F. L. Varpakhovskii, On a class of realizable propositional formulas, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 20, 8–23

Ф.Л.Варпаховский

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕАЛИЗУЕМЫХ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Пропозициональная формула называется регулярно реализуемой, если можно указать число, реализующее (по Клини [I]) любой арифметический пример этой формулы, т.е.результат подстановки в эту формулу вместо пропозициональных переменных любых замкнутых арифметических формул.

В настоящей заметке строится класс $\mathfrak{R}$ формул логики высказываний, являющийся расширением класса интуиционистски выводимых формул и обладающий следующими свойствами:

I. Класс $\mathfrak{R}$ разрешим.

2. Каждая формула из $\mathfrak{R}$ регулярно реализуема.

3. Класс $\mathfrak{R}$ замкнут относительно правил вывода интуиционистского исчисления высказываний.

Все известные автору реализуемые формулы содержатся в классе $\mathfrak{R}$.

§ I. Построение класса $\mathfrak{R}$

I. Будем говорить, что пропозициональные формулы P_1 и P_2 равносильны по реализуемости, если по числу k_1, реализующему любой арифметический пример формулы P_1, можно указать число k_2, реализующее любой арифметический пример формулы P_2, и наоборот.

Построим*) алгорифм $\mathfrak{A}_1$, который каждой пропозициональной

*) Для построения алгорифма $\mathfrak{A}_1$ (и используемого в дальнейшем алгорифма $\mathfrak{A}_2$) достаточно сведений, приведенных в [2]. Эти алгорифмы должны обладать еще некоторыми дополнительными свойствами, которые будут указаны ниже.

формуле ставит в соответствие равносильную ей по реализуемости формулу вида [ж)]

$$\underset{j}{\&} A_j \supset \underset{i}{\bigvee} d_i , \qquad (1)$$

где каждая посылка A_j имеет один из следующих видов:

$$(\mathrm{I})\ \underset{k}{\bigvee} a_k , \quad (\mathrm{II})\ \underset{\ell}{\&}\ b_\ell \supset \underset{k}{\bigvee} a_k , \quad (\mathrm{III})\ \neg B,$$

$$(\mathrm{IV})\ \neg C \supset \underset{k}{\bigvee} a_k , \quad (\mathrm{V})\ \ (c \supset b) \supset \underset{k}{\bigvee} a_k .$$

Для посылки и заключения посылки вида (IУ) с номером s условимся использовать соответственно обозначения $\neg C_s , (\bigvee a)_s$. Аналогичный смысл имеют обозначения $c_s , b_s , (\bigvee a)_s$ для случая, когда s является номером посылки вида (У).

По определению, формула P , не имеющая вида (1), тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{R}$, когда к $\mathfrak{R}$ принадлежит формула $\mathfrak{A}_1(P)$.

2. В дальнейшем, ввиду I, будут рассматриваться только формулы вида (1). О с н о в н ы м и переменными такой формулы считаются переменные, входящие в посылки вида (I),(II),(У) или в заключения посылок вида (IУ). Р а н г о м $\tau(P)$ формулы P считается число 0, если формула P не содержит посылок вида (IУ) или (У), и число различных основных переменных этой формулы - в противном случае.

3. Формула P вида (1)называется п р а в и л ь н о й , если она не содержит посылок вида (I). Построим алгорифм $\mathfrak{A}_2$,ставящий в соответствие каждой формуле P вида (1) равносильную ей по реализуемости конъюнкцию $\mathfrak{A}_2(P) = \underset{s}{\&} P_s$ правильных формул того же или меньшего ранга. Приняв по определению что $P \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \forall s\,(P_s \in \mathfrak{R})$, мы получаем возможность ограничиться правильными формулами.

Для дальнейшего существенно, что алгорифм $\mathfrak{A}_2$ обладает сле-

---

ж) Здесь и в дальнейшем для обозначения пропозициональных переменных используются малые латинские буквы, для обозначения пропозициональных формул - большие.

дующим свойством. Пусть правильная формула P имеет вид $\underset{j}{\&} A_j \supset \underset{i}{d_i}$, $r(P)>0$, $\underset{\ell}{\bigvee} b_\ell$ – дизъюнкция некоторых основных переменных формулы P, $\mathfrak{A}_2((\underset{\ell}{\bigvee} b_\ell) \& (\underset{j}{\&} A_j) \supset \underset{k}{\bigvee} c_k) = \underset{s}{\&} P_s$. Тогда $\forall s\,(r(P_s) < r(P))$.

4. Определения простоты, пополнимости и принадлежности правильной формулы P классу $\mathfrak{R}$ даются параллельной индукцией по рангу формулы P. Одновременно доказывается разрешимость класса $\mathfrak{R}$.

Для формул нулевого ранга понятия простоты и пополнимости не определяются. Далее, если $r(P)=0$, то считается, по определению, что *)

$$P \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow\ \vdash P.$$

Отсюда следует, что принадлежность формулы P нулевого ранга классу $\mathfrak{R}$ устанавливается в конечное число шагов.

Пусть теперь $n>0$ и понятия простоты и пополнимости определены для всех формул P, таких что $0<r(P)<n$, а алгоритм разрешимости – для всех формул P ранга меньше n.

Формула $P = \underset{j}{\&} A_j \supset \underset{i}{\bigvee} d_i$ ранга n считается н е п р о с т о й, если для некоторого индекса s посылки вида (IУ) формулы P выполняется условие

$$\underset{j}{\&} A_j \vdash \neg C_s \tag{2}$$

или для некоторого индекса s посылки вида (У) этой формулы имеет место включение

$$(c_s \& (\underset{j}{\&} A_j) \supset b_s) \in \mathfrak{R}. \tag{3}$$

В противном случае формула считается п р о с т о й. Отметим, что ввиду замечания в п.3 формула в условии (3) приводится к конъюнкции правильных формул ранга меньше n, так что имеется конечная процедура для проверки простоты формулы P ранга n.

---

*) Выводимость здесь и в дальнейшем понимается как выводимость в интуиционистском исчислении высказываний (см. [I], стр. 77,83,94).

В случае непростой формулы P положим $P \in \mathfrak{R}$, если для некоторого индекса S из условий (2) или (3) выполняется включение

$$((\vee a)_s \,\&\, (\underset{j}{\&} A_j) \supset \underset{i}{\vee} d_i) \in \mathfrak{R}. \tag{4}$$

Ввиду замечания п.3 для непростых формул ранга n имеется конечная процедура распознавания их принадлежности классу $\mathfrak{R}$.

5. Через σ_P и τ_P обозначим соответственно классы р а з л и ч н ы х элементарных конъюнкций и различных дизъюнктивных нормальных форм, составленных из переменных формулы P *). Оба класса в силу своего определения конечны. Пусть далее $a_1, \dots, a_m$ - все различные переменные, встречающиеся в посылках вида (У)формулы P на втором месте, $a'_1, \dots, a'_m$ - какие-нибудь различные переменные, не входящие в формулу P. Если $S \in \sigma_P$, то через S' обозначим формулу, которая получается из S заменой каждого конъюнктивного члена a_i на $\neg a'_i$. Для каждого такого конъюнктивного члена a_i формулы S из σ_P построим формулу $\neg a'_i \supset a_i$ и через $\&^S(\neg a'_i \supset a_i)$ обозначим конъюнкцию всех таких формул. Через $\bar{S}$ обозначим дизъюнкцию переменных, входящих в S' под знаком отрицания.**)

Правильная формула P ранга n называется п о п о л н и м о й , если найдутся такие списки формул $\{S_k\}$ из σ_P и $\{T_k\}$ из $\tau_P (1 \leq k \leq V)$ и список $\{t_{\ell k}\} (1 \leq \ell \leq q_k, \; 1 \leq k \leq V)$ основных переменных формулы P, что для всех $k \; (1 \leq k \leq V)$ формулы Q_k, где

$$Q_k \leftrightharpoons (\&^{S_k}(\neg a'_i \supset a_i)) \,\&\, \neg\neg(S'_k \vee T_k) \,\&\, (\underset{j}{\&} A_j) \supset (\overset{q_k}{\underset{\ell=1}{\vee}} t_{\ell k}) \vee \bar{S}_k$$

- непростые, никакая формула вида $\neg\neg T_k \supset t_{\ell k}$ неэквивалентна

---

*) При этом предполагается, что каждая переменная может входить в элементарную конъюнкцию не более одного раза, дизъюнктивные члены не повторяются и порядок конъюнктивных и дизъюнктивных членов заранее фиксирован.

**) Порядок членов в двух последних формулах определяется порядком соответствующих конъюнктивных членов в S.

интуиционистски никакой посылке вида (IV) формулы P,

$$\underset{j}{\&} A_j \vdash \neg\neg \bigvee_{k=1}^{v} S_k \tag{5}$$

и

$$\forall k (Q_k \in \mathfrak{R}). \tag{6}$$

В случае выполнения этих условий дизъюнкция

$$\bigvee_{k=1}^{v} \bigvee_{l=1}^{q_k} (\neg\neg T_k \supset t_{lk}) \tag{7}$$

называется **пополняющей** для формулы P.

6. Существует конечная процедура для выяснения пополнимости формулы P. В самом деле, алгорифм распознавания простоты формул ранга n (п.4) позволяет отобрать из всех формул Q_k (их число конечно и ранг каждой равен n) непростые. Алгорифм распознавания принадлежности $\mathfrak{R}$ непростых формул ранга n (п.4) позволяет выделить из всех непростых формул Q_k те, для которых выполнено условие (6). Остальное очевидно.

7. Остается указать конечную процедуру для определения принадлежности $\mathfrak{R}$ простой формулы P ранга n. Примем, по определению, что простая формула P тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{R}$, когда она пополнима с пополняющей дизъюнкцией (7) и для всех $k, l \ (1 \le k \le v, \ 1 \le l \le q_k)$.

$$\left\{ (\neg\neg T_k \supset t_{lk}) \,\&\, \left(\underset{j}{\&} A_j\right) \supset \bigvee_{i} d_i \right\} \in \mathfrak{R}. \tag{8}$$

Таким образом, вопрос о принадлежности простой пополнимой формулы $\mathfrak{R}$ ранга n классу $\mathfrak{R}$ сводится к тому же вопросу для формул того же ранга и в тех же переменных, но с **большим** числом посылок вида (IV). Конечность применяемой процедуры вытекает из того, что существует только конечное число неэквивалентных посылок вида (IV) в переменных формулы P.

Построение разрешимого класса $\mathfrak{R}$ закончено.

§ 2. Реализуемость формул класса $\mathfrak{R}$

Теорема. Каждая формула P класса регулярно реализуема.

Доказательство. Достаточно, очевидно, ограничиться правильными формулами. Доказательство будет вестить индукцией по рангу формулы.

I. Пусть P – правильная формула из $\mathfrak{R}$ и $\tau(P)=0$. В этом случае формула P интуиционистски выводима и, следовательно, регулярно реализуема.

2. Пусть $n>0$ и регулярно реализуемы все формулы P из $\mathfrak{R}$ ранга меньше n. Покажем, что это верно и для формул ранга n. Рассмотрим сначала случай, когда формула P не является простой. Тогда либо для некоторого индекса s посылки вида (IУ) формула

$$\underset{j}{\&} A_j \supset \neg C_s \tag{9}$$

регулярно реализуема (в силу ее интуиционистской выводимости), либо для некоторого индекса s посылки вида (У) формула $c_s \& (\& A_j) \supset b_s$ регулярно реализуема (в силу предположения индукции). В последнем случае, очевидно, формула

$$\underset{j}{\&} A_j \supset (c_s \supset b_s) \tag{I0}$$

также регулярно реализуема.

Однако в обоих этих случаях формула P равносильна по реализуемости формуле

$$(\vee a)_s \& (\underset{j}{\&} A_j) \supset \underset{i}{\vee} d_i \ , \tag{II}$$

которая регулярно реализуема по предположению индукции.

3. Остается рассмотреть случай простой пополнимой формулы с пополняющей дизъюнкцией (7). Очевидно, достаточно будет доказать регулярную реализуемость формулы

$$\underset{j}{\&} A_j \supset \bigvee_{k=1}^{v} \bigvee_{\ell=1}^{q_k} (\neg\neg T_k \supset t_{\ell k}). \tag{I2}$$

При этом можно опираться на регулярную реализуемость формул Q_k $(1 \leqslant k \leqslant v)$ из (6), являющуюся следствием их непростоты.

Заметим, что формула вида $\underset{j=1}{\overset{p}{\&}} A_j \supset \bigvee_i B_i$ регулярно реализуема тогда и только тогда, когда существует частично рекурсивная функция $f(n_1, \ldots, n_p)$, такая что для л ю б о г о арифметического примера этой формулы из того, что числа n_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ реализуют соответствующие посылки формулы, следует, что $(f(n_1, \ldots, n_p))_u$ [ж)] дает при $u=0$ номер реализуемого члена заключения, а при $u=1$ – реализацию члена с этим номером.

Учитывая реализуемость формул Q_k $(1 \leqslant k \leqslant v)$, построим частично рекурсивную функцию $f(k, n_1, \ldots, n_m, \tau, N)$ (здесь и ниже N обозначает список $n_{m+1}, \ldots, n_{m+p}$), такую, что для каждого k $(1 \leqslant k \leqslant v)$, если числа n_j $(1 \leqslant j \leqslant m_k,\ m_k \leqslant m)$, τ, n_{m+j} $(1 \leqslant j \leqslant p)$ реализуют соответствующие посылки какого-нибудь примера формулы Q_k, то $(f(k, n_1, \ldots, n_m, \tau, N)$ дает при $u=0$ номер реализуемого члена заключения, а при $u=1$ – реализацию члена с этим номером. Здесь p – общее число посылок формулы P, m – общее число переменных, входящих в посылки вида (У) формулы P на втором месте, m_k $(1 \leqslant k \leqslant v)$ – число конъюнктивных членов в формуле $\&^{s_k} (\neg a'_i \supset a_i)$.

4. Пусть $q(k)$ – примитивно рекурсивная функция, такая что $q(k) = q_k$ при $k \leqslant v$. Пусть, далее, $\psi(x)$ – примитивно рекурсивная функция, которая по каждому x выдает номер одноместной примитивно рекурсивной функции, тождественно равной x. Введем следующие частично рекурсивные функции:

$$q(N) \simeq$$

$$\simeq \nu n\{(1 \leqslant (n)_0 \leqslant v) \& [1 \leqslant (f((n)_0, (n)_1, \ldots, (n)_m, 0, N) \leqslant q((n)_0)]\}^{**)} \qquad (13)$$

ж) Примитивно рекурсивная функция $(x)_u$ по каждому натуральному x дает показатель, с которым u-ое простое число входит в разложение x.

жж) По поводу ν -оператора см.[I], стр.309.

$$\varphi_u(N) \simeq (f((g(N))_0, (g(N))_1, \ldots, (g(N))_m, 0, N)_u \quad (u=0,1) \qquad (14)$$

$$h(N) \simeq \psi(\varphi_1(N)). \qquad (15)$$

5. Пусть теперь рассматривается произвольный арифметический пример формулы (12)(для упрощения записи большие и малые буквы означают в последующих рассуждениях соответствующие замкнутые арифметические формулы). Предположим, что для каждого j $(1 \leq j \leq p)$ число n_{m+j} реализует A_j. Для доказательства реализуемости формулы (12) достаточно будет показать, что функции (13), (14) и (15) в этом случае определены, для чисел $k=(g(N))_0$, $\ell=\varphi_0(N)$ выполняются неравенства $1 \leq k \leq v$, $1 \leq \ell \leq q_k$ и число $h(N)$ реализует формулу

$$\urcorner\urcorner T_k \supset t_{\ell k}. \qquad (16)$$

Ввиду условия (5) не может не найтись k $(1 \leq k \leq v)$, такого что формула S_k реализуема. Рассмотрим формулу Q_k, в которую вместо переменных формулы P подставлены те же формулы арифметики, что и в формулу P, а вместо всех переменных a'_i подставлена формула $1=0$. Ясно, что формула Q_k будет при этой подстановке реализуема и число 0 будет реализацией формулы $\urcorner\urcorner(S'_k \vee T_k)$. Так как, ввиду реализуемости S_k, все переменные a_i в конъюнкции $\&^{S_k}(\urcorner a'_i \supset a_i)$ реализуемы, то не могут не найтись такие числа $n_1, \ldots, n_{m_k}$, которые реализуют соответствующие члены этой конъюнкции. Значит, (для любых $n_{m_k}, \ldots, n_m$) $(f(k, n_1, \ldots, n_{m_k}, n_{m_k+1}, \ldots, n_m, 0, N))_u$ дает при $u=0$ номер реализуемого члена заключения формулы Q_k, а при $u=1$ – реализацию этого члена. Ввиду реализуемости S_k дизъюнкция $\bar{S}_k$ нереализуема, поэтому $1 \leq (f(k, n_1, \ldots, n_{m_k}, n_{m_k+1}, \ldots, n_m, 0, N))_0 \leq q_k$. Значит, не может не найтись такого n, что условие в фигурных скобках (13) выполнено. В силу принципа А.А.Маркова такое n найдется. Это означает, что функции (13),(14),(15) определены и $1 \leq (g(N))_0 \leq v$, $1 \leq \varphi_0(N) \leq q_k$.

6. Остается показать, что число $h(N)$ реализует формулу

(I6), где $k=(g(N))_0$, $\ell=\varphi_0(N)$. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда формула T_k реализуема. Если в формулу Q_k подставить вместо переменных формулы P те же формулы арифметики, что и в формулу P, а вместо переменных a_i', входящих в конъюнкцию $\&^{S_k}(\neg a_i' \supset a_i)$ формулу $0=0$, то реализациями членов этой конъюнкции будут любые числа; число 0 по-прежнему (в силу реализуемости формулы T_k) будет являться реализацией формулы $\neg\neg(S_k' \vee T_k)$. Поэтому $\varphi_1(N)$ дает реализацию члена заключения формулы Q_k с номером $\ell=\varphi_0(N)$, т.е. формулы $t_{\ell k}$. Значит, $h(N)$ реализует формулу (I6). Теорема доказана.

§ 3. Принадлежность интуиционистски выводимых формул классу $\mathfrak{R}$

Теорема. Всякая интуиционистски выводимая формула содержится в классе $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что для алгорифма $\mathfrak{A}_1$ п.I § I справедливо следующее утверждение: формула P тогда и только тогда выводима в интуиционистском исчислении, когда в этом исчислении выводима формула $\mathfrak{A}_1(P)$. То же самое утверждение справедливо и для алгорифма $\mathfrak{A}_2$ п.3 §I. Достаточно поэтому доказать теорему для правильных формул. Доказательство будет вестись индукцией по рангу формулы P.

I. Пусть ранг правильной формулы P равен нулю. Справедливость теоремы в этом случае вытекает из п.4 § I.

2. Пусть теперь $n>0$ и всякая интуиционистски выводимая формула ранга меньше n содержится в $\mathfrak{R}$. Нужно показать, что это верно и для формул ранга n. Докажем сначала, что имеет место следующая

Лемма. Если правильная формула P положительного ранга интуиционистски выводима, то либо найдется такой номер s посылки вида (IУ), что $\underset{j}{\&} A_j \vdash C_s$, либо найдется такой номер s посылки вида (У), что $\underset{j}{\&} A_j \vdash (c_s \supset b_s)$ и $(c_s \& (\underset{j}{\&} A_j) \supset b_s) \in \mathfrak{R}$

Заметим, что $\vdash P \Leftrightarrow \Xi \vdash \bigvee_i d_i$, где здесь и ниже Ξ обозначает список всех посылок формулы (1). Поэтому по теореме Генцена об устранимости сечений[ж)] выводима секвенция $\Xi \longrightarrow \bigvee a_i$. Будем рассматривать произвольные секвенции вида

$$\Xi \longrightarrow \bigvee a \qquad (I7)$$

и секвенции вида

$$\Xi \longrightarrow \& a \qquad (I8)$$

в которых заключениями служат дизъюнкции или конъюнкции некоторых переменных формулы P . К таким секвенциям (не являющимся аксиомами) могут быть применены только четыре правила:

$$1^\circ.\ \frac{\Gamma \to A \text{ или } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}\,; \qquad 2^\circ.\ \frac{\neg A, \Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to \Theta}\,;$$

$$3^\circ.\ \frac{A \supset B, \Gamma \to A \text{ и } B, A \supset B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B,\ \Gamma \to \Theta}\,; \qquad 4^\circ.\ \frac{\Gamma \to A \text{ и } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \,\&\, B}$$

Применение правила 1° к секвенции вида (I7) дает секвенции вида (I7). Применение правила 4° к секвенции вида (I8) дает секвенции вида (I8). Применение правила 3° к секвенции вида (I7) или (I8) с формулой вида (II) в качестве $A \supset B$ дает секвенцию вида (I8). Поэтому в доказательстве секвенции $\Xi \to \bigvee_i d_i$ на некотором месте встретится либо применение правила 2°, либо применение правила 3° с формулой вида (IУ) или (5) в качестве $A \supset B$. Отметим первое (в некоторой ветви дерева доказательства) такое применение и разберем возможные случаи.

(а) В случае применения правила 2° для некоторого индекса ℓ , являющегося номером посылки вида (Ш), секвенция $\Xi \to B_\ell$ дока-

---

ж) В доказательстве леммы используется генценовская система $G3$ из [I] .

зуема. Тем самым, $\underset{j}{\&} A_j \vdash B_\ell$. Так как, очевидно, $\underset{j}{\&} A_j \vdash \neg B_\ell$, то $\underset{j}{\&} A_j \vdash A$, где A – любая формула. Поскольку $n>0$, формула P содержит посылки вида (IУ) или (У). Если P содержит посылки вида (IУ), то пусть s – номер какой-нибудь такой посылки. Тогда $\underset{j}{\&} A_j \vdash C_s$. Если формула P не содержит посылок вида (IУ), то пусть s – номер какой-нибудь посылки вида (У). Тогда $\& A_j \vdash$ $\vdash (c_s \supset b_s)$, т.е. $\vdash c_s \& (\underset{j}{\&} A_j) \supset b_s$. Значит, $\vdash \mathfrak{A}_2(c_s \& (\underset{j}{\&} A_j) \supset b_s)$. Последняя формула есть конъюнкция правильных формул P_t м е н ь ш е г о ранга. Следовательно, каждая формула P_t, будучи выводимой, принадлежит $\mathfrak{R}$ (в силу предположения индукции). Отсюда получаем, что и формула $c_s \& (\underset{j}{\&} A_j) \supset b_s$ принадлежит $\mathfrak{R}$.

(б) В случае применения правила 3° с посылкой вида (IУ) или (У) в качестве $A \supset B$ получаем, что либо для некоторого номера s посылки вида (IУ) доказуема секвенция $\underset{j}{\&} A_j \to \neg B_s$, либо для некоторого номера s посылки вида (У) доказуема секвенция $\underset{j}{\&} A_j \to (c_s \supset b_s)$. Значит, либо $\underset{j}{\&} A_j \vdash \neg B_s$, либо $\underset{j}{\&} A_j \vdash (c_s \supset b_s)$, и мы возвращаемся к случаям, рассмотренным в п.(а). Лемма доказана.

3. Пусть теперь $\vdash P$ и s – номер посылки вида (IУ) или (У), найденный по лемме. Рассмотрим выводимую формулу $(\vee a)_s \& (\underset{j}{\&} A_j) \supset \underset{i}{\vee} d_i$. Формула $\mathfrak{A}_2((\vee a)_s \& (\underset{j}{\&} A_j) \supset \underset{i}{\vee} d_i)$ также выводима и является конъюнкцией правильных формул P_t ранга м е н ь ш е n. Значит, все формулы P_t выводимы и по предположению индукции принадлежат $\mathfrak{R}$. Следовательно, формула P, ввиду условия (4) п.4 § I, также принадлежит $\mathfrak{R}$. Теорема доказана.

Замечание. Анализ доказательства теоремы показывает, что включив в класс $\mathfrak{R}$ только непростые формулы, удовлетворяющие условию (4), мы получили бы в точности класс интуиционистски выводимых формул.

§ 4. Примеры формул, принадлежащих $\mathfrak{R}$.

I. Покажем, что формула Роуза [2] принадлежит $\mathfrak{R}$. Рассмотрим правильную формулу

$$\underset{j=1}{\overset{12}{\&}} A_j \supset d_2 \vee d_1 \tag{I9}$$

с нижеперечисленными посылками

(II)	(III)	(IУ)	(У)
1. $a \supset d$	4. $\neg(a \& \tilde{a})$	8. $\neg\tilde{a} \supset a$	12. $(d_2 \supset d) \supset d_2 \vee d_1$
2. $b \supset d$	5. $\neg(b \& \tilde{b})$	9. $\neg\tilde{b} \supset b$	
3. $d \supset a \vee b$	6. $\neg(d \& d_1)$	10. $\neg d \supset d_1$	
	7. $\neg(d_1 \& d_2)$	11. $\neg d_1 \supset d_2$	

Покажем, что формула (19) пополнима*). Положим $S_1 = a \& \neg d_1$, $S_2 = b$, $S_3 = d_1$, $T_1 = d_1$, $T_2 = T_3 = b \vee d_1$, $q_1 = 1$, $q_2 = q_3 = 2$, $t_{11} = d_2$, $t_{12} = t_{13} = d_2$, $t_{22} = t_{23} = d_1$, $\bar{S}_1 = d_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$ - пустые дизъюнкции. Тогда $\mathop{\&}\limits_{j=1}^{12} A_j \vdash \neg\neg((a \& \neg d_1) \vee b \vee d_1)$, т.е. условие (5) п.5 § I выполнено. Далее, формулы

$$\neg\neg((a \& \neg d_1) \vee d_1) \& (\mathop{\&}\limits_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1,$$

$$\neg\neg(b \vee (b \vee d_1)) \& (\mathop{\&}\limits_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1$$

$$\neg\neg(d_1 \vee (b \vee d_1)) \& (\mathop{\&}\limits_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1$$

все непростые и принадлежат $\mathcal{R}$ в силу своей интуиционистской выводимости. Мы получаем, что формула $(\neg\neg d_1 \supset d_2) \vee (\neg\neg(b \vee d_1) \supset d_2) \vee$ $\vee (\neg\neg(b \vee d_1) \supset d_1$ есть(с точностью до элиминации повторяющихся членов) **пополняющая дизъюнкция** формулы (19), т.к. ни один ее дизъюнктивный член не эквивалентен ни одной посылке вида (IУ) формулы (19).

Поскольку интуиционистски выводимы все три формулы

$$(\neg\neg d_1 \supset d_2) \& (\mathop{\&}\limits_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1, \quad (\neg\neg(b \vee d_1) \supset d_2) \& (\mathop{\&}\limits_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1,$$

$$(\neg\neg(b \vee d_1) \supset d_1) \& (\mathop{\&}\limits_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1,$$

---

*) Доказательства простоты пополнимых формул во всех примерах опущены.

то все они принадлежат $\mathcal{R}$. Поэтому формула (I9) также принадлежит $\mathcal{R}$.

Формула (I9) является приведенной формой формулы Роуза (формула Роуза получается из формулы (I9), если переменные a, b, d, d_1, d_2 заменить соответственно формулами $\neg\tilde{a}, \neg\tilde{b}, \neg\tilde{a} \vee \tilde{b}, \neg\neg(\neg\tilde{a} \vee \neg\tilde{b})$, а затем опустить выводимые посылки).

2. Докажем, что $\mathcal{R}$ принадлежит следующая формула Янкова [3] :

$$((\neg\neg a \supset a) \supset a \vee \neg a) \& ((\neg\neg b \supset b) \supset b \vee \neg b) \& \neg(a \& b) \& \neg(\neg a \& \neg b) \supset \neg a \vee \neg b$$

Приведенная форма этой формулы имеет вид

$$\underset{j=1}{\overset{12}{\&}} A_j \supset a_1 \vee b_1 \tag{20}$$

с нижеперечисленными посылками:

(III)	(IУ)	(У)
I. $\neg(a \& a_1)$	7. $\neg a \supset a_1$	II. $(a_2 \supset a) \supset a \vee a_1$
2. $\neg(b \& b_1)$	8. $\neg b \supset b_1$	I2. $(b_2 \supset b) \supset b \vee b_1$
3. $\neg(b_1 \& b_2)$	9. $\neg b_1 \supset b_2$	
4. $\neg(a_1 \& a_2)$	I0. $\neg a_1 \supset a_2$	
5. $\neg(a \& b)$		
6. $\neg(a_1 \& b_1)$		

Покажем, что формула (20) пополнима. Положим $S_1 = a \& \neg a_1$, $S_2 = b \& \neg b_1, T_1 = \neg a_2, \; T_2 = \neg b_2, \; \bar{S}_1 = a_1, \; \bar{S}_2 = b_1, \; q_1 = q_2 = 1,$ $t_{11} = a, \; t_{12} = b$.Условие $\underset{j=1}{\overset{12}{\&}} A_j \vdash \neg\neg(a \& \neg a_1 \vee b \& \neg b_1)$ выполнено. Далее, обе формулы

$$(\neg a' \supset a) \& \neg\neg(\neg a' \& \neg a_1 \vee \neg a_2) \& (\underset{j=1}{\overset{12}{\&}} A_j) \supset a \vee a_1,$$

$$(\neg b' \supset b) \& \neg\neg(\neg b' \& \neg b_1 \vee \neg b_2) \& (\underset{j=1}{\overset{12}{\&}} A_j) \supset b \vee b_1$$

– непростые и интуиционистски выводимы. Значит, обе они принадлежат $\mathcal{R}$. Поэтому формула

$$(\neg\neg\neg a_2 \supset a) \vee (\neg\neg\neg b_2 \supset b)$$

является пополняющей дизъюнкцией формулы (20). Наконец, обе формулы

$$(\neg\neg\neg a_2 \supset a) \,\&\, (\mathop{\&}_{j=1}^{12} A_j) \supset a_1 \vee b_1, \quad (\neg\neg\neg b_2 \supset b) \,\&\, (\mathop{\&}_{j=1}^{12} A_j) \supset a_1 \vee b_1$$

принадлежат $\mathcal{R}$ в силу своей интуиционистской выводимости. Отсюполучаем, что формула (20) принадлежит $\mathcal{R}$.

3. Формула Кипниса [4] , которую мы сейчас рассмотрим, имеет следующий вид:

$$L = \left(\mathop{\&}_{1 \le i < j \le 6} \neg(p_i \,\&\, p_j)\right) \,\&\, \left(\left(\bigvee_{i=1}^{6} \neg p_i\right) \supset C\right) \supset C,$$

где $C = \neg q_1 \vee (\neg r_1 \supset (\neg q_2 \vee (\neg r_2 \supset \neg q_3)))$. Приведенная форма имеет вид $\mathop{\&}_{j=1}^{41} A_j \supset t$, с нижеперечисленными посылками:

(II)	(III)	(IУ)	(У)
I. $\bar{q}_1 \supset t$	9-I4. $\neg p_i \supset t$ $(1 \le i \le 6)$	20-34. $\neg(p_i \,\&\, p_j)$ $(1 \le i < j \le 6)$	40. $(\bar{r}_1 \supset \bar{q}_2) \supset \tilde{r}_1$
2. $\tilde{r}_1 \supset t$	I5. $\neg q_1 \supset \bar{q}_1$	35. $\neg(q_1 \,\&\, \bar{q}_1)$	4I. $(\bar{r}_2 \supset \bar{q}_3) \supset \tilde{r}_2$
3. $t \supset \bar{q}_1 \vee \tilde{r}_1$	I6. $\neg q_2 \supset \bar{q}_2$	36. $\neg(q_2 \,\&\, \bar{q}_2)$	
4. $\tilde{r}_1 \,\&\, \bar{r}_1 \supset \tilde{q}_2$	I7. $\neg q_3 \supset \bar{q}_3$	37. $\neg(q_3 \,\&\, \bar{q}_3)$	
5. $\bar{q}_2 \supset \tilde{q}_2$	I8. $\neg r_1 \supset \bar{r}_1$	38. $\neg(r_1 \,\&\, \bar{r}_1)$	
6. $\tilde{r}_2 \supset \tilde{q}_2$	I9. $\neg r_2 \supset \bar{r}_2$	39. $\neg(r_2 \,\&\, \bar{r}_2)$	
7. $\tilde{q}_2 \supset \bar{q}_2 \vee \tilde{r}_2$			
8. $\tilde{r}_2 \,\&\, \bar{r}_2 \supset \tilde{q}_3$			

Мы покажем, что $\left(\mathop{\&}_{j=1}^{41} A_j \supset t\right) \in \mathcal{R}$.

Можно проверить, что формула $\mathop{\&}_{j=1}^{41} A_j \supset t$ выполнима и для любых $i, j \ (1 \le i < j \le 6)$ дизъюнкция $(\neg\neg\neg p_i \supset \bar{q}_1) \vee (\neg\neg\neg p_i \supset \tilde{r}_1) \vee (\neg\neg\neg p_j \supset \bar{q}_1) \vee (\neg\neg\neg p_j \supset \tilde{r}_1)$ является пополняющей - достаточно положить $S_1 = T_1 = \neg p_i$ $S_2 = T_2 = \neg p_j$, $\overset{q_1}{V}_{t_{\ell 1}} = \overset{q_2}{V}_{t_{\ell 2}} = \bar{q}_1 \vee \tilde{r}_1$. Произведя пятикратные пополнения (с подходящим чередованием пар формул $\{S_1, S_2\}$), мы получим формулы вида

$$L_k = \Big(\mathop{\&}_{\substack{1\le i\le 6\\ i\ne k}} (\neg\neg\neg p_i \supset m_i)\Big) \,\&\, \big(\mathop{\&}_{j=1}^{41}\big) \supset t\,, \tag{21}$$

где $m_i = \bar{q}_1$ или $m_i = \tilde{\tau}_i$. Достаточно, следовательно, доказать, что все формулы (21) принадлежат $\mathfrak{R}$. Это очевидно для случая, когда $\bar{q}_1$ встречается в первых посылках не менее чем дважды, поскольку такие формулы выводимы интуиционистски. Учитывая это обстоятельство, а также симметрию исходной формулы относительно переменных p_i , можно ограничиться рассмотрением формулы

$$(\mathop{\&}_{i=1}^{4} (\neg\neg\neg p_i \supset \tilde{\tau}_1)) \,\&\, (\mathop{\&}_{j=1}^{41} A_j) \supset t = \mathop{\&}_{j=1}^{45} A_j' \supset t. \tag{22}$$

Если мы покажем, что формула

$$\tilde{\tau}_1 \,\&\, (\mathop{\&}_{j=1}^{45} A_j') \supset \tilde{q}_2 \tag{23}$$

принадлежит $\mathfrak{R}$, то формула (22) окажется непростой, и ее принадлежность $\mathfrak{R}$ будет вытекать из того, что формула $\tilde{\tau}_1 \& (\mathop{\&}_{j=1}^{45} A_j') \supset t$ будучи интуиционистски выводимой, принадлежит $\mathfrak{R}$.

Применяя алгорифм $\mathfrak{A}$ к формуле (23), мы найдем правильную формулу $\mathop{\&}_{j=1}^{44} A_j'' \supset \tilde{q}_2$, где $\mathop{\&}_{j=1}^{44} A_j''$ получается из $\mathop{\&}_{j=1}^{41} A_j$ следующим образом: посылка 4 заменяется на $\tilde{\tau}_1 \supset \tilde{q}_2$, посылка 38 – на $\neg\tau_1$, посылка 40 – на $\tilde{q}_2 \supset \tilde{\tau}_1$, посылка 18 устраняется и добавляются посылки $\neg p_i \supset \tilde{\tau}_1$ $(1 \le i \le 4)$. Итак, остается показать, что формула

$$\mathop{\&}_{j=1}^{44} A_j'' \supset \tilde{q}_2 \tag{24}$$

принадлежит $\mathfrak{R}$.

Можно проверить, что формула (24) пополнима и для любых i,j $(1 \le i < j \le 4)$ дизъюнкция $(\neg\neg\neg p_i \supset \bar{q}_2) \vee (\neg\neg\neg p_i \supset \tilde{\tau}_2) \vee (\neg\neg\neg p_j \supset \bar{q}_2) \vee (\neg\neg\neg p_j \supset \tilde{\tau}_2)$ является пополняющей – достаточно положить $S_1 = T_1 = \neg p_i$, $S_2 = T_2 = \neg p_j$, $\overset{q_1}{\vee} t_{\ell_1} = \overset{q_2}{\vee} t_{\ell_2} = \bar{q}_2 \vee \tilde{\tau}_2$. Произведя трехкратные пополнения (с подходящим чередованием пар формул $\{S_1, S_2\}$), мы получим формулы вида

$$\Big(\mathop{\&}_{\substack{1\le i\le 4\\ i\ne k}} (\neg\neg\neg p_i \supset r_i)\Big) \,\&\, \big(\mathop{\&}_{j=1}^{44} A_j\big) \supset \tilde{q}_2, \tag{25}$$

где $r_i=\bar{q}_2$ или $r_i=\tilde{r}_2$. Все формулы (25) принадлежат $\mathcal{R}$ в силу своей интуиционистской выводимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клини С.К., Введение в метаматематику, М., 1957.
2. Rose G.F., Propositional calculus and realizability. "Trans. Amer. Math. Soc.", 1953, 175, 1-19.
3. Янков В.А., О реализуемых формулах логики высказываний. "Докл. АН СССР", 1963, 151, 5, 1035-1037.
4. Кипнис М.М. О реализациях предикатных формул. Настоящий сборник, 40-48.