N. N. Romanovskii, Integral representations and embedding theorems for functions on the Hesenberg groups $\mathbb{H}^n$,
Algebra i Analiz, 2004, Volume 16, Issue 2, 82–119

Алгебра и анализ
Том 16 (2004), вып. 2

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ГРУППАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА $\mathbb{H}^n$

© Н. Н. РОМАНОВСКИЙ

В данной работе получены интегральные представления типа Соболева для функций, заданных на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. С их помощью доказаны теоремы вложения, неравенства Пуанкаре и коэрцитивные оценки для функций, заданных в областях $\mathbb{H}^n$.

§0. Введение

0.1. Известно, что интегральные представления функций, заданных в областях евклидовых пространств, имеют значительные применения в теории функциональных пространств, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории кубатурных формул и других вопросах. Начало интенсивного изучения этих направлений было заложено в фундаментальных работах С. Л. Соболева 1936–1938 гг. Теория пространств функций с обобщенными производными нашла свое отражение в книге самого С. Л. Соболева [1], а также в книгах И. Нечаса [2], С. М. Никольского [3], И. М. Стейна [4], О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [5], В. М. Гольдштейна и Ю. Г. Решетняка [6], В. Г. Мазьи [7], Д. Р. Адамса и Л. И. Хедберга [8], В. И. Буренкова [9], Ю. Г. Решетняка [10] и в монографиях других авторов. По поводу различных способов вывода интегральных представлений см. также работы [11–17].

Актуальность теории пространств Соболева на группах Гейзенберга обусловлена многочисленными приложениями к исследованию свойств решений субэллиптических дифференциальных уравнений, к изучению квазиконформного анализа и ко многим смежным вопросам (см., например, [18–24]). Группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ представляют из себя наиболее известный, во многом модельный, случай пространств Карно–Каратеодори. Последние суть гладкие многообразия с выделенным касательным подрасслоением, удовлетворяющим некоторым алгебраическим условиям. Векторные поля

Ключевые слова: группы Гейзенберга, пространства Соболева, интегральные представления, теоремы вложения, коэрцитивные оценки.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (коды проектов 97-01-01092, 96-15-96291) и INTAS-10170.

упомянутого подрасслоения называют горизонтальными. Кривые, у которых касательные векторы содержатся в выделенном подрасслоении, также называют горизонтальными. Расстояние Карно–Каратеодори между двумя точками равно нижней грани длин горизонтальных кривых, соединяющих эти точки. Метрика Карно–Каратеодори не эквивалентна римановой метрике. Изучению геометрии пространств Карно–Каратеодори посвящены работы М. Громова [25, 26], А. Нагеля, Е. М. Стейна, С. Вэйнгера [27], П. Пансу [26, 28] и других авторов.

Классы Соболева функций, заданных в областях пространств Карно–Каратеодори, определяются через производные вдоль векторных полей из выделенного подрасслоения. Развитие теории таких функциональных пространств стимулировалось изучением свойств регулярности субэллиптических дифференциальных уравнений. В частности, доказательство неравенств Пуанкаре и Соболева для функций, заданных в шаре пространства Карно–Каратеодори, было необходимо для обобщения итерационной техники Мозера. С этим направлением исследований связаны работы Д. Джерисона [29–31], Б. Франчи [32–37], Р. Л. Уидена [33, 36, 37], Л. Капони [38], Д. Даниэлли [39, 40], Н. Гарофалло [38, 40–42], Д. М. Нье [40, 42], П. Хайлаша [43, 44], Ю. Хэйнонена [45], П. Коскела [43, 45], Г. Лу [36, 37, 46–49], О. Мартио [44], С. К. Водопьянова [50–58], А. В. Грешнова [54–56, 59] и других авторов.

В настоящее время в некоторых работах интегральными представлениями функций, определенных в пространствах Карно–Каратеодори, называют неравенство вида

$$|f(x) - C_1| \leqslant C_2 \int\limits_{B(z,C_3r)} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} f|(y)}{\rho(x,y)^{\nu-1}}\,dy,$$

где $x \in B(z,r)$, а постоянные C_2 и C_3 не зависят от x, r и f. Из этого соотношения выводятся неравенства Пуанкаре и Соболева. Однако многие более тонкие результаты не могут быть получены с помощью упомянутого неравенства. К таким результатам относятся, например, коэрцитивные оценки для дифференциальных операторов, которые выражаются в виде линейных комбинаций производных некоторого фиксированного порядка вдоль векторных полей из стандартного базиса горизонтального подрасслоения. В дальнейшем будем называть такие операторы линейными однородными дифференциальными операторами с постоянными в смысле стандартного базиса горизонтального подрасслоения коэффициентами.

Известно, что коэрцитивные оценки являются важным инструментом при изучении систем уравнений математической физики. Обычно в литературе под коэрцитивными оценками для дифференциального оператора Q понимают либо неравенство

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} \leqslant C(\Omega, Q)\big(\|Qu\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_1(\Omega)}\big)$$

для произвольной вектор-функции u, либо неравенство

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} \leqslant C(\Omega, Q)\|Qu\|_{L_p(\Omega)}$$

для финитной вектор-функции. В 1907 г. Корн [60] доказал справедливость таких неравенств для оператора $Q_1 = \frac{1}{2}\big(\nabla u + (\nabla u)^T\big)$ (тензор напряжения) при $p = 2$. Значительно позже в работах Н. Ароншайна и К. Т. Смита [61, 62], а также в работах О. В. Бесова [63] такие неравенства были доказаны для достаточно широкого класса операторов, действующих на функции, заданные в областях евклидовых пространств (см. также [64, 65, 66]).

Для операторов

$$Q_1 = \frac{1}{2}\big(\nabla u + (\nabla u)^T\big)$$

и

$$Q_2 = \frac{1}{2}\big(\nabla u + (\nabla u)^T\big) - \frac{1}{n}\operatorname{Sp}\nabla u$$

Ю. Г. Решетняк [10, 14] получил более сильный вариант коэрцитивных оценок. Эти неравенства были использованы в квазиконформном анализе для доказательства теорем устойчивости [10].

В данной работе доказывается именно усиленный вариант коэрцитивных оценок для линейных однородных дифференциальных операторов с постоянными в смысле стандартного базиса горизонтального подрасслоения группы $\mathbb{H}^n$ коэффициентами и с конечномерным ядром.

В работе использованы идеи и классические подходы к теории пространств функций с обобщенными производными, заложенные в работах С. Л. Соболева, О. В. Бесова, В. И. Буренкова, В. Г. Мазьи, Ю. Г. Решетняка и др.

0.2. Приведем основные определения, используемые в работе. Точки группы $\mathbb{H}^n$ отождествляются с точками пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$. Групповое умножение определяется формулой

$$\begin{aligned}(x', x'', x_{2n+1}) &\cdot (y', y'', y_{2n+1}) \\ &= (x' + y', x'' + y'', x_{2n+1} + y_{2n+1} - 2\langle x', y''\rangle + 2\langle x'', y'\rangle),\end{aligned}$$

где $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $x'' = (x_{n+1}, \dots, x_{2n})$, $y' = (y_1, \dots, y_n)$, $y'' = (y_{n+1}, \dots, y_{2n})$, $\langle x', y''\rangle = x_1 y_{n+1} + \dots + x_n y_{2n}$.

Метрика Гейзенберга задается следующим образом: $\rho(p,q) = |p^{-1}\cdot q|$, где

$$|(x', x'', x_{2n+1})| = ((x'^2 + x''^2)^2 + x_{2n+1}^2)^{1/4}.$$

Она не эквивалентна евклидовой метрике. Легко видеть, что топология группы Гейзенберга эквивалентна евклидовой топологии. Соответственно область в $\mathbb{H}^n$ будет тождественна открытому связному подмножеству пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Левоинвариантные векторные поля $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2x_{i+n}\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}$, $i = 1,\dots, n$, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - 2x_{i-n}\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}$, $i = n+1,\dots,2n$, образуют стандартный базис горизонтального подрасслоения. Вместе с векторным полем $X_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}$ они образуют стандартный базис алгебры Ли, соответствующей группе $\mathbb{H}^n$. Для них имеют место только следующие нетривиальные коммутационные соотношения:

$$[X_j, X_{j+n}] = -4X_{2n+1}, \quad j = 1,\dots,n. \tag{0.1}$$

Нетрудно видеть, что отображение левого сдвига $l_x : y \mapsto x\cdot y$ есть диффеоморфизм $\mathbb{R}^{2n+1}$ на $\mathbb{R}^{2n+1}$, причем $\det(Dl_x) \equiv 1$.

Через ν будем обозначать размерность Хаусдорфа группы $\mathbb{H}^n$ относительно метрики Гейзенберга — она равна $2n+2$.

Семейство отображений $\delta_t : (x', x'', x_{2n+1}) \mapsto (tx', tx'', t^2x_{2n+1})$, $t > 0$, называют однопараметрическим семейством растяжений. Очевидно, что $|\delta_t(x)| = t|x|$.

Биинвариантная мера Хаара на группе $\mathbb{H}^n$ совпадает с мерой Лебега в пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$. Легко видеть, что $|\delta_t(S)| = t^\nu|S|$ для всякого измеримого множества $S \subset \mathbb{H}^n$.

Произвольный $(2n+1)$-мерный мультииндекс α сопоставим с числом $|\alpha|_h = \alpha_1 + \dots + \alpha_{2n} + 2\alpha_{2n+1}$. Через X^α обозначим дифференциальный оператор $X_1^{\alpha_1}\dots X_{2n+1}^{\alpha_{2n+1}}$.

Рассмотрим следующие нормы:

$$\|f\|_{V_p^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|_h \leqslant k} \|X^\alpha f\|_{L_p(\Omega)},$$

$$\|f\|_{L_p^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|_h = k} \|X^\alpha f\|_{L_p(\Omega)},$$

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|_h = k} \|X^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Для произвольного линейного однородного дифференциального оператора Q порядка k с постоянными в смысле стандартного базиса горизонтального подрасслоения коэффициентами рассмотрим нормы

$$\|f\|_{W_{Q,p}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|Qf\|_{L_p(\Omega)},$$
$$\|f\|_{V_{Q,p}(\Omega)} = \|f\|_{V_p^{k-1}(\Omega)} + \|Qf\|_{L_p(\Omega)}.$$

Пространство $W_p^k(\Omega)$ определим как пополнение множества $\{f \in C^\infty(\Omega) \mid \|f\|_{W_p^k(\Omega)} < \infty\}$ по норме $\|f\|_{W_p^k(\Omega)}$. Аналогично определяются пространства $L_p^k(\Omega)$, $V_p^k(\Omega)$, $W_{Q,p}(\Omega)$, $V_{Q,p}(\Omega)$.

Пространство $V_0^{k,p}(\Omega)$ есть пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{V_p^k(\Omega)}$.

Пространство ${}^s(\overline{\Omega})$ состоит из функций, у которых горизонтальные производные порядка $[s]$ равномерно непрерывны по Гёльдеру в смысле метрики Гейзенберга с показателем $s - [s]$ ($[s]$ — целая часть s).

Приведем определения основных классов областей, рассматриваемых в настоящей работе.

Область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ удовлетворяет *условию конуса* с постоянной $R > 0$, если для каждой точки $x \in \Omega$ найдется шар $B_x \subset \Omega$ такой, что конус $\{x \cdot \delta_t(x^{-1} \cdot y) \mid y \in \overline{B}_x,\ 0 < t \leqslant 1\}$ содержится в области Ω, причем радиусы шаров B_x ограничены в совокупности снизу положительной постоянной R. Эквивалентное определение приведено в [38].

Область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ удовлетворяет *сильному условию Липшица*, если любая точка $x^0 \in \partial\Omega$ имеет окрестность U_{x^0} такую, что в некоторой декартовой системе координат множество $U_{x^0} \cap \Omega$ может быть представлено неравенством $x_N > f_{x^0}(x_1, \dots, x_{N-1})$ ($N = 2n + 1$), где либо функция f_{x^0} удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L(f_{x^0})$ и конус $x_N - x_N^0 > L(f_{x^0})\|(x_1, \dots, x_{N-1}) - (x_1^0, \dots, x_{N-1}^0)\|$ имеет непустое пересечение с горизонтальной плоскостью, привязанной к точке x^0, либо функция f_{x^0} принадлежит классу $C^{1,1}(U_{x^0})$.

Область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ удовлетворяет *(ε, δ)-условию*, если для любых точек $x,\ y \in \Omega$ таких, что $\rho(x, y) < \delta$, найдется спрямляемая в смысле метрики Гейзенберга кривая γ, соединяющая точки x и y, для которой выполняются неравенства

$$l(\gamma) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\rho(x, y), \quad \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \geqslant \epsilon \min(\rho(x, z), \rho(y, z)) \text{ для всех } z \in \gamma,$$

где $l(\gamma)$ — длина кривой γ в смысле метрики Гейзенберга.

Будем говорить, что открытое множество $U \subset \mathbb{H}^n$ *звездно* в области Ω относительно некоторого шара $B \Subset \Omega$, если для любых точек $x \in U$, $y \in B$ точка $x \cdot \delta_t(x^{-1} \cdot y)$ принадлежит области Ω для всякого $t \in (0, 1]$.

Горизонтальными полиномами степени не выше l будем называть функции, у которых все горизонтальные производные (т. е. производные вдоль горизонтальных векторных полей X_i, $i = 1, \ldots, 2n$) порядка $l+1$ тождественно равны нулю.

§1. Интегральные представления функций классов Соболева на областях групп Гейзенберга

1.1. Интегральные представления функций, заданных в ограниченных областях группы $\mathbb{H}^n$, с помощью первых горизонтальных производных.

Теорема 1. *Пусть область $\Omega' \subset \mathbb{H}^n$ звездна в области $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ относительно гейзенбергова шара $B(a,r)$, функция $\varphi \in C_0^\infty(B(a,r))$ удовлетворяет соотношению $\int_\Omega \varphi(x)\,dx = 1$. Тогда для любой функции f класса $C^\infty(\Omega)$ в области Ω' справедливо следующее интегральное представление:*

$$\begin{aligned} f(x) = &\int_\Omega f(y)\varphi(y)\,dy \\ &+ \int_\Omega \Gamma(x,y;\varphi) \\ &\quad\times \Bigg(\sum_{i=1}^{2n}(y_i - x_i)X_i f(y) \\ &\qquad + 2(y_{2n+1} - x_{2n+1} + 2\langle x', y''\rangle - 2\langle x'', y'\rangle)X_{2n+1}f(y)\Bigg)\,dy, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\Gamma(x,y;\varphi) = -\int_1^\infty \varphi(x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))t^{2n+1}\,dt$.

Доказательство. Каждую точку $x \in \mathbb{R}^{2n+1}$ сопоставим с отображением

$$v_x : (0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi)^{2n-2}\times(-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^{2n+1},$$

заданным формулой

$$v_x(r,\overline{\alpha},\beta) = l_x(v(r,\overline{\alpha},\beta)) = l_x((1+\beta^2)^{-1/4}\theta(r,\overline{\alpha}),(1+\beta^2)^{-1/2}\beta r^2), \tag{1.2}$$

где $\overline{\alpha} \in [0,2\pi)\times[0,\pi)^{2n-2}$, $\theta : (0,\infty)\times[0,2\pi)\times[0,\pi)^{2n-2} \to \mathbb{R}^{2n}$ — отображение, задающее стандартную полярную систему координат в евклидовом пространстве. В дальнейшем потребуются следующие его свойства:

1) $\theta|_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)^{2n-2}}$ есть диффеоморфизм,
2) $\|\theta(r,\overline{\alpha})\| = r$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^{2n}$,
3) $\det(D\theta(r,\overline{\alpha})) = A(\overline{\alpha})r^{2n-1}$,

4) $\frac{\partial}{\partial r}\theta(r,\overline{\alpha}) = \frac{1}{r}\theta(r,\overline{\alpha})$.

Отметим, что

$$\begin{aligned} v(r,\overline{\alpha},\beta) &= \delta_r\big(v(1,\overline{\alpha},\beta)\big), \\ \rho(x, v_x(r,\overline{\alpha},\beta)) &= \rho(0, v(r,\overline{\alpha},\beta)) \\ &= (\|(1+\beta^2)^{-1/4}\theta(r,\overline{\alpha})\|^4 + ((1+\beta^2)^{-1/2}\beta r^2)^2)^{1/4} = r. \end{aligned}$$

Кроме того, если $v(r,\overline{\alpha},\beta) = (z,t)$ $(z \in \mathbb{R}^{2n},\ t \in \mathbb{R})$, то $r = |(z,t)|$, $\beta = \frac{t}{\|z\|^2}$, $\overline{\alpha}$ — вектор, состоящий из углов, участвующих в записи координат вектора z в полярной системе. Таким образом, отображение $v_x|_\Pi$ есть диффеоморфизм, где $\Pi = (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)^{2n-2}\times(-\infty,\infty)$.

Далее, нетрудно вычислить $\det(Dv(r,\overline{\alpha},\beta))$. Положим для этого

$$\theta(r,\overline{\alpha}) = (\theta_1(r,\overline{\alpha}),\dots,\theta_{2n}(r,\overline{\alpha})).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} &Dv(r,\overline{\alpha},\beta) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\beta^2)^{\frac14}}\frac{\partial\theta_1}{\partial r} & \frac{1}{(1+\beta^2)^{\frac14}}\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_1} & \dots & \frac{1}{(1+\beta^2)^{\frac14}}\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_{2n-1}} & \frac{\partial}{\partial\beta}((1+\beta^2)^{-\frac14})\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(1+\beta^2)^{\frac14}}\frac{\partial\theta_{2n}}{\partial r} & \frac{1}{(1+\beta^2)^{\frac14}}\frac{\partial\theta_{2n}}{\partial\alpha_1} & \dots & \frac{1}{(1+\beta^2)^{\frac14}}\frac{\partial\theta_{2n}}{\partial\alpha_{2n-1}} & \frac{\partial}{\partial\beta}((1+\beta^2)^{-\frac14})\theta_{2n} \\ \frac{2\beta r}{(1+\beta^2)^{\frac12}} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta(1+\beta^2)^{-\frac12})r^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\frac{\partial}{\partial\beta}((1+\beta^2)^{-\frac14}) = -\frac{\beta}{2}(1+\beta^2)^{-\frac54}$, $\frac{\partial}{\partial\beta}(\beta(1+\beta^2)^{-\frac12}) = (1+\beta^2)^{-\frac12} - \beta^2(1+\beta^2)^{-\frac32} = (1+\beta^2)^{-\frac32}$. Определитель этой матрицы найдем, разложив его по последней строке. Имеем

$$\begin{aligned} &\det(Dv(r,\overline{\alpha},\beta)) \\ &\quad= (1+\beta^2)^{-\frac32}r^2\Big((1+\beta^2)^{-\frac14}\Big)^{2n}\det(D\theta(r,\overline{\alpha})) \\ &\qquad+ 2\beta r(1+\beta^2)^{-\frac12}\Big((1+\beta^2)^{-\frac14}\Big)^{2n-1}\Big(-\frac{\beta}{2}(1+\beta^2)^{-\frac54}\Big)\det M, \end{aligned}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_1} & \dots & \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_{2n-1}} & \theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\theta_{2n}}{\partial\alpha_1} & \dots & \frac{\partial\theta_{2n}}{\partial\alpha_{2n-1}} & \theta_{2n} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\theta_i = r\frac{\partial}{\partial r}\theta_i$, и переставляя первый и последний столбцы, получаем

$$\det M = (-1)^{2n-1}r\det\big(D\theta(r,\overline{\alpha})\big) = -A(\overline{\alpha})r^{2n}.$$

Окончательно приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
&\det\big(Dv(r,\overline{\alpha},\beta)\big)\\
&\quad=(1+\beta^2)^{-\frac{3}{2}-\frac{n}{2}}A(\overline{\alpha})r^{2+(2n-1)}+\beta^2(1+\beta^2)^{-\frac{1}{2}-\frac{2n-1}{4}-\frac{5}{4}}A(\overline{\alpha})r^{2n+1}\\
&\quad=A(\overline{\alpha})r^{2n+1}\big((1+\beta^2)^{-\frac{n+3}{2}}+\beta^2(1+\beta^2)^{-\frac{n+3}{2}}\big)=A(\overline{\alpha})(1+\beta^2)^{-\frac{n+1}{2}}r^{2n+1},
\end{aligned}$$

откуда выводим

$$\det(Dv_x(r,\overline{\alpha},\beta))=\det(D(l_x\circ v)(r,\overline{\alpha},\beta))=A(\overline{\alpha})(1+\beta^2)^{-\frac{n+1}{2}}r^{2n+1}. \tag{1.4}$$

Фиксируем некоторую гладкую финитную функцию φ с носителем, сосредоточенным в гейзенберговом шаре $B(a,R)\subset\mathbb{R}^{2n+1}$, и удовлетворяющую условию $\int_\Omega\varphi(x)\,dx=1$.

Рассмотрим произвольную гладкую функцию f, заданную на Ω. Пусть $x_0\in\Omega'$. Определим функции

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}(x_0;r,\overline{\alpha},\beta)&=-\int\limits_r^\infty\varphi(v_{x_0}(s,\overline{\alpha},\beta))\det(Dv_{x_0}(s,\overline{\alpha},\beta))\,ds,\\
\Phi(x_0;y)&=\overline{\Phi}(x_0;v_{x_0}^{-1}(y)),\\
\overline{f}&=f\circ v_{x_0},\\
\overline{\Psi}(x_0;r,\overline{\alpha},\beta)&=\overline{\Phi}(x_0;r,\overline{\alpha},\beta)\cdot\overline{f}(r,\overline{\alpha},\beta).
\end{aligned}$$

Имеем

$$\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial r}=\overline{f}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}+\overline{\Phi}\frac{\partial\overline{f}}{\partial r}. \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что в силу звездности области Ω' в области $\Omega\subset\mathbb{H}^n$ относительно шара $B(a,r)$ носитель функции $\overline{\Phi}(x_0,\cdot)$ содержится в области $v_{x_0}^{-1}(\Omega)$. Следовательно, функции $\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial r}$, $\overline{f}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}$, $\overline{\Phi}\frac{\partial\overline{f}}{\partial r}$ можно непрерывным образом доопределить нулем всюду на множестве $\Pi\setminus v_{x_0}^{-1}(\Omega)$. Интегрируя (1.5) от r до ∞ и устремляя r к 0, получаем

$$f(x_0)\int\limits_0^\infty\varphi(v_{x_0}(s,\overline{\alpha},\beta))\det(Dv_{x_0}(s,\overline{\alpha},\beta))\,ds=\int\limits_0^\infty\left(\overline{f}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}+\overline{\Phi}\frac{\partial\overline{f}}{\partial r}\right)dr. \tag{1.6}$$

Интегрируя левую и правую части равенства (1.6) по α_1 от 0 до 2π, по α_i от 0 до π, $i=2,\dots,2n-1$, и по β от $-\infty$ до ∞, находим

$$f(x_0)\int\limits_{\Pi}\varphi(v_{x_0}(r,\overline{\alpha},\beta))\det(Dv_{x_0}(r,\overline{\alpha},\beta))\,drd\overline{\alpha}d\beta$$
$$=\int\limits_{\Pi}\left(\overline{f}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}+\overline{\Phi}\frac{\partial\overline{f}}{\partial r}\right)drd\overline{\alpha}d\beta.$$

В интеграле в левой части выполним замену переменных $r,\overline{\alpha},\beta\mapsto x_1,\dots,x_{2n+1}$. Приходим к равенству

$$f(x_0)=f(x_0)\int\limits_{v_{x_0}(\Pi)}\varphi(x)\,dx=\int\limits_{\Pi}\left(\overline{f}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}+\overline{\Phi}\frac{\partial\overline{f}}{\partial r}\right)drd\overline{\alpha}d\beta.$$

Далее, $\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}=\varphi(v_{x_0}(r,\overline{\alpha},\beta))\det(Dv_{x_0}(r,\overline{\alpha},\beta))$, откуда получаем

$$\int\limits_{\Pi}\overline{f}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial r}\,drd\overline{\alpha}d\beta=\int\limits_{v_{x_0}(\Pi)}f(x)\varphi(x)\,dx=\int\limits_{\Omega}f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Кроме того, $\frac{\partial\overline{f}}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}f(v_{x_o}(r,\overline{\alpha},\beta))=\left\langle\nabla(f\circ l_{x_0})(v(r,\overline{\alpha},\beta)),\frac{\partial}{\partial r}v(r,\overline{\alpha},\beta)\right\rangle$, откуда

$$\int\limits_{\Pi}\overline{\Phi}\frac{\partial\overline{f}}{\partial r}\,drd\overline{\alpha}d\beta$$
$$=\int\limits_{v_{x_0}(\Pi)}\frac{1}{|\det(Dv_{x_0}(v_{x_0}^{-1}(x)))|}\Phi(x_0;x)$$
$$\times\left\langle\nabla(f\circ l_{x_0})(x_0^{-1}\cdot x),\ \left[\frac{\partial}{\partial r}v\right](v_{x_0}^{-1}(x))\right\rangle dx$$
$$=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{|\det(Dv_{x_0}(v_{x_0}^{-1}(x)))|}\Phi(x_0;x)$$
$$\times\left\langle\nabla(f\circ l_{x_0})(x_0^{-1}\cdot x),\ \left[\frac{\partial}{\partial r}v\right](v^{-1}(x_0^{-1}\cdot x))\right\rangle dx,$$

так как функция Φ тождественно равна нулю вне области Ω. Из двух последних равенств вытекает

$$f(x_0) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega \frac{1}{|\det(Dv_{x_0}(v_{x_0}^{-1}(x)))|}\Phi(x_0;x) \times \left\langle \nabla(f\circ l_{x_0})(x_0^{-1}\cdot x),\ \left[\frac{\partial}{\partial r}v\right](v^{-1}(x_0^{-1}\cdot x))\right\rangle dx. \tag{1.7}$$

Перепишем (1.7), заменив x_0 на x и воспользовавшись соотношением (1.4). Имеем

$$f(x) = \int_\Omega f(y)\varphi(y)\,dy + \int_\Omega \frac{1}{A(\overline{\alpha})g(\beta)|x^{-1}\cdot y|^{2n+1}}\Phi(x,y) \times \left\langle \nabla(f\circ l_x)(x^{-1}\cdot y),\ \left[\frac{\partial}{\partial r}v\right](v^{-1}(x^{-1}\cdot y))\right\rangle dy, \tag{1.8}$$

где $\Phi(x,y) = -\int_r^\infty \varphi(v_x(s,\overline{\alpha},\beta))A(\overline{\alpha})g(\beta)s^{2n+1}\,ds$, $(r,\overline{\alpha},\beta) = v_x^{-1}(y)$, $g(\beta) = (1+\beta^2)^{-\frac{n+1}{2}}$, $\cdot$ — умножение на группе $\mathbb{H}^n$.

Далее, $v_x(s,\overline{\alpha},\beta) = x\cdot v(s,\overline{\alpha},\beta) = x\cdot\delta_{\frac{s}{r}}(v(r,\overline{\alpha},\beta)) = x\cdot\delta_{\frac{s}{r}}(x^{-1}\cdot y)$. Отсюда

$$\Phi(x,y) = -\int_r^\infty \varphi(x\cdot\delta_{\frac{s}{r}}(x^{-1}\cdot y))A(\overline{\alpha})g(\beta)s^{2n+1}\,ds.$$

Выполнив замену переменных $t = \frac{s}{r}$, $s = tr$, $ds = rdt$, получим

$$\Phi(x,y) = -\int_1^\infty \varphi(x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))A(\overline{\alpha})g(\beta)t^{2n+1}r^{2n+2}\,dt.$$

Подставим последнее выражение в формулу (1.8):

$$f(x) = \int\limits_{\Omega} f(y)\varphi(y)\,dy$$
$$+ \int\limits_{\Omega} |x^{-1}\cdot y|\Big(-\int\limits_{1}^{\infty} \varphi(x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))t^{2n+1}\,dt\Big)$$
$$\times \Big\langle \nabla(f\circ l_x)(x^{-1}\cdot y), \Big[\frac{\partial}{\partial r}v\Big](v^{-1}(x^{-1}\cdot y))\Big\rangle\,dy. \tag{1.9}$$

Нетрудно убедиться в том, что вектор $[\frac{\partial}{\partial r}v](v^{-1}(x))$ равен $(\frac{x_1}{|x|},\dots,\frac{x_{2n}}{|x|}, 2\frac{x_{2n+1}}{|x|})$. Действительно, из (1.2) и (1.3) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r}v(r,\overline{\alpha},\beta) = \Big((1+\beta^2)^{-\frac14}\frac{\partial\theta_1(r,\overline{\alpha})}{\partial r},\dots,(1+\beta^2)^{-\frac14}\frac{\partial\theta_{2n}(r,\overline{\alpha})}{\partial r},(1+\beta^2)^{-\frac12}2\beta r\Big)$$
$$= \Big((1+\beta^2)^{-\frac14}\frac1r\theta_1(r,\overline{\alpha}),\dots,(1+\beta^2)^{-\frac14}\frac1r\theta_{2n}(r,\overline{\alpha}),(1+\beta^2)^{-\frac12}2\beta r\Big)$$
$$= \Big(\frac1r v_1(r,\overline{\alpha},\beta),\dots,\frac1r v_{2n}(r,\overline{\alpha},\beta),\frac2r v_{2n+1}(r,\overline{\alpha},\beta)\Big).$$

Далее, легко видеть, что для любой гладкой функции g имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}g(x) = \sum_{i=1}^{2n} x_iX_ig(x). \tag{1.10}$$

В силу левоинвариантности векторных полей X_i, X_{2n+1} имеем

$$\Big\langle \nabla(f\circ l_x)(x^{-1}\cdot y), \Big[\frac{\partial}{\partial r}v\Big](v^{-1}(x^{-1}\cdot y))\Big\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{2n}\frac{(x^{-1}\cdot y)_i}{|x^{-1}\cdot y|}X_i(f\circ l_x)(x^{-1}\cdot y) + 2\frac{(x^{-1}\cdot y)_{2n+1}}{|x^{-1}\cdot y|}X_{2n+1}(f\circ l_x)(x^{-1}\cdot y)$$
$$= \sum_{i=1}^{2n}\frac{(x^{-1}\cdot y)_i}{|x^{-1}\cdot y|}X_if(y) + 2\frac{(x^{-1}\cdot y)_{2n+1}}{|x^{-1}\cdot y|}X_{2n+1}f(y).$$

Подставляя последние равенства в формулу (1.8), получаем требуемое интегральное представление.

Лемма 1. *Пусть область $\Omega' \subset \mathbb{H}^n$ звездна в области $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ относительно гейзенбергова шара $B(a,r)$, область Ω ограничена, $\Omega \subset B(0,R)$. Фиксируем функцию $\varphi_0 \in C_0^\infty(B(0,1))$, удовлетворяющую соотношению $\int_{B(0,1)}\varphi_0(x)\,dx = 1$. Положим $\varphi(x) = \frac{1}{r^{2n+2}}\varphi_0(\delta_{r^{-1}}(a^{-1}\cdot x))$. Тогда* *функция* $\Gamma(x,y;\varphi) = -\int_1^\infty \varphi(x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))t^{2n+1}\,dt$ *принадлежит классу* $C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}\times\mathbb{R}^{2n+1}\setminus\{x=y\})$, *для фиксированного* $x\in\Omega'$ *финитна по второму аргументу, причем ее носитель содержится в* Ω *и удовлетворяет оценкам*

$$\begin{aligned}
&|\Gamma(x,y;\varphi)|\\
&\quad\leqslant \sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|(\mathrm{diam}(\Omega))^{2n+2}\frac{1}{|x^{-1}\cdot y|^{2n+2}}\\
&\quad= \sup_{x\in\Omega}|\varphi_0(x)|\frac{(\mathrm{diam}(\Omega))^{2n+2}}{r^{2n+2}}\frac{1}{|x^{-1}\cdot y|^{2n+2}},\qquad x\in\Omega',\ y\in B(a,r),\qquad(1.11)\\
&|X_x^\alpha X_y^\beta\Gamma(x,y;\varphi)|\\
&\quad\leqslant C(\alpha,\beta,\varphi,R)\frac{1}{|x^{-1}\cdot y|^{2n+2+|\alpha|_h+|\beta|_h}}\\
&\quad= C\Big(\alpha,\beta,\varphi_0,R,\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{r}\Big)\frac{1}{|x^{-1}\cdot y|^{2n+2+|\alpha|_h+|\beta|_h}},\qquad x\in\Omega',\ y\in B(a,r),
\end{aligned}$$

где $\mathrm{diam}(\Omega)$ *обозначает диаметр области* Ω *в смысле метрики Гейзенберга,* C *растет при увеличении* R *и* $\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{r}$.

Доказательство. В силу того что

$$\rho(x,x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y)) = t|x^{-1}\cdot y|,\qquad t=\frac{\rho(x,x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))}{|x^{-1}\cdot y|},$$

значение $\varphi(x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))$ равно нулю для всех $t>\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{|x^{-1}\cdot y|}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
|\Gamma(x,y;\varphi)| &\leqslant \left(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{|x^{-1}\cdot y|}-1\right)\sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|\left(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{|x^{-1}\cdot y|}\right)^{2n+1}\\
&\leqslant \sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|\left(\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{|x^{-1}\cdot y|}\right)^{2n+2}.
\end{aligned}$$

Далее, принимая во внимание левоинвариантность векторных полей X_i и то, что для произвольной дифференцируемой функции g имеет место равенство $X_i(g\circ\delta_t)(x) = t(X_i g)(\delta_t x)$, $i=1,\dots,2n$, выводим

$$\begin{aligned}
[X_{i,y}(\varphi\circ l_x\circ\delta_t\circ l_{x^{-1}})](y) &= [X_{i,y}(\varphi\circ l_x\circ\delta_t)](x^{-1}\cdot y)\\
&= t[X_{i,y}(\varphi\circ l_x)](\delta_t(x^{-1}\cdot y)) = t[X_i\varphi](x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y)).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$X_y^\alpha\Gamma(x,y;\varphi) = -\int_1^\infty [X^\alpha\varphi](x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))t^{2n+1+|\alpha|_h}\,dt.\qquad(1.12)$$

Предположим, что значение y фиксировано. Обозначим $v_y(x) = x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y)$.

Во-первых, отметим, что для всех точек $\tau, \sigma \in \mathbb{H}^n$ выполняются равенства $\delta_t(\tau\cdot\sigma) = \delta_t\tau\cdot\delta_t\sigma$, $(\delta_t\tau)^{-1} = \delta_t(\tau^{-1})$, $\tau^{-1} = -\tau$, где $-\tau = (-\tau_1, \ldots, -\tau_{2n+1})$. Имеем

$$v_y(x) = ((\delta_t y)^{-1}\cdot(\delta_t x^{-1})^{-1}\cdot x^{-1})^{-1} = ((\delta_t y)^{-1}\cdot\delta_t x\cdot x^{-1})^{-1} = (p(y)\cdot w(x))^{-1},$$

где $p(y) = \delta_t(y^{-1})$ — фиксированная точка из $\mathbb{H}^n$, $w(x) = \delta_t x\cdot(x^{-1})$.

Пусть g — некоторая гладкая заданная на $\mathbb{H}^n$ функция. Обозначим отображение $x \mapsto x^{-1}$ символом inv. Пусть $i \in \{1, \ldots, 2n\}$. Тогда

$$[X_i(g\circ v_y)](x) = [X_i(g\circ((p(y)\cdot w)^{-1}))](x) = [X_i(g\circ \mathrm{inv}\circ l_{p(y)}\circ w)](x). \tag{1.13}$$

Далее, для произвольной дифференцируемой функции h имеем $[X_i(h\circ w)](x) = \sum_{j=1}^{2n+1}\left[\frac{\partial h}{\partial x_j}\right](w(x))X_i w_j(x)$. С другой стороны, для $j = 1, \ldots, 2n$ можем написать соотношение

$$w_j(x) = (t-1)x_j, \qquad X_i w_j \equiv (t-1)\delta_{ij},$$
$$w_{2n+1}(x) = (t^2-1)x_{2n+1}, \quad X_i w_{2n+1}(x) = 2\,\mathrm{sign}(n-i)(t^2-1)x_{i+n\,\mathrm{sign}(n-i)}.$$

Следовательно, принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial h}{\partial x_i}\right](w(x)) + 2\,\mathrm{sign}(n-i)(t-1)x_{i+n\,\mathrm{sign}(n-i)}\left[\frac{\partial h}{\partial x_{2n+1}}\right](w(x))\\
&\quad= \left[\frac{\partial h}{\partial x_i}\right](w(x)) + 2\,\mathrm{sign}(n-i)w_{i+n\,\mathrm{sign}(n-i)}(x)\left[\frac{\partial h}{\partial x_{2n+1}}\right](w(x))\\
&\quad= \Big[X_i h\Big](w(x)),
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
&[X_i(h\circ w)](x)\\
&\quad= (t-1)\left(\left[\frac{\partial h}{\partial x_i}\right](w(x)) + 2\,\mathrm{sign}(n-i)(t+1)x_{i+n\,\mathrm{sign}(n-i)}\left[\frac{\partial h}{\partial x_{2n+1}}\right](w(x))\right)\\
&\quad= (t-1)([X_i h](w(x)) + 4\,\mathrm{sign}(n-i)x_{i+n\,\mathrm{sign}(n-i)}[X_{2n+1}h](w(x))).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$|[X^\alpha(h\circ w)](x)| \leqslant t^{|\alpha|_h}C(|x|)\max_{|\beta|_h\leqslant 2|\alpha|_h}|[X^\beta h](w(x))|, \tag{1.14}$$

где C растет при увеличении $|x|$, $t \in [0, \infty)$.

Пусть g — некоторая гладкая финитная функция, причем носитель функции g содержится в шаре $B(0, R)$. В силу левоинвариантности векторного поля X_i справедлива формула

$$[X_i(g\circ \mathrm{inv}\circ l_{p(y)})](z) = [X_i(g\circ \mathrm{inv})](p(y)z).$$

Так как

$$
\begin{aligned}
[X_i(g\circ \mathrm{inv})](x) &= \sum_{j=1}^{2n+1}\left[\frac{\partial g}{\partial x_j}\right](-x)X_i(-x_j)\\
&= -\left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\right](-x) + 2\,\mathrm{sign}(n-i)x_{i+n\,\mathrm{sign}(n-i)}(-1)\left[\frac{\partial g}{\partial x_{2n+1}}\right](-x)\\
&= -[X_i g](-x) - 4\,\mathrm{sign}(n-i)x_{i+n\,\mathrm{sign}(n-i)}[X_{2n+1}g](-x),
\end{aligned}
$$

то

$$
\begin{aligned}
&[X_i(g\circ \mathrm{inv}\circ l_{p(y)})](z)\\
&\qquad = -[X_i g + 4\,\mathrm{sign}(n-i)(p(y)z)_{i+n\,\mathrm{sign}(n-i)}X_{2n+1}g]((p(y)z)^{-1}),\\
&|[X^\beta(g\circ \mathrm{inv}\circ l_{p(y)})](z)|\\
&\qquad \leqslant C(R)\max_{|\gamma|_h\leqslant 2|\beta|_h}|[X^\gamma g]((p(y)z)^{-1})|,
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

где C растет при увеличении R.

Сопоставляя формулы (1.13), (1.14) и (1.15), получаем, что для любой гладкой функции g выполняется неравенство

$$
|X_x^\alpha[g(x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))]| \leqslant C(R)t^{|\alpha|_h}\max_{|\beta|_h\leqslant 4|\alpha|_h}|[X^\beta g](x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y)|,
$$

C растет при увеличении R.

Подставим последнее неравенство в формулу (1.12), взяв в качестве g функцию $X^\alpha\varphi$,

$$
\begin{aligned}
&|X_x^\alpha X_y^\beta \Gamma(x,y;\varphi)|\\
&\qquad \leqslant C(R)\max_{|\gamma|_h\leqslant 4|\beta|_h}\left(\int_1^\infty |[X^{\alpha+\gamma}\varphi](x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))|t^{2n+1+|\alpha|_h+|\beta|_h}\,dt\right).
\end{aligned}
$$

Учитывая, что значение $\varphi(x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))$ равно нулю для всех $t>\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{|x^{-1}\cdot y|}$, и принимая во внимание связь между функциями φ и φ_0, выводим требуемое неравенство (1.11).

Теорема 2. *Предположим, что для пары областей Ω, Ω' и функции φ_0 выполняются условия леммы* 1. *Тогда для любой функции f класса $C^\infty(\Omega)$ в области Ω' справедливо следующее интегральное представление:*

$$
f(x) = \int_\Omega f(y)\varphi(y)\,dy + \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} K_i(x,y)X_i f(y)\,dy, \quad x\in\Omega', \tag{1.16}
$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{r^{2n+2}}\varphi_0\big(\delta_{r^{-1}}(a^{-1}\cdot x)\big)$, $K_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}\times\mathbb{R}^{2n+1}\setminus\{x=y\})$, *функции* K_i *финитны по второму аргументу и удовлетворяют неравенству*

$$|X_x^\alpha X_y^\beta K_i(x,y)| \leqslant C\left(\alpha,\beta,\varphi_0,R,\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}\right)|x^{-1}\cdot y|^{-(2n+1+|\alpha|_h+|\beta|_h)},$$

C *растет при увеличении* R *и* $\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}$.

Доказательство. Перепишем формулу (1.1), используя коммутационное соотношение (0.1). Получим

$$\begin{aligned} f(x) = &\int_\Omega f(y)\varphi(y)\,dy + \int_\Omega \Gamma(x,y;\varphi)\left(\sum_{i=1}^{2n}(y_i-x_i)X_i f(y)\right)dy \\ &- \int_\Omega \frac{1}{2}\Gamma(x,y;\varphi) \\ &\qquad\times\Big(y_{2n+1}-x_{2n+1}+2\langle x',y''\rangle-2\langle x'',y'\rangle\Big)[X_j,X_{j+n}]f(y)\Big)\,dy, \end{aligned} \tag{1.17}$$

$j \leqslant n$ произвольно.

Далее, из определения однородной нормы вытекают оценки

$$\begin{aligned} &|y_i-x_i| = |(x^{-1}\cdot y)_i| \leqslant |x^{-1}\cdot y|, \quad i=1,\dots,2n, \\ &|y_{2n+1}-x_{2n+1}+2\langle x',y''\rangle-2\langle x'',y'\rangle| \\ &\qquad = |(x^{-1}\cdot y)_{2n+1}| \leqslant |x^{-1}\cdot y|^2. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} &X_{j,y}(y_{2n+1}-x_{2n+1}+2\langle x',y''\rangle-2\langle x'',y'\rangle) \\ &\qquad = 2(y_{j+n}-x_{j+n}), \quad j=1,\dots,n; \\ &X_{j,y}(y_{2n+1}-x_{2n+1}+2\langle x',y''\rangle-2\langle x'',y'\rangle) \\ &\qquad = 2(x_{j-n}-y_{j-n}), \quad j=n+1,\dots,2n, \end{aligned} \tag{1.19}$$

а также соотношения (1.11) и (1.18), выводим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\big|X_x^\alpha X_y^\beta\big((x^{-1}\cdot y)_{2n+1}\Gamma(x,y;\varphi)\big)\big| \\ &\qquad \leqslant C\left(\varphi_0,R,\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}\right)|x^{-1}\cdot y|^{-(2n+|\alpha|_h+|\beta|_h)}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

C растет при росте R и $\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}$.

В силу финитности функции $\Gamma(x;\cdot)$ в последнем слагаемом в правой части равенства (1.17) можно воспользоваться формулой интегрирования по частям. Имеем

$$f(x) = \int\limits_{\Omega} f(y)\varphi(y)\,dy + \int\limits_{\Omega} \Gamma(x,y;\varphi)\left(\sum_{i=1}^{2n}(y_i - x_i)X_i f(y)\right)dy$$
$$+ \int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{2n}\Theta_i(x,y)X_i f(y)\right)dy, \tag{1.21}$$

где $\Theta_i(x,y)$ — функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}\times\mathbb{R}^{2n+1}\setminus\{x=y\})$, удовлетворяющие неравенствам

$$|X_x^\alpha X_y^\beta \Theta_i(x,y)| \leqslant C\left(\varphi_0, R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}\right)|x^{-1}\cdot y|^{-(\nu-1+|\alpha|_h+|\beta|_h)},$$

C возрастает при увеличении R и $\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}$.

Объединяя второе и третье слагаемые в правой части формулы (1.21), получаем требуемое интегральное представление.

Лемма 2. *Пусть функция K класса $C^\infty(\mathbb{H}^n\setminus\{0\})$ положительно однородна степени $-\nu+l$ ($l\in\mathbb{N}$), т. е. $K(\delta_t(x)) = t^{-\nu+l}K(x)$ для любого $t>0$. Тогда для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha|_h = l$, функция $X^\alpha K$ положительно однородна степени $-\nu$ и удовлетворяют соотношению $\int_{S(0,1)} X^\alpha K(z)\,dz = 0$, где $S(0,1)$ — гейзенбергова сфера с центром в 0 радиуса 1.*

Доказательство. Типичен случай $l=1$. Пусть $t>0$, $j\in\{1,\dots,2n\}$. Имеем

$$[X_j(K\circ\delta_t)](z) = t[X_jK](tz).$$

С другой стороны, $[X_j(K\circ\delta_t)](z) = t^{-\nu+1}[X_jK](z)$. Таким образом,

$$[X_jK](tz) = t^{-\nu}[X_jK](z).$$

Покажем, что $\int_{S(0,1)} X_jK(z)\,dz = 0$. Положим $P_1 = (-1,1)^{2n+1}$, $P_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon)^{2n}\times(-\varepsilon^2,\varepsilon^2)$. Рассмотрим область U_ε и векторное поле $\overline{V}$ с компонентами $\delta_{ij}K(x)$ $i=1,\dots,2n$, $2\operatorname{sign}(n-j)x_{j+n\operatorname{sign}(n-j)}K(x)$. Воспользуемся для векторного поля $\overline{V}$ теоремой о дивергенции (формулой Остроградского–Лиувилля). Имеем

$$\int\limits_{U_\varepsilon} \operatorname{div} \overline{V}(y)\, dy = \int\limits_{U_\varepsilon} [X_j K](y)\, dy,$$

$$\int\limits_{\partial U_\varepsilon} \overline{V} \cdot \overline{n}\, d\sigma = \int\limits_{G_j} K(z)\, dz - \int\limits_{G_{j,\varepsilon}} K(z)\, dz + 2\operatorname{sign}(n-j)$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{G_{2n+1}} z_{j+n\operatorname{sign}(n-j)} K(z)\, dz - \int\limits_{G_{2n+1,\varepsilon}} z_{j+n\operatorname{sign}(n-j)} K(z)\, dz \Bigg),$$

где G_j — объединение граней $\{x_j = \mathrm{const}\}$ параллелепипеда P_1, $G_{j,\varepsilon}$ — объединение граней $\{x_j = \mathrm{const}\}$ параллелепипеда P_ε.

Используя однородность функций $K(x)$ (степени $-\nu+1$), $x_{j+n\operatorname{sign}(n-j)} K(x)$ (степени $-\nu+2$) и соотношения

$$\frac{|G_{j,\varepsilon}|}{|G_j|} = \varepsilon^{2n+1}, \quad j = 1, \ldots, 2n, \qquad \frac{|G_{2n+1,\varepsilon}|}{|G_{2n+1}|} = \varepsilon^{2n},$$

получаем $\int_{\partial U_\varepsilon} \overline{V} \cdot \overline{n}\, d\sigma = 0$. В итоге

$$\int\limits_{U_\varepsilon} [X_j K](y)\, dy = 0.$$

Остается использовать однородность степени $-\nu$ функции $X_j K$, в силу которой

$$\sup_\varepsilon \Bigg| \int\limits_{U_\varepsilon} [X_j K](y)\, dy \Bigg| < \infty \Leftrightarrow \int\limits_{S(0,1)} [X_j K](z)\, dz = 0.$$

Лемма 3. *Пусть ядро $K(x, y^{-1}\cdot x) = K(x,z)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{H}^n \times (\mathbb{H}^n \setminus \{0\}))$, однородно степени $-\nu + l$ ($l \in \mathbb{N}$) относительно переменной z. Пусть α — мультииндекс такой, что $|\alpha|_h = l$. Предположим, что $X_x^\alpha K(x,z) \leqslant C|z|^{-\nu+s}$, $j = 1, \ldots, 2n$, где $s > 0$. Пусть Ω — ограниченная область. Обозначим $K_j(x,z) = K_j(x, y^{-1}\cdot x) = X_x^\alpha K_j(x, y^{-1}\cdot x)$. Тогда оператор, переводящий функцию f в функцию $PV \int_{\mathbb{H}^n} K_j(x, y^{-1} \cdot x)\overline{f}(y)\, dy$, где $\overline{f} = f$ в Ω, $\overline{f} = 0$ вне Ω, ограничен в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.*

Доказательство. Типичным является случай $l = 1$. Пусть $j \in \{1, \ldots, 2n\}$. В силу левоинвариантности векторного поля X_j имеем

$$K_j(x,z) = X_{j,x} K(x,z) + X_{j,z} K(x,z) = K'_j(x,z) + K''_j(x,z).$$

Порядок особенности ядра $K_j'(x,z)$ не превосходит $\nu - s$, следовательно, оператор $f \mapsto \int_{\mathbb{H}^n} K_j'(x, y^{-1}\cdot x)\overline{f}(y)\,dy$ ограничен в $L_p(\Omega)$. Далее, отметим, что для фиксированного x функция $K(x,z)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Следовательно, ядро $K_j''(x,z)$ однородно степени $-\nu$ относительно переменной z и удовлетворяет соотношению $\int_{S(0,1)} K_j''(x,z)\,dz = 0$. Таким образом, для ядра $K_j''(x,z)$ выполняются условия обобщения теоремы Зигмунда–Кальдерона на случай групп $\mathbb{H}^n$ [20, 22, 24]. Окончательно получаем, что оператор, определяемый ядром $K_j''(x,z)$, ограничен в смысле $L_p(\Omega)$.

По поводу ограниченности подобных операторов на произвольных группах Карно см. [20, 24].

Предложение 1. *Ядра $K_i(x,z)$ в интегральном представлении* (1.16) *можно представить в виде суммы $K_i'(x,z)+K_i''(x,z)$, где $K_i'(x,z)\in C^\infty(\mathbb{H}^n\times\mathbb{H}^n)$, ядро $K_i''(x,z)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{H}^n\times(\mathbb{H}^n\setminus\{0\}))$ и однородно степени $-\nu+1$ относительно z.*

Доказательство. Имеем

$$\Gamma(x,y;\varphi) = \int_0^1 \varphi(x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))t^{2n+1+|\alpha|_h}\,dt - \int_0^\infty \varphi(x\cdot\delta_t(x^{-1}\cdot y))t^{2n+1+|\alpha|_h}\,dt$$
$$= \Gamma'(x, y^{-1}\cdot x) + \Gamma''(x, y^{-1}\cdot x).$$

Нетрудно видеть, что $\Gamma'(x,z)\in C^\infty(\mathbb{H}^n\times\mathbb{H}^n)$, ядро $\Gamma''(x,z)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{H}^n\times(\mathbb{H}^n\setminus\{0\}))$ и однородно степени $-\nu$ относительно z. Остается воспользоваться тем, что произведение однородных функций есть однородная функция и, что при дифференцировании вдоль векторного поля X_j, $j=1,\dots,2n$, степень однородности понижается на единицу.

1.2. Интегральные представления функций, заданных в областях групп Гейзенберга, с помощью горизонтальных производных произвольного порядка. В этом пункте мы модифицируем метод получения интегральных представлений, разработанный в работах Ю. Г. Решетняка и В. И. Буренкова в евклидовом случае. Вследствие наличия нетривиальных коммутационных соотношений для векторных полей горизонтального подрасслоения применение упомянутого метода на группах Гейзенберга связано с определенными трудностями. Более конкретно, аналог разложения Тейлора на группе $\mathbb{H}^n$ не обладает всеми свойствами разложения Тейлора в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Пусть область $\Omega'\subset\mathbb{H}^n$ звездна в области $\Omega\subset\mathbb{H}^n$ относительно гейзенбергова шара $B(a,r)$, область Ω ограничена, $\Omega\subset B(0,R)$,* *функция* $\varphi_0 \in C_0^\infty(B(0,1))$ *удовлетворяет соотношению* $\int_\Omega \varphi_0(x)\,dx = 1$. *Тогда для любой функции* f *класса* $C^\infty(\Omega)$ *и любого натурального числа* k *в области* Ω' *справедливо интегральное представление*

$$f(x) = \int\limits_\Omega P_k(x,y)f(y)\,dy + \int\limits_\Omega \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2n} K_{i_1\dots i_k}(x,y)X_{i_1}\dots X_{i_k}f(y)\,dy, \quad (1.22)$$

где $x \in \Omega'$; $P_k(\cdot,y)$ — *горизонтальный полином порядка* $k-1$, $\operatorname{supp} P_k(x,\cdot) \subset B$, $|P_k(x,y)| \leqslant C'_k(r,R,\varphi_0)$; $K_{i_1\dots i_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}\times\mathbb{R}^{2n+1}\setminus\{x=y\})$, *функции* $K_{i_1\dots i_k}$ *финитны по второму аргументу и удовлетворяют неравенству*

$$|X_x^\alpha X_y^\beta K_{i_1\dots i_k}(x,y)| \leqslant C\left(\alpha,\beta,\varphi_0,R,\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}\right)|x^{-1}\cdot y|^{-(\nu-k+|\alpha|_h+|\beta|_h)}, \quad (1.23)$$

C *растет при увеличении* R *и* $\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}$.

Доказательство. Для $i,\ j \in \mathbb{N}$ рассмотрим дифференциальные операторы

$$A_j : h(x,y) \mapsto \sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{2n}(x_{i_1}-y_{i_1})(x_{i_2}-y_{i_2})\dots(x_{i_j}-y_{i_j})X_{i_1,y}X_{i_2,y}\dots X_{i_j,y}h(x,y),$$

$$B_i : h(x,y) \mapsto (y^{-1}\cdot x)_{2n+1}^i X_{2n+1,y}^i h(x,y).$$

Учитывая равенства $A_1((x_{i_1}-y_{i_1})(x_{i_2}-y_{i_2})\dots(x_{i_k}-y_{i_k})) = -k(x_{i_1}-y_{i_1})(x_{i_2}-y_{i_2})\dots(x_{i_k}-y_{i_k})$, $B_1((y^{-1}\cdot x)_{2n+1}^k) = -k(y^{-1}\cdot x)_{2n+1}^k$, нетрудно видеть, что для них выполняются реккурентные соотношения $A_1A_k = A_{k+1} - kA_k$, $B_1B_k = B_{k+1} - kB_k$. Кроме того, эти операторы перестановочны, т.е. $A_jB_i = B_iA_j$. Действительно,

$$\begin{aligned}(A_jB_i - B_iA_j)h(x,y) &= \sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{2n}(x_{i_1}-y_{i_1})(x_{i_2}-y_{i_2})\dots(x_{i_j}-y_{i_j}) \\ &\quad\times X_{i_1,y}X_{i_2,y}\dots X_{i_j,y}((y^{-1}\cdot x)_{2n+1}^i)X_{2n+1,y}^i h(x,y).\end{aligned}$$

Далее, учитывая равенства (1.19), легко видеть, что слагаемые $(x_{i_1}-y_{i_1})(x_{i_2}-y_{i_2})\dots(x_{i_j}-y_{i_j})X_{i_1,y}X_{i_2,y}\dots X_{i_j,y}((y^{-1}\cdot x)_{2n+1}^i)$ сократятся.

Перейдем теперь непосредственно к выводу интегрального представления. Пусть задана функция f класса $C^\infty(\Omega)$. Определим по ней функцию двух переменных

$$g_k(x,y)=\sum_{2i+j\leqslant k}\frac{1}{i!j!}B_iA_jf(y).$$

Имеем $g_k(x,x)=f(x)$. Воспользуемся для g_k как функции переменной y интегральным представлением (1.1) в точке $y=x$. Получаем

$$f(x)=g_k(x,y)|_{y=x}=\int_\Omega g_k(x,y)\varphi(y)\,dy-\int_\Omega \Gamma(x,y)(A_1+2B_1)g_k(x,y)\,dy.$$

Имеем

$$\begin{aligned}A_1g_k(x,y)&=\sum_{2i+j\leqslant k}\frac{1}{i!j!}B_iA_1A_jf(y)=\sum_{i=0}^{[k/2]}\frac{1}{i!}B_i\sum_{j=0}^{k-2i}\frac{1}{j!}A_1A_jf(y)\\&=\sum_{i=0}^{[k/2]}\frac{1}{i!}B_i\sum_{j=0}^{k-2i}\frac{1}{j!}(A_{j+1}-jA_j)f(y)\\&=\sum_{i=0}^{[k/2]}\frac{1}{i!}B_i\frac{A_{k-2i+1}}{(k-2i)!}f(y).\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}B_1g_k(x,y)&=\sum_{2i+j\leqslant k}\frac{1}{i!j!}A_jB_1B_if(y)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}A_j\sum_{i=0}^{[(k-j)/2]}\frac{1}{i!}B_1B_if(y)\\&=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}A_j\sum_{i=0}^{[(k-j)/2]}\frac{1}{i!}(B_{i+1}-iB_i)f(y)\\&=\sum_{i=0}^{k}\frac{A_j}{j!}\frac{B_{[(k-j)/2]+1}}{([(k-j)/2])!}f(y).\end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_\Omega g_k(x,y)\varphi(y)\,dy\\&\quad-\int_\Omega\Bigg(\sum_{i=0}^{[k/2]}\frac{B_i}{i!}\frac{A_{k-2i+1}}{(k-2i)!}f(y)+\sum_{i=0}^{k}\frac{A_j}{j!}\frac{B_{[(k-j)/2]+1}}{([(k-j)/2])!}f(y)\Bigg)\\&\qquad\times\Gamma(x,y)\,dy.\end{aligned}\tag{1.24}$$

С помощью формулы интегрирования по частям преобразуем первое слагаемое в представлении (1.24) к виду $\int_\Omega P_k(x,y)f(y)\,dy$. Нетрудно видеть, что функция $P_k(x,y)$ удовлетворяет перечисленным в формулировке теоремы условиям.

Легко доказать следующее неравенство, обобщающее оценку (1.20):

$$\begin{aligned} &X_x^\alpha X_y^\beta((x^{-1}\cdot y)^\gamma \Gamma(x,y)) \\ &\quad \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\varphi_0, R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}\right)|x^{-1}\cdot y|^{-(\nu+|\alpha|_h+|\beta|_h-|\gamma|_h)}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

где α, β, $\gamma\in\mathbb{N}^{2n+1}$, для $z\in\mathbb{H}^n$ символ z^γ обозначает $z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}\ldots z_{2n+1}^{\gamma_{2n+1}}$.

Легко видеть, что $B_iA_{k-2i+1}f(y)$ есть комбинация горизонтальных производных функции $f(y)$ порядка $(k+1)$. Далее, для нечетного $(k-j)$ выражение $A_jB_{[(k-j)/2]}$ есть также комбинация горизонтальных производных функции $f(y)$ порядка $(k+1)$. Для четного $(k-j)$ выражение $A_jB_{[(k-j)/2]+1}$ есть комбинация горизонтальных производных порядка $(k+2)$ функции $f(y)$.

Окончательно, принимая во внимание финитность ядра $K(x,y)$ относительно переменной y, применив формулу интегрирования по частям для части слагаемых (содержащих $A_jB_{[(k-j)/2]+1}$, $(k-j)$ четно) в интегральном представлении (1.24), получаем интегральное представление функции f через горизонтальные производные порядка $(k+1)$. Используя неравенства (1.25), нетрудно получить оценки (1.23) на ядро в выведенном интегральном представлении.

Лемма 4. *Ядра $K_{i_1\ldots i_k}(x,z)$ в интегральном представлении (1.22) можно представить в виде суммы $K'_{i_1\ldots i_k}(x,z)+K''_{i_1\ldots i_k}(x,z)$, где $K'_{i_1\ldots i_k}(x,z)\in C^\infty(\mathbb{H}^n\times\mathbb{H}^n)$, ядро $K''_{i_1\ldots i_k}(x,z)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{H}^n\times(\mathbb{H}^n\setminus\{0\}))$ и однородно степени $-\nu+l$ относительно z. Кроме того, для всякого мультииндекса α такого, что $|\alpha|_h=l$, выполняется неравенство $X_x^\alpha K''_{i_1\ldots i_k}(x,z)\leqslant C|z|^{-\nu+s}$, где $s>0$.*

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству предложения 1 п. 1.1.

1.3. О некоторых классах областей на группах Гейзенберга. Через $B(a,r)$ будем обозначать гейзенбергов шар с центром в точке a радиуса r.

Лемма 5. *Шар $B(a,R)$ является звездным в шаре $B(a,3R)$ относительно шара $B(a,R)$.*

Доказательство. Действительно, пусть x, $y\in B(a,R)$. Требуется показать, что $x\delta_t(x^{-1}\cdot y)\in B(a,3R)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Имеем

$$x^{-1}\cdot y = x^{-1}\cdot a\cdot a^{-1}\cdot y = (a^{-1}\cdot x)^{-1}\cdot a^{-1}\cdot y.$$

Далее, $a^{-1} \cdot x$, $a^{-1} \cdot y \in B(0,R)$. Поэтому $(a^{-1} \cdot x)^{-1} \in B(0,R)$. В силу неравенства треугольника $x^{-1} \cdot y \in B(0,2R)$. Отсюда $\delta_t(x^{-1} \cdot y) \in B(0,2R)$. Еще раз используя неравенство треугольника на группе $\mathbb{H}^n$ [16], получаем $x\delta_t(x^{-1} \cdot y) \in B(a,3R)$.

Определение *условия конуса*, используемого в следующей лемме, было дано в п. 0.2.

Лемма 6. *Предположим, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ удовлетворяет условию конуса. Тогда найдется конечный набор открытых множеств U_i, покрывающих область Ω, таких, что U_i звездны в области Ω относительно некоторых шаров.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in \Omega$. Для нее найдется шар B_x радиуса, не меньшего $C(\Omega)$, такой, что конус $K_x = \{x \cdot \delta_t(x^{-1} \cdot y) \mid y \in \overline{B}_x,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ содержится в Ω. Так как множества K_x и $\partial\Omega$ не пересекаются и компактны, то $\operatorname{dist}(K_x, \partial\Omega) > 0$. Поэтому существует окрестность U_x точки x такая, что множество $\{z \cdot \delta_t(z^{-1} \cdot y) \mid y \in B_x,\ z \in U_x,\ 0 < t \leqslant 1\}$ также содержится в области Ω. Это означает, что множество U_x звездно в области Ω относительно шара B_x. Следовательно, существует счетное покрытие $\{U_i\}$ области Ω такое, что множества U_i звездны в Ω относительно шаров B_i, радиусы которых ограничены снизу положительной постоянной.

Без ограничения общности можно предположить, что все шары B_i имеют один и тот же радиус R, $B_i = B(a_i, R)$. Фиксируем некоторое положительное число $r < R$. Образуем открытое множество $V_1 = \bigcup_j U_j$, объединение берется по тем j, для которых расстояние от центра шара B_j до центра шара B_1 не превосходит r. Очевидно, что все B_j содержат шар $B_1' = B(a_1, R - r)$. Отсюда непосредственно следует, что множество V_1 звездно в Ω относительно этого шара. Далее, выберем некоторое множество U_k, не входящее в V_1. Повторяя предыдущие рассуждения, построим открытое множество V_2, звездное в Ω относительно шара $B_2' = B(a_k, R-r)$. Продолжим этот процесс. Он оборвется на некотором шаге, поскольку центры шаров B_i' содержатся в ограниченной области, а расстояния между любыми двумя из них больше числа r.

Аналог утверждения леммы 6 в евклидовом случае доказан в работе Глушко В. П. [67].

Определение сильного условия Липшица, фигурирующего в лемме 7, тоже можно найти в п. 0.2.

Лемма 7. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ ограничена и удовлетворяет сильному условию Липшица. Тогда области Ω и $C\Omega$ удовлетворяют условию конуса.*

Доказательство. Все точки границы $\partial\Omega$ можно разделить на два класса. Для точек первого класса существует окрестность, внутри которой область Ω в некоторой системе координат представима в виде надграфика липшицевой функции (как описано в определении сильного условия Липшица). Точки второго класса имеют окрестность, внутри которой границы $\partial\Omega$ является $C^{1,1}$-гладкой, причем касательные плоскости к $\partial\Omega$ в этих точках совпадают с горизонтальными плоскостями, привязанными к ним.

Рассмотрим некоторую точку $x \in \overline{\Omega}$. Выберем открытый шар B_x с центром в точке x следующим образом. Если $x \in \Omega$, то пусть $2B_x \subset \Omega$. Если точка x лежит на $\partial\Omega$ и принадлежит первому классу, то будем предполагать, что $2B_x \subset U_x$ и конус $x_N - y_N > L(f_x)\|(x_1, \dots, x_{N-1}) - (y_1, \dots, y_{N-1})\|$ имеет непустое пересечение с горизонтальной плоскостью, привязанной к точке y для любой точки $y \in B_x$. Если точка $x \in \partial\Omega$ принадлежит второму классу, то потребуем чтобы $2B_x \subset U_x$ и область Ω была бы представима или в виде надграфика, или в виде подграфика $C^{1,1}$-гладкой функции f_x в изначальной системе координат. Для достаточно малых шаров все эти требования могут быть удовлетворены.

Шары B_x образуют открытое покрытие компактного множества $\overline{\Omega}$. Выберем из него конечное подпокрытие B_i, $i = 1, \dots, m$.

Перейдем теперь непосредственно к проверке выполнения условия конуса для области Ω. Фиксируем произвольную точку $x \in \Omega$. Она попадет в один из упомянутых шаров B_j. Рассмотрим три случая. В первом случае $2B_j \subset \Omega$. Тогда в качестве конуса K_x можно взять гейзенбергов шар с центром в точке x и радиуса, совпадающего с радиусом шара B_j.

Во втором случае вместе с точкой x в области Ω лежит евклидов конус фиксированного раствора и высоты, имеющий непустое пересечение с горизонтальной плоскостью, привязанной к точке x. Выберем некоторый шар B, содержащийся в этом конусе. Учитывая, что орбиты $\{x \cdot \delta_t(x^{-1} \cdot y)\}$ в точке x касаются горизонтальной плоскости и вогнуты в сторону этой плоскости, получаем, что гейзенбергов конус, имеющий вершиной точку x и основанием шар B, содержится в области Ω.

И наконец, в третьем случае, принимая во внимание формулу, определяющую групповую операцию на $\mathbb{H}^n$, заключаем, что множество $l_{x^{-1}}(2B_j \cap \Omega)$ может быть задано в стандартной системе координат либо соотношением $x_{2n+1} > f(x_1, \dots, x_{2n})$, либо соотношением $x_{2n+1} < f(x_1, \dots, x_{2n})$, где функция f принадлежит классу $C^{1,1}$. Разберем первый случай. Построим гейзенбергов конус с вершиной в точке 0, лежащий над графиком функции f. Имеем $f(0) < 0$. Фиксируем точку y из области определения функции f.

Воспользовавшись формулой Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} f(y) &\leqslant f(0) + (\nabla f(0))y + L(\nabla f)\|(y_1, \ldots, y_{2n})\|^2 \\ &\leqslant (\nabla f(0))y + L(\nabla f)\|(y_1, \ldots, y_{2n})\|^2, \end{aligned}$$

где $L(\nabla f)$ — постоянная Липшица функции ∇f. Отсюда следует, что если $\nabla f(0) = 0$, то требуемым конусом будет являться параболоид

$$x_{2n+1} > L(\nabla f)\|(x_1, \ldots, x_{2n})\|^2.$$

Если же $\nabla f \neq 0$, то в качестве искомого конуса можно взять половину данного параболоида, разрезанного вдоль оси $\{x_1 = \cdots = x_{2n} = 0\}$, соответствующую тем направлениям v в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_{2n}$, для которых $(\nabla f(0))v < 0$.

Далее, очевидно, что пересечение построенного конуса с шаром $l_{x^{-1}}(B_j)$ содержит некоторый замкнутый гейзенбергов шар $\overline{B}$, радиус которого зависит только от постоянной $L(\nabla f)$ и радиуса шара B_j. Поскольку левый сдвиг переводит гейзенбергов шар в гейзенбергов шар того же радиуса, конус $\{x \cdot \delta_t(x^{-1} \cdot y) \mid y \in l_x(\overline{B}),\ 0 < t \leqslant 1\}$ требуемый.

Проверка выполнения условия конуса для области $C\Omega$ проводится аналогично.

Следствие. *Любая область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$, представимая в виде объединения конечной совокупности ограниченных областей с $C^{1,1}$-гладкой границей, удовлетворяет условию конуса.*

§2. Коэрцитивные оценки

Напомним, что областью мы называем открытое связное множество.

Теорема 4. *Пусть ограниченная область Ω удовлетворяет условию конуса. Пусть Q — линейный дифференциальный оператор, переводящий гладкую вектор-функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ в вектор-функцию с компонентами*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha:|\alpha|_h=k} C^j_{i,\alpha} X^\alpha f_i(x), \quad x \in \Omega,\ j = 1, \ldots, l,$$

где α — мультииндекс, $C^j_{i,\alpha}$ — постоянные. Предположим, что оператор Q имеет конечномерное ядро. Тогда найдется семейство проекционных операторов $P_{Q,\varphi}$, переводящих гладкие m-вектор-функции в функции из $\ker(Q)$
и удовлетворяющих неравенствам

1) $\|P_{Q,\varphi}u\| \leqslant C(\Omega, \varphi, Q)\|u\|_{L_1(\Omega)}$,
2) $\|u - P_{Q,\varphi}u\|_{W^k_p(\Omega)} \leqslant C(\Omega, \varphi, Q)\|Qu\|_{L_p(\Omega)}$.

Замечание. Наличие параметра φ в формулировке теоремы отражает то обстоятельство, что строящийся в ходе доказательства теоремы проекционный оператор зависит от усредняющей функции в используемом интегральном представлении типа Соболева.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $X^\alpha g = \mathrm{const}$ для всякого однородного горизонтального полинома g порядка l, если $|\alpha|_h = l$. При этом $X^\alpha g = 0$ для всех мультииндексов α, удовлетворяющих соотношению $|\alpha|_h = l$ тогда и только тогда, когда $g \equiv 0$.

Далее, в силу конечномерности ядра оператора Q, найдется натуральное число l, для которого $\ker Q \cap G_l = 0$, где G_l обозначает линейное пространство всех однородных горизонтальных полиномов порядка l.

Обозначим через $D_{\mathcal{L}}^{l-k}Q$ оператор, переводящий m-вектор-функцию f в вектор-функцию, компоненты которой суть всевозможные горизонтальные производные порядка $l-k$ от компонент вектор-функции Qf. Очевидно, что $D_{\mathcal{L}}^{l-k}Qf = A\nabla_{\mathcal{L}}^l f$, где A — матрица с постоянными элементами, а $\nabla_{\mathcal{L}}^l f$ — вектор-функция, компоненты которой суть всевозможные горизонтальные производные порядка l компонент вектор-функции f.

Далее, нетрудно видеть, что линейное отображение $\nabla_{\mathcal{L}}^l : g \mapsto \nabla_{\mathcal{L}}^l g$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между пространством однородных полиномов и пространством векторов соответствующей размерности.

Из того, что $\ker Q \cap G_l = 0$, следует, что $\ker D_{\mathcal{L}}^{l-k}Q \cap G_l = 0$. Рассматривая $\nabla_{\mathcal{L}}^l$ как отображение, задающее систему координат в G_l, получаем, что матрица A обратима. Отсюда имеем $\nabla_{\mathcal{L}}^l f = A^{-1}D_{\mathcal{L}}^{l-k}Qf$. Таким образом, все горизонтальные производные порядка l компонент вектор-функции f могут быть представлены в виде линейных комбинаций горизонтальных производных порядка $l-k$ компонент Qf.

Представим Ω в виде объединения конечного набора областей U_i, удовлетворяющих требованиям леммы 6. В каждой области U_i воспользуемся интегральным представлением типа Соболева. Имеем

$$f(x) = (P_{l,\varphi}^i f)(x) + \int\limits_\Omega K_l^i(x,y)\nabla_{\mathcal{L}}^l f(y)\,dy, \quad x \in U_i.$$

Отсюда

$$f(x) = (P_{l,\varphi}^i f)(x) + \int\limits_\Omega K_l^i(x,y)A^{-1}D_{\mathcal{L}}^{l-k}Qf(y)\,dy, \quad x \in U_i.$$

Воспользовавшись $l-k$ раз формулой интегрирования по частям во втором слагаемом последнего равенства, получаем

$$f(x) = (P^i_{l,\varphi} f)(x) + \int\limits_{\Omega} H_i(x,y) Q f(y)\, dy, \quad x \in U_i, \tag{2.1}$$

где $H_i(x,y)$ — матричная функция. Нетрудно видеть, что компоненты $H_i(x,y)$ удовлетворяют условиям обобщения теоремы Зигмунда–Кальдерона на случай групп $\mathbb{H}^n$ [20, 22], см. леммы 2, 3 п. 1.1, лемму 4 п. 1.2.

Проекционные операторы $P^i_{l,\varphi}$, переводящие функции класса $L_1(B_i)$ в горизонтальные полиномы порядка не выше $l-1$, соответствуют одной гладкой финитной функции φ с точностью до растяжения и левого сдвига.

Далее, отметим, что существует линейный проекционный оператор $P_{l,Q}$, определенный на пространстве полиномов степени не выше l и удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ P_{l,Q} g \in \ker Q,\\ &2)\ \|P_{l,Q} g\| \leqslant C_0(l,\Omega) \|g\|_{L_1(\Omega)},\\ &3)\ \|g - P_{l,Q} g\|_{W^1_p(\Omega)} \leqslant C_1(l,\Omega) \|Qg\|_{L_p(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где g — произвольный полином степени не выше l.

Последнее утверждение является простым следствием следующей леммы.

Лемма 8. *Пусть V — линейное конечномерное пространство, $A : V \mapsto V$ — некоторое линейное отображение, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ — нормы в пространстве V. Тогда существует линейный проекционный оператор P_A такой, что $P_A v \in \ker A$ для любого вектора $v \in V$, и выполняется неравенство $\|v - P_A v\|_1 \leqslant C \|Av\|_2$.*

Доказательство. Доказать это утверждение несложно. Достаточно использовать эквивалентность различных нормировок и ограниченность линейных операторов в конечномерном векторном пространстве. Действительно, обозначим через $\|.\|$ евклидову норму в пространстве V. Возьмем в качестве P_A ортогональный проектор на подпространство $\ker A$. Пусть V_1 — ортогональное дополнение подпространства $\ker A$. Тогда вектор $v - P_A v$ принадлежит V_1. Оператор A взаимно-однозначен на V_1. Следовательно, существует линейный оператор A' такой, что ограничение оператора $A' \circ A$ на V_1 есть тождественный оператор. В силу конечномерности V_1 оператор A' ограничен. Далее, $A(v - P_A v) = Av$. Отсюда $v - P_A v = A'(Av)$, $\|v - P_A v\| \leqslant C \|Av\|$. Учитывая эквивалентность различных нормировок пространства V, получаем требуемое неравенство.

Отметим, что выбор области Ω влияет на соответствующие нормировки.

В качестве проекционного оператора, определенного на множестве всех гладких m-вектор-функций, заданных на B_i, возьмем суперпозицию $P^i_{Q,\varphi} = P_{Q,l} \circ P^i_{l,\varphi}$. Линейность и ограниченность оператора $P^i_{Q,\varphi}$ тривиальным образом вытекают из линейности и ограниченности операторов $P_{Q,l}$, $P^i_{l,\varphi}$.

Обозначим

$$R_i f = \int\limits_{\Omega} H_i(x,y) Qf(y)\, dy.$$

Для $x \in U_i$ имеем $f(x) = P^i_{l,\varphi} f(x) + R_i f(x)$.

Далее, учитывая (2.1), (2.2), получаем

$$\begin{aligned}
\|f - P^i_{Q,\varphi} f\|_{W^k_p(U_i)} &= \|f - P_{Q,l} \circ P^i_{l,\varphi} f\|_{W^k_p(U_i)} \\
&\leqslant \|f - P^i_{l,\varphi} f\|_{W^k_p(U_i)} + \|P^i_{l,\varphi} f - P_{Q,l} \circ P^i_{l,\varphi} f\|_{W^k_p(U_i)} \\
&\leqslant \|R_i f\|_{W^k_p(U_i)} + C\|Q(P^i_{l,\varphi} f)\|_{L_p(U_i)} \\
&\leqslant C\|Qf\|_{L_p(\Omega)} + C\|Q(f - R_i f)\|_{L_p(U_i)} \leqslant C\|Qf\|_{L_p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $10B_i \subset \Omega$ для всех i. Фиксируем любые два шара B_i, B_j из рассматриваемого набора. Соединим их цепочкой шаров $S_1, \dots, S_m$ таких, что $S_1 = B_i$, $S_m = B_j$ и множества S_k звездны в Ω относительно шаров S_k и S_{k+1}. Применяя доказанные ранее неравенства и учитывая, что для всякого полинома G степени не выше $l-1$ выполняется $\|G\|_{W^k_p(\Omega)} \leqslant C\|G\|_{W^k_p(S_i)}$, $i = 1, \dots, m$, получаем

$$\|P^i_{Q,\varphi} f - P^j_{Q,\varphi} f\|_{W^k_p(\Omega)} \leqslant C\|Qf\|_{L_p(\Omega)}.$$

Окончательно в качестве проекционного оператора $P_{Q,\varphi}$ можно взять любой из операторов $P^i_{Q,\varphi}$. Теорема доказана. •

Теорема 4 и метод ее доказательства являются новыми и в евклидовом случае [68].

Следствие. *Пусть ограниченная область Ω удовлетворяет условию конуса. Пусть Q — линейный дифференциальный оператор, переводящий гладкую вектор-функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ в вектор-функцию с компонентами*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha : |\alpha|_h = k} C^j_{i,\alpha} X^\alpha f_i(x), \quad x \in \Omega, \ j = 1, \dots, l,$$

где α — мультииндекс, $C^j_{i,\alpha}$ — постоянные. Предположим, что оператор Q имеет конечномерное ядро. Тогда стандартные нормировки пространств $W_{Q,p}(\Omega)$ и $W^k_p(\Omega)$ эквивалентны.

§3. Теоремы вложения

3.1. Обобщенные неравенства Пуанкаре.

Теорема 5. *Пусть ограниченная область Ω связна и удовлетворяет условию конуса с постоянной r, $\Omega \subset B(0,R)$. Пусть $1 < p \leqslant \infty$. Тогда для всякого $k \in \mathbb{N}$ найдется проекционный оператор P_k, переводящий функции класса $W_p^k(\Omega)$ в горизонтальные полиномы степени не выше $k-1$, такой, что справедливы неравенства*

$$\|X^\alpha(f - P_k f)\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\left(R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}, \alpha\right) r^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\ldots X_{i_k} f \right\|_{L_p(\Omega)}; \quad (3.1)$$

$$\|X^\alpha(f - P_k f)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C\left(R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}, \alpha\right) r^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}} \times \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\ldots X_{i_k} f \right\|_{L_p(\Omega)}, \quad \text{если } k - |\alpha|_h > \frac{\nu}{p};$$

$$\|X^\alpha(f - P_k f)\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\left(R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}, \alpha\right) r^{k-|\alpha|_h} \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\ldots X_{i_k} f \right\|_{L_p(\Omega)}, \quad (3.2)$$

где α — мультииндекс, $|\alpha|_h \leqslant k$; $1 < p \leqslant q$; $q \neq \infty$; $q \leqslant \frac{\nu p}{\nu-(k-|\alpha|_h)p}$, если $p < \frac{\nu}{k-|\alpha|_h}$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что неравенство (3.2) является частным случаем неравенств (3.1).

Применяя лемму 6 п. 1.3, представим область Ω в виде объединения конечной совокупности открытых множеств U_i, звездных в области Ω относительно некоторых шаров B_i. Их количество оценивается с помощью постоянной $\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}$. Используя интегральное представление (1.22), оценки (1.23), неравенства Гёльдера и Юнга и некоторые известные результаты о потенциалах Рисса на группах $\mathbb{H}^n$ (см., например, [51]), нетрудно доказать неравенство

$$
\begin{aligned}
&\|X^\alpha f\|_{L_q(U_i)} \\
&\quad \leqslant C\Big(R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}, \alpha\Big) \\
&\qquad \times \left(r^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \Big\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\dots X_{i_k} f \Big\|_{L_p(\Omega)} + r^{-|\alpha|_h}\|f\|_{L_q(B_i)} \right). \quad (3.3)
\end{aligned}
$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $10B_i \subset \Omega$ для всех i. В силу связности области Ω любой шар B_i можно соединить с шаром B_1 конечной цепочкой попарно-пересекающихся шаров B_i^j таких, что $5B_i^j \subset \Omega$. Учитывая звездность шаров B_i^j в $3B_i^j$ относительно любого шара, содержащегося в пересечении $B_i^j \cap B_i^{j+1}$, приходим к неравенству

$$
\begin{aligned}
&\|f\|_{L_q(B_i)} \\
&\quad \leqslant C\Big(R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}\Big)\left(r^{k-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \Big\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\dots X_{i_k} f \Big\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_q(B_1)} \right).
\end{aligned}
$$

Отсюда, принимая во внимание (3.3), получаем

$$
\begin{aligned}
&\|X^\alpha f\|_{L_q(\Omega)} \\
&\quad \leqslant C\Big(R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}, \alpha\Big) \\
&\qquad \times \left(r^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \Big\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\dots X_{i_k} f \Big\|_{L_p(\Omega)} + r^{-|\alpha|_h}\|f\|_{L_q(B_1)} \right). \quad (3.4)
\end{aligned}
$$

Воспользуемся для функции f интегральным представлением (1.22) в шаре B_1. Получим

$$
f(x) - P_k^{B_1} f(x) = \int\limits_{3B_1} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2n} K_{i_1\dots i_k}(x,y) X_{i_1}\dots X_{i_k} f(y)\, dy,
$$

где $P_k^{B_1} f(x) = \int_\Omega P_k(x,y) f(y)\, dy$ — горизонтальный полином порядка не выше $k-1$, ядра $K_{i_1\dots i_k}(x,y)$ удовлетворяют неравенствам (1.23). Имеем

$$
\|f(x) - P_k^{B_1} f(x)\|_{L_q(B_1)} \leqslant C r^{k-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \Big\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\dots X_{i_k} f \Big\|_{L_q(5B_1)}. \quad (3.5)
$$

Обозначим $P_k = P_k^{B_1}$. Подставляя функцию $f - P_k f$ вместо f в неравенство (3.4), в силу (3.5) получаем первое требуемое неравенство. Второе неравенство доказывается аналогично.

Замечание. Если $k = 1$ и область Ω — шар, то утверждение теоремы 5 другим способом доказано в ряде работ (см., например, [29, 32, 33, 36, 43]).

Следствие. *Пусть ограниченная область Ω связна и удовлетворяет условию конуса. Пусть $p > 1$. Тогда для всякого ограниченного в смысле нормы пространства $L_p(\Omega)$ проекционного оператора Π_k, переводящего функции класса $W_p^k(\Omega)$ в горизонтальные полиномы степени не выше $k-1$, справедливо неравенство*

$$\|f - \Pi_k f\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C(\Omega, \Pi_k)\left\|\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\ldots X_{i_k} f\right\|_{L_p(\Omega)},$$

где $1 < p \leqslant q$; $q \leqslant \frac{\nu p}{\nu - kp}$, *если* $p < \frac{\nu}{k}$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что в силу конечномерности пространства горизонтальных полиномов степени не выше k ограниченность оператора Π_k в смысле пространства L_p влечет его ограниченность в смысле пространств L_q для всех $q \geqslant p$. Пусть P_k — проекционный оператор из условия теоремы 5. Из неравенства треугольника выводим

$$\begin{aligned}
&\|f - \Pi_k f\|_{L_q(\Omega)} \\
&\quad\leqslant \|f - P_k f\|_{L_q(\Omega)} + \|P_k f - \Pi_k f\|_{L_q(\Omega)} \\
&\quad= \|f - P_k f\|_{L_q(\Omega)} + \|\Pi_k(f - P_k f)\|_{L_q(\Omega)} \leqslant (1 + \|\Pi_k\|)\|f - P_k f\|_{L_q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Требуемое неравенство непосредственно вытекает из теоремы 5.

Используя известные результаты о потенциалах типа Рисса на метрических пространствах, получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть ограниченная область Ω связна и удовлетворяет условию конуса. Пусть $p > 1$, μ есть мера на $\mathbb{H}^n$ такая, что $\mu(B(R)) \leqslant CR^s$, где $B(R)$ — шар в метрике Гейзенберга радиуса R. Тогда для всякого ограниченного в смысле нормы пространства $L_{p,\mu}(\Omega)$ проекционного оператора Π_k, переводящего функции класса $W_p^k(\Omega)$ в горизонтальные полиномы степени не выше $k-1$, справедливо неравенство*

$$\|f - \Pi_k f\|_{L_{q,\mu}(\Omega)} \leqslant C(\Omega, \mu, \Pi_k)\left\|\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\ldots X_{i_k} f\right\|_{L_p(\Omega)},$$

где $1 < p \leqslant q$; $q \leqslant \frac{sp}{s-kp}$, *если* $p < \frac{s}{k}$.

Теорема 6. *Пусть ограниченная область* Ω *связна и удовлетворяет условию конуса с постоянной* r, $\Omega \subset B(0,R)$. *Пусть* $p > 1$. *Пусть* Q — *линейный дифференциальный оператор, переводящий гладкую вектор-функцию* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *в вектор-функцию с компонентами*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha:|\alpha|_h=k} C_{i,\alpha}^{j} X^\alpha f_i(x), \quad x \in \Omega, \ j = 1,\dots,l,$$

где α — *мультииндекс,* $C_{i,\alpha}^{j}$ — *постоянные. Предположим, что оператор* Q *имеет конечномерное ядро. Тогда найдется оператор* P_Q, *переводящий гладкие* m-*вектор-функции, заданные на* Ω, *в горизонтальные полиномы степени не выше* $s(Q)$, *такой, что справедливы неравенства*

$$\|X^\alpha(f - P_Q f)\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\left(R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}, \alpha\right) r^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \|Qf\|_{L_p(\Omega)},$$

$$\|X^\alpha(f - P_Q f)\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\left(R, \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{r}, \alpha\right) r^{k-|\alpha|_h} \|Qf\|_{L_p(\Omega)},$$

где α — *мультииндекс,* $|\alpha|_h \leqslant k$; $1 < p \leqslant q < \infty$; $q \leqslant \frac{\nu p}{\nu-(k-|\alpha|_h)p}$, *если* $p < \frac{\nu}{k-|\alpha|_h}$.

Доказательство этой теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 5. Единственное отличие состоит в том, что в нем следует использовать интегральное представление (2.1).

3.2. Теоремы вложения. Напомним, что символом ν обозначена однородная размерность группы $\mathbb{H}^n$. Через L_M в дальнейшем будем обозначать пространство Орлича, порожденное функцией $M(x) = e^{|x|^2} - |x|^2 - 1$.

Лемма 9. *Пусть* f *есть некоторая гладкая функция, заданная на ограниченной области* Ω, *удовлетворяющей условию конуса. Пусть* $p > 1$, l — *целое неотрицательное число, не превосходящее* k. *Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$\|\nabla_{\mathcal{L}}^l f\|_{L_{\frac{\nu p}{\nu-(k-l)p}}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W_p^k(\Omega)}, \quad \text{если } p < \frac{\nu}{k-l},$$

$$\|\nabla_{\mathcal{L}}^l f\|_{L_M(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W_p^k(\Omega)}, \quad \text{если } p = \frac{\nu}{k-l},$$

$$\|\nabla_{\mathcal{L}}^l f\|_{C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W_p^k(\Omega)}, \quad \text{если } p > \frac{\nu}{k-l}.$$

Доказательство. В силу леммы 6 найдется конечный набор открытых множеств U_i, покрывающих область Ω и таких, что U_i звездны в Ω относительно некоторых шаров. Из интегрального представления (1.22), оценок (1.23) и обобщений известных результатов о потенциале Рисса на случай групп Гейзенберга (см., например, [17]) немедленно следует, что для любого мультииндекса $\alpha : |\alpha|_h < k$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|X^\alpha f\|_{L_{\frac{\nu p}{\nu-(k-|\alpha|_h)p}}(U_i)} &\leqslant C_i\|f\|_{W_p^k(\Omega)}, &\quad \text{если } p < \frac{\nu}{k-|\alpha|_h}, \\ \|X^\alpha f\|_{L_M(U_i)} &\leqslant C_i\|f\|_{W_p^k(\Omega)}, &\quad \text{если } p = \frac{\nu}{k-|\alpha|_h}, \\ \|X^\alpha f\|_{C(U_i)\cap L_\infty(U_i)} &\leqslant C_i\|f\|_{W_p^k(\Omega)}, &\quad \text{если } p > \frac{\nu}{k-|\alpha|_h}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что все упомянутые нормы удовлетворяют соотношению субаддитивности, получаем требуемые оценки на норму $\nabla^l_{\mathcal{L}} f$.

Следующая лемма доказывается аналогично предыдущей.

Лемма 10. *Пусть μ есть некоторая мера на $\mathbb{H}^n$ такая, что $\mu(B(R)) \leqslant CR^l$, где $B(R)$ — шар в метрике Гейзенберга радиуса R. Пусть ограниченная область Ω удовлетворяет условию конуса. Пусть $p > 1$. Тогда для любой гладкой функции $f \in C^\infty(\Omega)$ выполняется неравенство*

$$\|f\|_{L_{\frac{sp}{s-kp}}(\Omega,\mu)} \leqslant C\|f\|_{W_p^k(\Omega)}, \quad p < \frac{s}{k}.$$

Теперь нетрудно доказать основной результат этого пункта.

Теорема 7. *Предположим, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ удовлетворяет условию конуса. Пусть μ есть некоторая мера на $\mathbb{H}^n$, причем $\mu(B(R)) \leqslant CR^s$, где $B(R)$ — шар в метрике Гейзенберга радиуса R. Пусть $p > 1$. Тогда имеют место следующие вложения функциональных пространств:*

$$\begin{aligned} &W_p^k(\Omega) \subset L_{\frac{\nu p}{\nu-kp}}(\Omega), &\quad &\textit{если } p < \frac{\nu}{k}; \\ &W_p^k(\Omega) \subset L_M(\Omega), &&\textit{если } p = \frac{\nu}{k}; \\ &W_p^k(\Omega) \subset C(\Omega), &&\textit{если } p > \frac{\nu}{k}; \\ &W_p^k(\Omega) \subset V^l_{\frac{\nu p}{\nu-(k-l)p}}(\Omega), &&\textit{если } l \leqslant k,\ p < \frac{\nu}{k-l}; \\ &W_p^k(\Omega) \subset L_{\frac{sp}{s-kp}}(\Omega,\mu), &&\textit{если } p < \frac{s}{k}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Доказательство. Фиксируем некоторую функцию f класса Соболева W^k_p. Положим $q = \frac{\nu p}{\nu - kp}$. По определению существует последовательность гладких в области Ω функций, сходящаяся к функции f по норме соответствующего пространства Соболева. Из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к функции f. Все функции этой последовательности принадлежат L_q при $p < \frac{\nu}{k}$, L_M при $p = \frac{\nu}{k}$. Эта последовательность фундаментальна по норме пространства L_q при $p < \frac{\nu}{k}$, L_M при $p = \frac{\nu}{k}$, $C(\overline{U})$ для всякого $U \Subset \Omega$ при $p > \frac{\nu}{k}$. В силу полноты упомянутых пространств она сходится к некоторой функции класса L_q при $p < \frac{\nu}{k}$, L_M при $p = \frac{\nu}{k}$, $C(\overline{U})$ для всякого $U \Subset \Omega$ при $p > \frac{\nu}{k}$. Из этой (второй) последовательности можно еще раз извлечь подпоследовательность, которая сходится почти всюду к упомянутой функции. В итоге получаем, что функция f принадлежит классу L_q при $p < \frac{\nu}{k}$, L_M при $p = \frac{\nu}{k}$, и совпадает почти всюду с некоторой функцией класса $C(\Omega)$ при $p > \frac{\nu}{k}$.

Включение (3.6) доказывается аналогично.

Следствие. *Пусть ограниченная область Ω удовлетворяет условию конуса. Пусть $p > 1$. Тогда функциональные пространства $V^k_p(\Omega)$ и $W^k_p(\Omega)$ совпадают.*

Предложение 3. *Пусть область Ω ограничена. Пусть $p > 1$. Тогда функциональные пространства $V^{k,p}_0(\Omega)$, $W^{k,p}_0(\Omega)$ и $L^{k,p}_0(\Omega)$ совпадают.*

Доказательство. Предположим, что область Ω содержится в гейзенберговом шаре $B(0, R)$. Фиксируем шар $B(a, r) \subset B(0, 3R) \setminus B(0, 2R)$. Рассматривая в качестве области определения функции f область $B(0, 9R)$, отметим, что область Ω звездна в $B(0, 9R)$ относительно шара $B(a, r)$. Для доказательства требуемого утверждения остается воспользоваться интегральным представлением (1.22) и оценками (1.23).

Доказательство следующих утверждений основано на использовании теоремы о продолжении [42].

Теорема 8. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ удовлетворяет (ε, δ)-условию. Предположим, что $p > \frac{\nu}{k}$. Тогда имеют место следующие вложения функциональных пространств:*

$$V^k_p(\Omega) \subset C^{k-\frac{\nu}{p}}(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. Пусть область Ω удовлетворяет перечисленным условиям. Рассмотрим функцию f класса $V^k_p(\Omega)$. Пусть E_k — ограниченный оператор продолжения. Требуется показать, что для п. в. x, $y \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\frac{|X^\alpha f(x) - X^\alpha f(y)|}{\rho(x,y)^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}}} \leqslant C(f), \tag{3.7}$$

где α — мультииндекс такой, что $|\alpha|_h = \left[k - \frac{\nu}{p}\right]$.

Очевидно, что в неравенстве (3.7) можно заменить функцию f на $E_k f$. Фиксируем некоторую гладкую финитную функцию g, близкую к $E_k f$ в смысле нормы пространства $V_0^{k,p}(\mathbb{H}^n)$. Воспользуемся для нее обобщенным неравенством Пуанкаре (3.1) в шаре $B = B(x, 3\rho(x,y))$. Имеем

$$\|X^\alpha(g - P_k g)\|_{L_\infty(B)} \leqslant C(\Omega,\alpha) r^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}} \Bigg\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2n} X_{i_1}\dots X_{i_k} g \Bigg\|_{L_p(\Omega)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}|X^\alpha g(x) - X^\alpha g(y)| &\leqslant \left|X^\alpha P_k g(x) - X^\alpha P_k g(y)\right| + C(\Omega,\alpha) r^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}} \|g\|_{L_0^{k,p}(\mathbb{H}^n)} \\ &\leqslant C'(\Omega,\alpha) r^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}} \|E_k f\|_{L_0^{k,p}(\mathbb{H}^n)} \\ &\leqslant C''(\Omega,\alpha) r^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}} \|f\|_{V_p^k(\mathbb{H}^n)}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{|X^\alpha g(x) - X^\alpha g(y)|}{\rho(x,y)^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}}} \leqslant C(\Omega,\alpha)\|f\|_{V_p^k(\mathbb{H}^n)}.$$

Переходя к пределу при g, стремящемся к $E_k f$ в норме пространства $V_p^k(\mathbb{H}^n)$, получаем, что для п. в. x, $y \in \mathbb{H}^n$ выполняется неравенство

$$\frac{|X^\alpha E_k f(x) - X^\alpha E_k f(y)|}{\rho(x,y)^{k-|\alpha|_h-\frac{\nu}{p}}} \leqslant C(\Omega,\alpha)\|f\|_{V_p^k(\mathbb{H}^n)}.$$

В силу того, что функция $E_k f$ совпадает с f п. в. в области Ω, отсюда вытекает утверждение теоремы.

Следствие 1. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ удовлетворяет условию конуса и (ε,δ)-условию. Предположим, что $p > \frac{\nu}{k}$. Тогда имеют место следующие вложения функциональных пространств:*

$$W_p^k(\Omega) \subset C^{k-\frac{\nu}{p}}(\overline{\Omega}).$$

Следствие 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ — ограниченная область с C^2-гладкой границей. Предположим, что $p > \frac{\nu}{k}$. Тогда имеют место следующие вложения функциональных пространств:*

$$W_p^k(\Omega) \subset C^{k-\frac{\nu}{p}}(\overline{\Omega}).$$

Замечание. В заметке [70] в формулировке теоремы 1 мною допущена неточность. Первое слагаемое в соответствующем интегральном представлении следует заменить выражением

$$\int_\Omega P_k(x,y;\varphi)f(y)\,dy,$$

где $P_k(\cdot,y;\varphi)$ — горизонтальный полином порядка $k-1$, $\operatorname{supp} P_k(x,\cdot;\varphi) \subset B$, $|P_k(x,y;\varphi)| \leqslant C(\Omega,\varphi)$.

Список литературы

[1] Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.

[2] Nečas J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris; Academia, Prague, 1967.

[3] Никольский С. М., *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969 (1-ое изд.), 1977 (2-ое изд.).

[4] Стейн И., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[5] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.

[6] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г., *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.

[7] Мазья В. Г., *Пространства С. Л. Соболева*, ЛГУ, Л., 1985.

[8] Adams D. R., Hedberg L. I., *Function spaces and potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 314, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[9] Burenkov V. I., *Sobolev spaces on domains*, Teubner-Texte Math., vol. 137, Teubner, Stuttgart, 1998.

[10] Решетняк Ю. Г., *Теоремы устойчивости в геометрии и анализе*, Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, 1996.

[11] Aronszajn N., Mulla F., Szeptycki P., *On spaces of potentials connected with L_p classes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **13** (1963), 211–306.

[12] Бесов О. В., Ильин В. П., *Естественное расширение класса областей в теоремах вложения*, Мат. сб. **75(117)** (1968), №4, 483–495.

[13] Smith K. T., *Formulas to represent functions by their derivatives*, Math. Ann. **188** (1970), 53–77.

[14] Решетняк Ю. Г., *Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций*, Сиб. мат. ж. **12** (1971), №2, 420–432.

[15] Успенский С. В., *О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **117** (1972), 292–299.

[16] Буренков В. И., *Интегральное представление Соболева и формула Тейлора*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **131** (1974), 33–38.

[17] Перепелкин В. Г., *Интегральные представления функций, принадлежащих весовым классам С. Л. Соболева в областях, и некоторые приложения*. I, II, Сиб. мат. ж. **17** (1976), 119–140, 318–330.

[18] Goodman R. W., *Nilpotent Lie groups: structure and applications to analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 562, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.

[19] Coifman R., Weiss G., *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes*, Étude de Certaines Intégrales Singulières, Lecture Notes in Math., vol. 242, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.

[20] Folland G. B., *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat. **13** (1975), no. 2, 161–207.

[21] Folland G. B., Stein E. M., *Hardy spaces on homogeneous groups*, Math. Notes, vol. 28, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1982.

[22] Korányi A., Vági S., *Singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **25** (1971), 575–648 (1972).

[23] Korányi A., Reimann H. M., *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Adv. Math. **111** (1995), no. 1, 1–87.

[24] Rothschild L. P., Stein E. M., *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1976), 247–320.

[25] Gromov M., *Carnot–Carathéodory spaces seen from within*, Preprint no. IHES/M/94/6, Inst. Hautes Études Sci., Bures–sur–Yvette, 1994.

[26] Gromov M., Pansu P., *Rigidity of lattices: an introduction*, Geometric Topology: Recent Development (Montecatini Terme, 1990), Lecture Notes in Math., vol. 1504, Springer, Berlin, 1991, pp. 39–137.

[27] Nagel A., Stein E. M., Wainger S., *Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties*, Acta Math. **155** (1985), 103–147.

[28] Pansu P., *Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. (2) **129** (1989), 1–60.

[29] Jerison D., *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition*, Duke Math. J. **53** (1986), no. 2, 503–523.

[30] Jerison D., Lee J. M., *Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 1, 1–13.

[31] Jerison D., Sánchez-Calle A., *Subelliptic, second order differential operators*, Complex Analysis, III (College Park, Md., 1985–86), Lecture Notes in Math., vol. 1277, Springer, Berlin, 1987, pp. 46–77.

[32] Franchi B., *Weighted Sobolev–Poincaré inequalities and pointwise estimates for a class of degenerate elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), 125–158.

[33] Franchi B., Gutiérrez C. E., Wheeden R. L., *Weighted Sobolev–Poincaré inequalities for Grushin type operators*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), 523–604.

[34] Franchi B., Lanconelli E., *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **10** (1983), no. 4, 523–541.

[35] Franchi B., Lanconelli E., *An embedding theorem for Sobolev spaces related to nonsmooth vector fields and Harnack inequality*, Comm. Partial Differential Equations **9** (1984), 1237–1264.

[36] Franchi B., Lu G., Wheeden R. L., *Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **45** (1995), no. 2, 577–604.

[37] Franchi B., Lu G., Wheeden R. L., *A relationship between Poincaré-type inequalities and representation formulas in spaces of homogeneous type*, Internat. Math. Res. Notices **1996**, no. 1, 1–14.

[38] Capogna L., Garofalo N., *Boundary behavior of nonnegative solutions of subelliptic equations in NTA domains for Carnot–Carathéodory metrics*, J. Fourier Anal. Appl. **4** (1998), no. 4–5, 403–432.

[39] Danielli D., *Formules de représentation et théorèmes d'inclusion pour des opérateurs sous-elliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **314** (1992), no. 13, 987–990.

[40] Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.-M., *Trace inequalities for Carnot – Carathéodory spaces and applications*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **27** (1998), no. 2, 195–252 (1999).

[41] Garofalo N., Lanconelli E., *Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), no. 1, 71–98.

[42] Garofalo N., Nhieu D.-M., *A general extension theorem for Sobolev spaces arising from system of non-commuting vector fields*, Preprint, 1996.

[43] Hajlazs P., Koskela P., *Sobolev met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc. **145** (2000), no. 688.

[44] Hajlasz P., Martio O., *Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains*, J. Funct. Anal. **143** (1997), 221–246.

[45] Heinonen J., Koskela P., *Weighted Sobolev and Poincaré inequalities and quasiregular mappings of polynomial type*, Math. Scand. **77** (1995), 251–271.

[46] Lu G., *Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications*, Rev. Mat. Iberoamericana **8** (1992), no. 3, 367–439.

[47] Lu G., *Existence and size estimates for the Green's functions of differential operators constructed from degenerate vector fields*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 1213–1251.

[48] Lu G., *Embedding theorems into Lipschitz and BMO spaces and applications to quasilinear subelliptic differential equations*, Publ. Mat. **40** (1996), 301–329.

[49] Lu G., *A note on a Poincaré type inequality for solutions to subelliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **21** (1996), 235–254.

[50] Водопьянов С. К., *L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах*, Современные проблемы геометрии и анализа, Тр. Ин-та мат. СО АН СССР, т. 14, Наука, СО, Новосибирск, 1989, сс. 45–89.

[51] Водопьянов С. К., *Весовая L_p-теория потенциала на однородных группах*, Сиб. мат. ж. **33** (1992), №2, 29–48.

[52] Водопьянов С. К., *Квазиконформные отображения на группах Карно и их применения*, Докл. РАН **347** (1996), №4, 439–442.

[53] Водопьянов С. К., *Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно*, Сиб. мат. ж. **37** (1996), №6, 1269–1295.

[54] Водопьянов С. К., Грешнов А. В., *О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой*, Сиб. мат. ж. **36** (1995), №5, 1015–1048.

[55] Водопьянов С. К., Грешнов А. В., *Аналитические свойства квазиконформных отображений на группах Карно*, Сиб. мат. ж. **36** (1995), №6, 1317–1327.

[56] Водопьянов С. К., Грешнов А. В., *Продолжение дифференцируемых функций и квазиконформные отображения на группах Карно*, Докл. РАН **348** (1996), №1, 15–18.

[57] Водопьянов С. К., Черников В. М., *Пространства Соболева и гипоэллиптические уравнения*, Линейные операторы, согласованные с порядком, Тр. Ин-та мат. СО РАН, т. 29, Ин-т мат. СО РАН, Новосибирск, 1995, сс. 7–62.

[58] Vodop'yanov S. K., *$\mathcal{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics*, Труды по анализу и геометрии, Ин-т мат. СО РАН, Новосибирск, 2000, сс. 603–670.

[59] Грешнов А. В., *Продолжение дифференцируемых функций за границу области на группах Карно*, Тр. Ин-та мат. СО РАН, т. 31, Ин-т мат. СО РАН, Новосибирск, 1996, сс. 161–186.

[60] Korn A., *Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen*, Bull. Internat., Cracov. Akad. Umiejet, 1909.

[61] Aronszajn N., *On coercive integro-differential quadratic forms*, Report no. 14, Univ. Kansas, 1954, сс. 94–106.

[62] Smith K. T., *Inequalities for formally positive integro-differential forms*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 368–370.

[63] Бесов О. В., *О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева*, Мат. сб. **73** (1967), №4, 585–599.

[64] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., *Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях*, ИЛ, М., 1962.

[65] Кондратьев В. А., Олейник О. А., *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна*, Успехи мат. наук **43** (1988), №5, 55–98.

[66] Фикера Г., *Теоремы существования в теории упругости*, Мир, М., 1974.

[67] Глушко В. П., *Об областях, звездных относительно шара*, Докл. АН СССР **144** (1962), №6, 1215–1216.

[68] Романовский Н. Н., *Коэрцитивные оценки для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами*, Мат. заметки **70** (2001), №2, 316–320.

[69] Романовский Н. Н., *Интегральные представления и теоремы вложения для функций, заданных на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$*, Докл. РАН **382** (2002), №4, 456–459.

[70] Романовский Н. Н., *Неравенства типа Корна на группах Гейзенберга и задача Неймана для линейных субэллиптических систем*, Докл. РАН **383** (2002), №1, 24–27.

Институт математики
им. Л. С. Соболева СО РАН
630090, Новосибирск,
пр. Академика Коптюга, 4

Поступило 19 февраля 2003 г.