; предложение 4.5]). Несколько более серьезным замечанием является то, что при этом не учитывается четность наблюдаемой относительно обращения времени.

Обращение времени является антиунитарным оператором  $\theta$ , действующим в  $\mathfrak{h}$ , таким, что  $\theta^2 = \mathbb{1}$  (см. определение 2). Он определяет гомоморфизм  $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$  на  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , представляющий операцию обращения. Действительно, четные (или нечетные) наблюдаемые удовлетворяют уравнению  $\sigma(x) = x$  (или  $\sigma(x) = -x$ ). КМП  $\mathcal{T}$  удовлетворяет квантовому условию детального баланса относительно точного нормального инвариантного состояния  $\rho$  и операции обращения  $\sigma$ , если

$$\mathrm{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \mathrm{tr}(\rho \sigma(y^*) \mathcal{T}_t(\sigma(x^*)))$$

для всех  $t \geq 0$  и всех  $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ .

Очевидно, что это определение, согласно Маевскому [8], [9] (см. также [10]) и благодаря работе Агарвала [11], согласовано с предыдущим, если  $\mathcal{L}_0$ , диссипативная часть  $\mathcal{L}$ , определенная соотношением  $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L} - i[H, \cdot]$ , и гамильтониан  $H$  являются инвариантными относительно обращения времени (см. замечание после теоремы 7).

В работе [7] в представлении ГКСЛ (1) мы охарактеризовали генераторы  $\mathcal{L}$  в терминах операторов  $H$  и  $L_k$ , а также КМП, удовлетворяющие квантовым условиям детального баланса (3) в смысле Алицкого, Фриджеро и соавторов и аналогичному условию относительно симметричного скалярного произведения  $\langle a, b \rangle = \mathrm{tr}(\rho^{1/2} a^* \rho^{1/2} b)$  на  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ .

В настоящей работе мы обобщим это определение. Основной результат содержится в теореме 9, характеризующей операторные коэффициенты  $H$ ,  $L_k$  генераторов КМП, удовлетворяющих условию детального баланса и обобщающей предыдущий результат теоремы 7.3 из [7].

Хотя здесь мы рассматриваем только генераторы непрерывных по норме полугрупп, алгебраическая характеристика квантовых условий детального баланса оказывается полезной также для некоторых слабо\* непрерывных КМП с неограниченными генераторами, например, таких как генераторы, рассмотренные в [12]–[14] (см. также [15]), поскольку используемая нами алгебраическая связь между  $\{L_k\}$  и их сопряженными может рассматриваться как алгебраические тождества на достаточно широкой общей области определения.

**2. Условие детального баланса, связанное с операцией обращения времени.** Непрерывная биекция  $\theta$  на  $\mathfrak{h}$  называется *антиунитарной*, если она удовлетворяет условию

$$\langle \theta u, \theta v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{для всех } u, v \in \mathfrak{h}.$$

Для полноты изложения приведем краткое доказательство следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Операция  $\theta$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\theta$  является антилинейной;
- 2) сопряженное отображение  $\theta^*$  является антилинейным и определяется соотношением  $\langle u, \theta v \rangle = \langle v, \theta^* u \rangle$  ( $u, v \in \mathfrak{h}$ );
- 3)  $\theta\theta^* = \theta^*\theta = \mathbf{1}$ ;
- 4)  $(\theta x \theta^{-1})^* = \theta x^* \theta^{-1}$  для всех  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) Для любого  $u \in \mathfrak{h}$  рассмотрим отображение  $F_u: \mathfrak{h} \ni v \mapsto \langle u, \theta v \rangle \in \mathbb{C}$ . Поскольку очевидно, что  $F_u$  является линейным непрерывным функционалом на  $\mathfrak{h}$ , по теореме Рисса существует единственный элемент  $\theta_u \in \mathfrak{h}$  такой, что  $F_u(v) = \langle \theta_u, v \rangle$  для всех  $v \in \mathfrak{h}$ .

Поэтому положив  $\theta^* u := \theta_u$ , мы получим непрерывный антилинейный оператор на  $\mathfrak{h}$ , удовлетворяющий  $\langle u, \theta v \rangle = \langle \theta^* u, v \rangle = \overline{\langle v, \theta^* u \rangle}$  для всех  $u, v \in \mathfrak{h}$ . Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\langle w, \theta^*(\alpha u + \beta v) \rangle} &= F_{\alpha u + \beta v}(w) = \overline{\langle \alpha u + \beta v, \theta w \rangle} = \alpha \overline{\langle u, \theta w \rangle} + \beta \overline{\langle v, \theta w \rangle} \\ &= \alpha \overline{\langle w, \theta^* u \rangle} + \beta \overline{\langle w, \theta^* v \rangle} = \langle w, \overline{\alpha} \theta^* u + \overline{\beta} \theta^* v \rangle \end{aligned}$$

для всех  $u, v, w \in \mathfrak{h}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  и

$$\|\theta^* u\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle v, \theta^* u \rangle| = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle u, \theta v \rangle| \leq \|\theta\| \|u\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем оператором обращения времени на  $\mathfrak{h}$  антиунитарный оператор  $\theta$  на  $\mathfrak{h}$  такой, что  $\theta^2 = \mathbf{1}$ .

Наблюдаемая  $a$  (т.е. самосопряженный элемент из  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ ) называется четной (или нечетной), если  $\theta a \theta^{-1} = a$  ( $\theta a \theta^{-1} = -a$ , соответственно).

Очевидно, для оператора обращения времени  $\theta$  выполнено тождество  $\theta^{-1} = \theta^* = \theta$ .

ПРИМЕР 3. Пусть  $(e_j)_j$  – ортонормированный базис в  $\mathfrak{h}$ . Тогда сопряжение  $\theta$  относительно этого базиса определено соотношением

$$\theta u = \theta \left( \sum_j \langle e_j, u \rangle e_j \right) := \sum_j \overline{\langle e_j, u \rangle} e_j,$$

как некоторая операция обращения времени. В частности, в стандартном представлении Гейзенберга канонических коммутационных соотношений в одномерном случае на  $\mathfrak{h} = \ell^2(\mathbb{C})$  с помощью операторов рождения-уничтожения  $a^*$ ,  $a$ , заданных соотношениями  $a e_j = \sqrt{j+1} e_{j+1}$  ( $a e_j = \sqrt{j} e_{j-1}$ ), импульс и координата  $p = (a - a^*)/\sqrt{2}$  и  $q = (a + a^*)/\sqrt{2}$  являются нечетной и четной наблюдаемыми, соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если  $\theta$  является оператором обращения времени на  $\mathfrak{h}$ , то

$$\text{tr}(\theta x \theta^{-1}) = \text{tr}(x^*) \quad \text{для всех } x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $(e_j)_j$  является ортонормированным базисом на  $\mathfrak{h}$  и  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . Тогда

$$\text{tr}(\theta x \theta^{-1}) = \sum_j \langle e_j, \theta x \theta^{-1} e_j \rangle = \sum_j \langle x \theta^{-1} e_j, \theta^* e_j \rangle = \sum_j \langle \theta^{-1} e_j, x^* \theta^* e_j \rangle = \text{tr}(x^*),$$

поскольку  $\theta^{-1} = \theta^*$  и  $(\theta^* e_j)_j$  также является ортонормированным базисом в  $\mathfrak{h}$ .

Рассмотрим замкнутую квантовую систему в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{h}$ , самосопряженный гамильтониан  $H = H^*$  и оператор обращения времени  $\theta$  на  $\mathfrak{h}$  такой, что  $\theta H \theta^{-1} = H$  (т.е. энергия является четной наблюдаемой). Эволюция системы описывается однопараметрической группой  $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \in \mathbb{R}}: \mathcal{T}_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$ . Кроме того, отображение

$$\theta \mathcal{T}_t(x) \theta^{-1} = e^{-itH} \theta x \theta^{-1} e^{itH} = \mathcal{T}_{-t}(\theta x \theta^{-1})$$

для любого  $\theta$  с указанными выше свойствами является антилинейным и коммутирует со всеми спектральными проекторами гамильтониана  $H$ . Очевидно, что любое нормальное  $\mathcal{T}$ -инвариантное состояние  $\rho$  коммутирует с  $e^{\pm itH}$  и  $H$ . Поэтому, если состояние  $\rho$  является функцией  $H$ , оно коммутирует с  $\theta$ , уравнение (4) выполнено, и мы имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) &= \text{tr}(\theta(\rho x \mathcal{T}_t(y))^* \theta^{-1}) = \text{tr}(\theta \mathcal{T}_t(y^*) x^* \rho \theta^{-1}) = \text{tr}(\rho(\theta \mathcal{T}_t(y^*) \theta^{-1}) \theta x^* \theta^{-1}) \\ &= \text{tr}(\rho \mathcal{T}_{-t}(\theta y^* \theta^{-1}) \theta x^* \theta^{-1}) = \text{tr}(\rho \theta y^* \theta^{-1} e^{itH} \theta x^* \theta^{-1} e^{-itH}) \\ &= \text{tr}(\rho \theta y^* \theta^{-1} \mathcal{T}_t(\theta x^* \theta^{-1})) \end{aligned}$$

для всех  $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ .

Приведенное тождество выполнено, в частности, если  $\rho$  является равновесным гиббсовским состоянием  $\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}$  и может быть использовано как определение условия детального баланса для произвольной открытой квантовой системы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Будем говорить, что КМП  $\mathcal{T}$  удовлетворяет квантовому условию детального баланса относительно точного инвариантного состояния  $\rho$  и обращения времени  $\theta$  (КДБ- $\theta$ ), если

$$\text{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \text{tr}(\rho \theta y^* \theta^{-1} \mathcal{T}_t(\theta x^* \theta^{-1})) \quad (5)$$

для всех  $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ .

Заметим, что ограниченный оператор  $\theta x \theta^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  является линейным для всех  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . Кроме того, для любой пары операторов  $x, y$  с заданной четностью  $\epsilon_x, \epsilon_y \in \{-1, 1\}$  относительно обращения времени КДБ- $\theta$  условие имеет простой вид

$$\text{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \epsilon_x \epsilon_y \text{tr}(\rho y^* \mathcal{T}_t(x^*)). \quad (6)$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.** Если  $\mathcal{T}$  удовлетворяет условию КДБ- $\theta$ , то  $\rho$  коммутирует с  $\theta$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Полагая  $x = |u\rangle\langle v|$  ( $u, v \in \mathfrak{h}$ ),  $y = \mathbf{1}$  и  $t = 0$  в (5), получим

$$\langle v, \rho u \rangle = \text{tr}(\rho \theta |v\rangle\langle u| \theta^{-1}) = \text{tr}(|\rho \theta v\rangle\langle \theta u|) = \langle \theta u, \rho \theta v \rangle = \langle \theta^* \rho \theta v, u \rangle = \langle v, \theta^* \rho \theta u \rangle.$$

Отсюда следует  $\rho = \theta^* \rho \theta$ , т.е.  $\rho$  и  $\theta$  коммутируют.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Определение 5, данное в [10] в виде (6), является специальным случаем условия детального баланса, введенного Маевским [8] с помощью абстрактной операции обращения времени. Это антилинейное отображение  $\sigma$  на  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  такое, что  $\sigma^2 = \text{Id}_{\mathcal{B}(\mathfrak{h})}$ ,  $\sigma(x^*) = \sigma(x)^*$  для всех  $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  и  $\sigma(xy + yx) = \sigma(x)\sigma(y) + \sigma(y)\sigma(x)$  для

всех  $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . КМП  $\mathcal{T}$  удовлетворяет условию детального баланса Маевского относительно  $\rho$ , если существует отображение  $\sigma$  из  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  такое, что

$$\mathrm{tr}(\rho\sigma(xy)) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(x)\sigma(y)), \quad \mathrm{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(y^*) \mathcal{T}_t(\sigma(x^*)))$$

для всех  $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . Отображение  $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$  с оператором обращения времени  $\theta$  на  $\mathfrak{h}$  является, очевидно, операцией обращения из  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , которая является также гомоморфизмом, поскольку  $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ . Отсюда следует, что из КДБ- $\theta$  условия следует условие детального баланса Маевского.

В дальнейшем изложении мы ограничимся рассмотрением равномерно непрерывных КМП  $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$  на  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  с точным нормальным инвариантным состоянием  $\rho$  и предположим существование оператора обращения времени  $\theta$  на  $\mathfrak{h}$ . Кроме того, в заключительной части статьи мы рассматриваем лишь операции обращения вида  $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$ , где  $\theta$  – оператор обращения на  $\mathfrak{h}$ .

Первым важным следствием является следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 7.** *КМП  $\mathcal{T}$  удовлетворяет КДБ- $\theta$  условию тогда и только тогда, когда сопряженная полугруппа существует и определяется соотношением*

$$\widetilde{\mathcal{T}}_t(x) = \theta \mathcal{T}_t(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1} \quad \text{для всех } x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}). \quad (7)$$

Кроме того, если это эквивалентное условие выполнено, то  $\widetilde{\mathcal{T}}$  является КМП с генератором

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \theta \mathcal{L}(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1}, \quad x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}). \quad (8)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что выполнено КДБ- $\theta$  условие, и положим  $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$ . При  $t = 0$  в уравнении (5) имеем  $\mathrm{tr}(\rho ab) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(b^*)\sigma(a^*))$  для всех  $a, b \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , так что

$$\mathrm{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(y^*) \mathcal{T}_t(\sigma(x^*))) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(\mathcal{T}_t(\sigma(x^*))^* \sigma(\sigma(y^*)^*))) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(\mathcal{T}_t(\sigma(x)))y)$$

для любых  $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . Таким образом,  $\widetilde{\mathcal{T}}_t(x) = \sigma(\mathcal{T}_t(\sigma(x)))$ .

Отображение  $x \rightarrow \sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$ , очевидно, является нормальным. Поэтому оба отображения  $t \rightarrow \widetilde{\mathcal{T}}_t(x)$  (при фиксированном  $x$ ) и  $x \rightarrow \widetilde{\mathcal{T}}_t(x)$  (при фиксированном  $t$ ) являются нормальными. Наконец, отображения  $\widetilde{\mathcal{T}}$  являются вполне положительными, поскольку любое разложение Крауза  $\mathcal{T}_t(x) = \sum_k (V_t^{(k)})^* x V_t^{(k)}$  связано с аналогичным разложением Крауза  $\widetilde{\mathcal{T}}_t$  в терминах операторов  $\widetilde{V}_t^{(k)} = \theta V_t^{(k)} \theta$ . Отсюда следует, что  $\widetilde{\mathcal{T}}$  является КМП.

Обратно, если выполнено (7), то  $\widetilde{\mathcal{T}}$  является КМП и  $\mathrm{tr}(\rho \widetilde{\mathcal{T}}_t(x)y)$  равен (поскольку  $\rho$  и  $\theta$  коммутируют)

$$\mathrm{tr}(\rho \theta \mathcal{T}_t(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1} y) = \mathrm{tr}(\theta (\rho \mathcal{T}_t(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1} y \theta) \theta^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho \theta y^* \theta^{-1} \mathcal{T}_t(\theta x^* \theta^{-1}))$$

в силу предложения 6; отсюда следует (6).

Формула (8) очевидно следует из (7) при дифференцировании по времени при  $t = 0$  и, обратно, (7) выводится из (8) интегрированием и экспоненцированием.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Тожество (8) показывает что, если диссипативная часть  $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L} - i[H, \cdot]$  генератора  $\mathcal{L}$  является инвариантом обращения времени (т.е.  $\mathcal{L}_0(x) = \theta \mathcal{L}_0(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1}$  для всех  $x$ ) и гамильтониан является четным (т.е. он коммутирует

с  $\theta$ ), то из КДБ- $\theta$  следует условие детального баланса (3). Полагая  $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$ , мы можем написать равенство

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}(x) &= \sigma(\mathcal{L}(\sigma(x))) = \mathcal{L}_0(x) + \sigma([iH, \sigma(x)]) = \mathcal{L}_0(x) - i[\sigma(H), x] \\ &= \mathcal{L}_0(x) - i[H, x] = \mathcal{L}(x) - 2i[H, x].\end{aligned}$$

Предположим теперь, что  $\mathcal{T}$  удовлетворяет условию КДБ- $\theta$ . Поскольку  $\widetilde{\mathcal{T}}$  является КМП, существует (см. предложение 4.4 из [7]) выделенное ГКСЛ представление  $\mathcal{L}$ , т.е. такое представление ГКСЛ вида (1), что

- 1)  $\text{tr}(\rho L_k) = 0$  для каждого  $k \geq 1$ ;
- 2) ряд  $\sum_{k \geq 1} L_k^* L_k$  является сильно сходящимся;
- 3) если  $\sum_{k \geq 0} |c_k|^2 < \infty$  и  $c_0 + \sum_{k \geq 1} c_k L_k = 0$  для постоянных  $(c_k)_{k \geq 0}$ , то  $c_k = 0$  для любого  $k \geq 0$ ;
- 4)  $[H, \rho] = 0$ ;
- 5)  $\rho L_k = \lambda_k L_k \rho$  для некоторого  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ .

ГКСЛ-представление  $\mathcal{L}$ , удовлетворяющее только свойствам 1)–3), называется *специальным* ГКСЛ-представлением.

Напомним, что (см. теорему 30.10 из [16]), если  $H'$ ,  $(L'_k)_{k \geq 1}$  является другим семейством ограниченных операторов в  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  и оператор  $H'$  самосопряженный, то это семейство является специальным ГКСЛ-представлением  $\mathcal{L}$  тогда и только тогда, когда длины последовательностей  $(L_k)_{k \geq 1}$ ,  $(L'_k)_{k \geq 1}$  одинаковы и

$$H' = H + \alpha, \quad L'_k = \sum_j u_{kj} L_j$$

с некоторой постоянной  $\alpha$  и унитарной матрицей  $(u_{kj})_{kj}$ .

Установим связь выделенным ГКСЛ представлением  $\mathcal{L}$  и его двойственным  $\widetilde{\mathcal{L}}$ .

**ТЕОРЕМА 8.** *Если  $\mathcal{T}$  удовлетворяет условию КДБ- $\theta$ , то для каждого выделенного ГКСЛ-представления генератора  $\mathcal{L}$  операторами  $H$  и  $L_k$  существует выделенное ГКСЛ-представление  $\widetilde{\mathcal{L}}$  операторами  $\tilde{H}$  и  $\tilde{L}_k$  такое, что*

- 1)  $\tilde{H} = -\theta^{-1} H \theta - \alpha$  для некоторого  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $\tilde{L}_k = \theta^{-1} L_k \theta$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим выделенное ГКСЛ-представление генератора  $\mathcal{L}$  вида 1). Поскольку  $\widetilde{\mathcal{L}}(a) = \theta \mathcal{L}(\theta a \theta^{-1}) \theta^{-1}$ , из теоремы 7, свойства антилинейности  $\theta$  и  $\theta^2 = \mathbf{1}$  получаем

$$\begin{aligned}\theta^{-1} \widetilde{\mathcal{L}}(a) \theta &= i[H, \theta a \theta^{-1}] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k \theta a \theta^{-1} - 2L_k^* \theta a \theta^{-1} L_k + \theta a \theta^{-1} L_k^* L_k) \\ &= i\theta^{-1}(\theta^{-1} H \theta a - a \theta^{-1} H \theta) \theta + \sum_k \theta^{-1}((\theta^{-1} L_k^* \theta) a (\theta^{-1} L_k \theta)) \theta \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_k \theta^{-1}((\theta^{-1} L_k^* \theta)(\theta^{-1} L_k \theta) a + a(\theta^{-1} L_k^* \theta)(\theta^{-1} L_k \theta)) \theta \\ &= \theta^{-1}(-i[\theta^{-1} H \theta, a]) \theta - \frac{1}{2} \sum_k \theta^{-1}(L_k'^* L_k' a - 2L_k'^* a L_k' + a L_k'^* L_k') \theta,\end{aligned}$$

где  $L'_k := \theta^{-1}L_k\theta$ . Поэтому, полагая  $\tilde{H} = -\theta^{-1}H\theta - \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) и  $\tilde{L}_k = \theta^{-1}L_k\theta$ , получаем ГКСЛ-представление генератора  $\tilde{\mathcal{L}}$  такое, что

$$\begin{aligned}\rho\tilde{H} &= -\theta^{-1}\rho H\theta - \alpha\rho = -\theta^{-1}H\rho\theta - \alpha\rho = \tilde{H}\rho, \\ \rho\tilde{L}_k &= \theta^{-1}\rho L_k\theta = \theta^{-1}\lambda_k L_k\rho\theta = \lambda_k\tilde{L}_k\rho\end{aligned}$$

для  $\rho$ , коммутирующего с  $H$  и  $\theta$ , и  $\rho L_k = \lambda_k L_k\rho$  для некоторых  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ . Это значит, что представление ГКСЛ, предьявленное выше для  $\tilde{\mathcal{L}}$ , является выделенным.

КДБ- $\theta$  условие можно выразить в терминах  $L_k$  следующим образом.

**ТЕОРЕМА 9.** КМП  $\mathcal{T}$  удовлетворяет КДБ- $\theta$ -условию тогда и только тогда, когда существует выделенное представление ГКСЛ генератора  $\mathcal{L}$  операторами  $H$  и  $L_k$  такое, что

- 1)  $H = \theta^{-1}H\theta + c$  для некоторого  $c \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $\lambda_k^{-1/2}L_k^* = \sum_j u_{kj}\theta^{-1}L_j\theta$  для некоторых  $\lambda_k > 0$  и унитарной матрицы  $(u_{kj})_{kj}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $\mathcal{T}$  удовлетворяет КДБ- $\theta$  условию, то существует выделенное представление генератора  $\mathcal{L}$  операторами  $H$ ,  $L_k$  с  $\rho L_k = \lambda_k L_k\rho$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ . Согласно теореме 8 операторы  $\tilde{H} = -\theta^{-1}H\theta - \alpha$  и  $\tilde{L}_k = \theta^{-1}L_k\theta$  задают выделенное представление ГКСЛ генератора  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Поскольку  $\mathcal{T}$  является КМП, мы дополнительно имеем другое выделенное ГКСЛ-представление  $\tilde{\mathcal{L}}$  операторами  $-H - \beta$  и  $\lambda_k^{-1/2}L_k^*$  (см. теорему 4.4 из [7]), и поэтому условия (1) и (2) выполняются.

Обратно, если условия (1) и (2) выполнены, то непосредственное вычисление показывает, что  $\theta^{-1}\tilde{\mathcal{L}}(a)\theta = \mathcal{L}(\theta a\theta^{-1})$  для всех  $a \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , и поэтому имеем  $\tilde{\mathcal{L}}(a) = \theta\mathcal{L}(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$ . Отсюда очевидно следует, что  $\tilde{\mathcal{T}}_t(a) = \theta\mathcal{T}_t(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$ ; из теоремы 7 вытекает, что  $\mathcal{T}$  удовлетворяет КДБ- $\theta$  условию.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Двойственная полугруппа может быть также определена для симметричного скалярного произведения на  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$   $(a, b) \rightarrow \text{tr}(\rho^{1/2}a^*\rho^{1/2}b)$  (см. [17]–[19]). Двойственная полугруппа всегда является полугруппой вполне положительных отображений. По-видимому, возможно найти характеризацию генераторов КМП, удовлетворяющую квантовому условию детального баланса относительно симметричного скалярного произведения и обращения времени  $\theta$ , аналогичную теореме 7.3 из нашей работы [7]. Эта задача будет предметом нашей следующей заметки.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.** Для заданного специального ГКСЛ-представления генератора  $\mathcal{L}$  квантовой марковской полугруппы  $\mathcal{T}$  операторами  $H$  и  $L_k$ , положим

$$\mathcal{L}_0(a) = -\frac{1}{2} \sum_k (L_k^*L_k a - 2L_k^*aL_k + aL_k^*L_k).$$

Тогда КМП  $\mathcal{T}$  удовлетворяет КДБ- $\theta$  условию, если и только если выполнено  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + i[\theta^{-1}H\theta, \cdot]$  с  $\tilde{\mathcal{L}}_0(a) = \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$ , и  $[H, \rho] = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + i[\theta^{-1}H\theta, \cdot]$  с  $\tilde{\mathcal{L}}_0 = \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$  и  $[H, \rho] = 0$ , то генератор  $\tilde{\mathcal{L}}$  является условно вполне положительным. Поэтому  $\tilde{\mathcal{T}}$  является КМП и

$$\theta\mathcal{L}(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1} = \tilde{\mathcal{L}}_0(a) - i\theta[\theta^{-1}H\theta, \theta a\theta^{-1}]\theta^{-1} = \tilde{\mathcal{L}}_0(a) - i[H, a] = \tilde{\mathcal{L}}(a).$$

Поэтому в силу теоремы 7  $\mathcal{T}$  удовлетворяет КДБ- $\theta$  условию.

Обратно, если  $\mathcal{T}$  удовлетворяет КДБ- $\theta$  условию, то для  $\mathcal{L}$  можно найти выделенное ГКСЛ представление операторами  $K, M_k$  такими, что  $[K, \rho] = 0$  и  $K = \theta^{-1}K\theta + c$  для некоторого  $c \in \mathbb{R}$  (см. теорему 9). С другой стороны, гамильтониан  $K$  в специальном ГКСЛ представлении является единственным с точностью до скаляра, поэтому можно считать, что  $H = K$  и нам известно, что

- 1)  $H$  коммутирует с  $\rho$ ,
- 2)  $H = \theta^{-1}H\theta + c, c \in \mathbb{R}$ ,
- 3) операторы  $L_k$  и  $M_k$  определяют то же самое отображение  $\mathcal{L}_0$ .

Отсюда следует, что  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + i[\theta^{-1}H\theta, \cdot] = \mathcal{L}_0 + i[H, \cdot]$ , поэтому

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_0(a) - i[H, a] &= \widetilde{\mathcal{L}}(a) = \theta\mathcal{L}(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1} \\ &= \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1} - i\theta[\theta^{-1}H\theta, \theta a\theta^{-1}]\theta^{-1} = \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1} - i[H, a] \end{aligned}$$

для всех  $a \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ . Теперь очевидно, что отсюда следует равенство

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0(a) = \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}.$$

**3. Двойственность.** В этом разделе мы изучим КДБ- $\theta$  в том случае, когда обращение времени  $\theta$  является операцией, определенной в примере 3 относительно ортонормированного базиса  $(e_j)_j$  собственных векторов  $\rho$ . Поэтому полугруппа  $\mathcal{T}$  удовлетворяет КДБ- $\theta$  условию, если и только если двойственная полугруппа  $\widetilde{\mathcal{T}}$  задана следующим образом:

$$\widetilde{\mathcal{T}}_t(a) = \mathcal{T}_t(a^T)^T, \quad a \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}),$$

где  $a^T$  означает транспонированный оператор  $a = \sum_{ij} a_{ij}|e_i\rangle\langle e_j|$ , заданный формулой  $a^T = \sum_{ij} a_{ji}|e_i\rangle\langle e_j|$ . Действительно, согласно теореме 7  $\widetilde{\mathcal{T}}_t(a) = \theta\mathcal{T}_t(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$ ; кроме того, для всех  $u \in \mathfrak{h}$ ,

$$\theta a\theta^{-1}u = \theta\left(\sum_i \overline{\langle e_i, u \rangle} a e_i\right) = \theta\left(\sum_{ij} \overline{\langle e_i, u \rangle} a_{ji} e_j\right) = \sum_{ij} \langle e_i, u \rangle \bar{a}_{ji} e_j = \sum_{ij} \bar{a}_{ji} |e_j\rangle\langle e_i|u,$$

т.е.  $\theta a\theta^{-1} = (a^*)^T = (a^T)^*$ . Отсюда следует, что

$$\widetilde{\mathcal{T}}_t(a) = \theta\mathcal{T}_t((a^T)^*)\theta^{-1} = \theta\mathcal{T}_t(a^T)^*\theta^{-1} = ((\mathcal{T}_t(a^T)^*)^*)^T = \mathcal{T}_t(a^T)^T.$$

Авторы благодарят П. Толкнера и В. А. Маевского за обсуждение настоящей статьи.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Gorini, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, "Completely positive dynamical semigroups of  $N$ -level systems", *J. Math. Phys.*, **17**:5 (1976), 821–825.
- [2] G. Lindblad, "On the generators of quantum dynamical semigroups", *Comm. Math. Phys.*, **48**:2 (1976), 119–130.
- [3] R. Alicki, "On the detailed balance condition for non-hamiltonian systems", *Rep. Math. Phys.*, **10**:2 (1976), 249–258.
- [4] R. Alicki, K. Lendi, *Lecture Notes in Phys.*, 286, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

- [5] A. Frigerio, V. Gorini, “Markov dilations and quantum detailed balance”, *Comm. Math. Phys.*, **93**:4 (1984), 517–532.
- [6] A. Kossakowski, A. Frigerio, V. Gorini, M. Verri, “Quantum detailed balance and KMS condition”, *Comm. Math. Phys.*, **57**:2 (1977), 97–110.
- [7] F. Fagnola, V. Umanità, “Generators of detailed balance quantum Markov semigroups”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **10**:3 (2007), 335–363.
- [8] W. A. Majewski, “On the relationship between the reversibility of detailed balance conditions”, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, **39**:1 (1983), 45–54.
- [9] W. A. Majewski, “The detailed balance condition in quantum statistical mechanics”, *J. Math. Phys.*, **25**:3 (1984), 614–616.
- [10] P. Talkner, “The failure of the quantum regression hypothesis”, *Ann. Physics*, **167**:2 (1986), 390–436.
- [11] G. S. Agarwal, “Open quantum Markovian systems and the microreversibility”, *Z. Physik*, **258**:5 (1973), 409–422.
- [12] L. Accardi, K. Imafuku, “Dynamical detailed balance and local KMS condition for non-equilibrium states”, *Internat. J. Modern Phys. B*, **18**:4–5 (2004), 435–467.
- [13] F. Fagnola, R. Quezada, “Two-Photon Absorption and Emission Process”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **8**:4 (2005), 573–591.
- [14] R. Carbone, F. Fagnola, S. Hachicha, “Generic quantum Markov semigroups: the Gaussian gauge invariant case”, *Open Syst. Inf. Dyn.*, **14**:4 (2007), 425–444.
- [15] L. Accardi, F. Fagnola, S. Hachicha, “Generic q-Markov semigroups and speed of convergence of q-algorithms”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:4 (2006), 567–594.
- [16] K. R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Monogr. Math., **85**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1992.
- [17] S. Goldstein, J. M. Lindsay, “KMS-symmetric Markov semigroups”, *Math. Z.*, **219**:4 (1995), 591–608.
- [18] F. Cipriani, “Dirichlet forms and Markovian semigroups on standard forms of von Neumann algebras”, *J. Funct. Anal.*, **147**:2 (1997), 259–300.
- [19] L. Accardi, A. Mohari, “Time Reflected Markov Processes”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **2**:3 (1999), 397–425.

**Ф. Фаньола**

Миланский политехникум, Италия

*E-mail*: franco.fagnola@polimi.it

Поступило

19.10.2007

**В. Уманита**

Миланский политехникум

*E-mail*: veronica.umanita@polimi.it