Ю. В. Голунков, Полнота с заданной точностью в функциональных системах программного типа, *Дискрет. матем.*, 1990, том 2, выпуск 3, 42–49

Дискретная математика

том 2 выпуск 3 * 1990

УДК 519.716.37

ПОЛНОТА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ПРОГРАММНОГО ТИПА

Ю. В. Голунков

В качестве основной модели функциональной системы программного типа используется система алгоритмических алгебр $R=P\cup Q$ всех одноместных частично рекурсивных функций P и предикатов Q. Для общерекурсивной функции $\varphi(x)$ множество $M\subseteq R$ называется φ-полным, если оно содержит предикат с непустыми областями истинности и ложности и для всякой функции $f\in P$ замыкание $[M]$ содержит функцию t с той же областью определения, что и для f, причем $|f(x)-t(x)|\leqslant\varphi(x)$ для всякого x из общей области определения f и t.

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых каждое φ-полное множество является обычно полным. Показано, что критерий φ-полноты не может быть существенно проще критерия обычной полноты, какова бы ни была общерекурсивная функция φ.

В [1] начато исследование модифицированной полноты в функциональных системах программного типа. Модификация в [1] состояла в ослаблении таких требований к «полным» системам, которые связаны с областью определения реализуемых функций и предикатов. Здесь изучается модификация, при которой ослабляются требования на множество значений функций. В качестве основной модели функциональной системы программного типа по-прежнему используется система алгоритмических алгебр $R=P\cup Q$ всех одноместных частично рекурсивных функций P и предикатов Q. Все не определяемые здесь обозначения те же, что и в [1].

Пусть φ — общерекурсивная функция (о. р. ф.).

Определение 1. Функция t называется φ-*аппроксимирующей* функцию f, если $\Delta t=\Delta f\ \&\ (\forall x\in\Delta f)\,[|f(x)-t(x)|\leqslant\varphi(x)]$.

Определение 2. Множество $M\subseteq R$ называется φ-*полным* в R, если оно содержит предикат с непустыми областями истинности и ложности и для всякой функции $f\in P$ замыкание $[M]$ содержит φ-аппроксимирующую ее функцию.

В замыкании φ-полного множества могут быть не все предикаты, но хотя бы один $\alpha\in Q$ с $\Delta_{\text{и}}\alpha\neq\varnothing$ и $\Delta_{\text{л}}\alpha\neq\varnothing$, поскольку мы исследуем функциональные системы с предикатами. Одно и то же множество функций может быть φ-полно с одним множеством предикатов и не φ-полно с другим. Легко показать, что множество 0-полно (т. е. при $\varphi(x)\equiv 0$), если и только если оно полно в обычном смысле.

Под критерием φ-полноты понимаются сформулированные в некотором виде необходимые и достаточные условия φ-полноты произвольного множества $M \subseteq R$. Нас интересует в первую очередь такой вопрос: существует ли о. р. ф. φ, для которой критерий φ-полноты не отличается от критерия обычной полноты или, наоборот, существенно проще его? В статье дается положительный ответ на первую часть вопроса и отрицательный на вторую.

Пусть $\text{КР} = \{\text{КР}(\varphi)\colon\ \varphi — \text{о. р. ф.}\}$ — множество критериев φ-полноты с отношением частичного порядка: $\text{КР}(\varphi) \leqslant \text{КР}(\psi)$ тогда и только тогда, когда всякое ψ-полное множество является φ-полным. Мы говорим, что критерий φ-полноты слабее критерия ψ-полноты ($\text{КР}(\varphi) < \text{КР}(\psi)$), если $\text{КР}(\varphi) \leqslant \text{КР}(\psi)$ и существует φ-полное, но не ψ-полное множество. Если $\text{КР}(\varphi) \leqslant \text{КР}(\psi)$ и $\text{КР}(\psi) \leqslant \text{КР}(\varphi)$, то $\text{КР}(\varphi) = \text{КР}(\psi)$, а функции φ и ψ называются *эквивалентными* ($\varphi \sim \psi$).

Множество $\text{Int}(a, r) = \{x \in \mathbf{N}\colon |x - a| \leqslant r\}$ называется интервалом радиуса r (с центром a). Пусть $L(\varphi, l) = \{x\colon\ \varphi(x) \leqslant l\}$ для $l \in \mathbf{N}$ и о. р. ф. φ. Через $A \supset (\infty, j)$ обозначается утверждение: множество A включает бесконечно много интервалов радиуса j. $\text{КР}(n)$ с $n \in \mathbf{N}$ обозначает $\text{КР}(\varphi)$, когда $\varphi(x) \equiv n$.

Теорема 1. *Если о. р. ф. φ ограничена ($\varphi(x) \leqslant r$ для всякого $x \in \mathbf{N}$), то эквивалентность $\varphi \sim 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $L(\varphi, l-1) \supset (\infty, l)$ для каждого $l = 1, \ldots, r$. Если о. р. ф. φ не ограничена, то $\varphi \sim 0$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такое r, что $L(\varphi, l-1) \supset (\infty, l)$ для каждого $l = 1, \ldots, r$ и множество $L(\varphi, r)$ включает интервал сколь угодно большого радиуса.*

Доказательство. Проведем его в несколько этапов.

Этап 1. Если множество $L(\varphi, i)$ конечное, то $\text{КР}(\varphi) \neq \text{КР}(i)$.

Пусть m — максимальное число в $L(\varphi, i)$ (полагаем $m = 0$, если $L(\varphi, i) = \varnothing$) и $X = \{m + 1 + (2i + 2)n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Покажем, что класс $R'(X)$ почти сохранения множества X является φ-полным, но не i-полным ($R'(X) = \{f \in P\colon$ множество $f(X) \cap \overline{X}$ конечное$\} \cup Q$). Для $f \in P$ определяем $t \in P$: если значение $f(a)$ не определено, то не определено и $t(a)$; если $a \in \Delta f$ и $a \in \overline{X} \vee \vee (a \in X \& f(a) \in X) \vee (a \in X \& f(a) < m - i)$, то $t(a) = f(a)$; если $a \in (\Delta f \cap X) \& f(a) \in \in \overline{X} \& f(a) \geqslant m - i$, то $t(a) = c$, где c — ближайшее к $f(a)$ число из X (очевидно, $|f(a) - c| \leqslant i + 1$). Ясно, что $t(X) \cap \overline{X}$ — конечное множество, т. е. $t \in P'(X)$, а $|f(a) - t(a)| = 0$ для $a \in \Delta f \cap L(\varphi, i)$ и $|f(a) - t(a)| \leqslant i + 1 \leqslant \varphi(a)$ для остальных $a \in \Delta f$. Значит, $R'(X)$ φ-полно. Числа $c_n = m + (2i + 2)n + i + 2$ при $n \geqslant 0$ являются центрами интервалов радиуса i, целиком лежащих в $\overline{X}$. Поэтому для функции $g(n) = c_n$ всякая функция $t \in P$, удовлетворяющая условию $|g(n) - t(n)| \leqslant i$, имеет бесконечное множество $t(X) \cap \overline{X}$, т. е. $t \notin P'(X)$. Значит, класс $R'(X)$ не является i-полным.

Этап 2. Если $L(\varphi, i) \supset (\infty, i)$ и $L(\varphi, i) \not\supset (\infty, i + 1)$ для некоторого i, то $\text{КР}(\varphi) \neq \text{КР}(i)$.

При $X = \mathbf{N} - L(\varphi, i)$ класс $R'(X)$ φ-полон, но не i-полон. Доказательство отличается от предыдущего только тем, что в случае $a \in (\Delta f \cap X)\ \&\ f(a) \in \overline{X}$ дополнительно проверяется условие $\text{Int}(f(a), \varphi(a)) \cap X = \varnothing$: если оно выполнено (таких интервалов только конечное множество по условию), то $t(a) = = f(a)$; если c — один из элементов этого пересечения, то $t(a) = c$.

Этап 3. Если о. р. ф. φ не ограничена и в множестве $L(\varphi, l)$, $l \geqslant 0$, всякий интервал имеет радиус не более чем r_l, то $\text{КР}(\varphi) \neq \text{КР}(\psi)$ при любой ограниченной о. р. ф. ψ.

Пусть $\mathcal{I}$ — идеал, порожденный множествами $L(\varphi, j)$, $j = 0, 1, \ldots$, тогда класс его сохранения $R(\mathcal{I})$ является φ-полным, но не ψ-полным. Докажем это. Для произвольной функции $f \in P$ определяем функцию t следующим алгоритмом. Для $n \in \mathbf{N}$ вычисляется $f(n)$. Если $f(n)$ не определено, то не определено и $t(n)$. Если $f(n) = m$ и $\varphi(n) \leqslant \varphi(m)$, то $t(n) = f(n)$. Если $f(n) = m$ и $\varphi(n) > \varphi(m)$, то $t(n) = m'$, где $m' \in \text{Int}(m, \varphi(n))$ такое, что

$\varphi(m') = \max\{\varphi(x)\colon\ x \in \mathrm{Int}(m,\ \varphi(n))\}$. Ясно, что $|f(n) - t(n)| \leqslant \varphi(n)$ для $n \in \Delta f$.

Убедимся в том, что $t \in P(\mathfrak{I})$. Допустим, что $t(n) \in L(\varphi, s)$ и $n \notin L(\varphi, s)$, т. е. $\varphi(n) > s \geqslant \varphi(t(n)) = \varphi(m') \geqslant \varphi(m)$. Значит, $\varphi(x) \leqslant \varphi(m') \leqslant s$, когда $x \in \mathrm{Int}(f(n),\ \varphi(n))$, т. е. весь этот интервал входит в $L(\varphi, s)$; поэтому $\varphi(n) \leqslant r_s$, или $n \in L(\varphi,\ r_s)$, причем $s < \varphi(n) \leqslant r_s$. Таким образом, если $s > r_s$, то из $t(n) \in L(\varphi,\ s)$ следует $n \in L(\varphi,\ s)$, а при $s \leqslant r_s$ из $t(n) \in L(\varphi, s)$ следует $n \in L(\varphi,\ r_s)$. Положим $q_s = \max(s,\ r_s)$; тогда последнее утверждение означает включение $t^{-1}(L(\varphi,\ s)) \subseteq L(\varphi,\ q_s)$. А это означает, что $t \in P(\mathfrak{I})$. Таким образом, φ-полнота класса $R(\mathfrak{I})$ доказана.

Пусть о. р. ф. ψ ограничена ($\psi(x) \leqslant p$ для $x \in \mathbf{N}$). Положим $g(2x) = 0$ и $g(2x+1) = 2p+1$, $x \in \mathbf{N}$. Если допустить $|g(x) - h(x)| \leqslant \psi(x) \leqslant p$, то $h(2x) \leqslant p$ и $p+1 \leqslant h(2x+1) \leqslant 3p+1$, где $x \in \mathbf{N}$. Конечные множества $A = \{0,\ 1,\ \ldots,\ p\}$ и $B = \{p+1,\ p+2,\ \ldots,\ 3p+1\}$ входят в идеал $\mathfrak{I}$, но $h^{-1}(A)$ или $h^{-1}(B)$ не входит в $\mathfrak{I}$ (иначе в идеале содержалось бы их объединение $\mathbf{N}$, что невозможно ввиду неограниченности функции φ). Следовательно, $h \notin P(\mathfrak{I})$ и $R(\mathfrak{I})$ не является ψ-полным.

Из доказанного следует необходимость теоремы. Действительно, если $L(\varphi,\ 0)$ — конечное множество, то $\varphi \asymp 0$ согласно условию этапа 1. Если $L(\varphi,\ 0)$ бесконечно, то $L(\varphi,\ 0) \supset (\infty,\ 0)$. Затем либо не выполнено условие $L(\varphi,\ 0) \supset (\infty,\ 1)$ (тогда $\varphi \asymp 0$ по 2), либо $L(\varphi,\ 0) \supset (\infty,\ 1)$, а потому $L(\varphi,\ 1) \supset \supset (\infty,\ 1)$. И так далее. Если $\varphi(x) \leqslant r$, то возникнет условие этапа 2, если же $\varphi(x)$ не ограничена и условие этапа 2 не имеет места ни для какого i, то это равносильно выполнению условия этапа 3.

Этап 4. Если $\varphi(x) \leqslant r$, $x \in \mathbf{N}$, и $L(\varphi,\ i) \supset (\infty,\ i+1)$ для каждого $i = l$, $l+1,\ \ldots,\ r-1$, то $\mathrm{KP}(l) \leqslant \mathrm{KP}(\varphi)$.

Множество $L(\varphi,\ r-1)$ рекурсивно, поэтому существует эффективная процедура перечисления попарно непересекающихся интервалов $\mathrm{Int}(c_n,\ r) \subset \subset L(\varphi,\ r-1)$. Пусть $g(n) = c_n$.

Если M — некоторое φ-полное множество, то для некоторой функции $t_r \in [M]$ выполнено $|g(n) - t_r(n)| \leqslant \varphi(n)$ или $|c_n - t_r(n)| \leqslant r$, т. е. $t_r(n) \in \in \mathrm{Int}(c_n,\ r)$, а потому t_r — разнозначная функция с множеством значений $\Gamma t_r \subseteq L(\varphi,\ r-1)$. Теперь, эффективно перечисляя попарно непересекающиеся интервалы $\mathrm{Int}(d_n,\ r-1) \subset L(\varphi,\ r-2)$, определим функцию $g_1 \in P$, инъективно отображающую $L(\varphi,\ r-1)$ на $\{d_0,\ d_1,\ d_2,\ \ldots\}$. Из φ-полноты M следует существование функции $t_{r-1} \in [M]$ такой, что $|g_1(b_i) - t_{r-1}(b_i)| \leqslant \varphi(b_i)$, где $\{b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\} = L(\varphi,\ r-1)$. В итоге t_{r-1} — разнозначная функция с $\Delta t_{r-1} = L(\varphi,\ r-1)$ и множеством значений в $L(\varphi,\ r-2)$. Продолжая аналогично, получим разнозначную функцию $t_i \in [M]$ с $\Delta t_i = L(\varphi,\ i)$ и множеством значений в $L(\varphi,\ i-1)$ для $i = r,\ r-1,\ \ldots,\ l+1$. Их суперпозиция $t_r t_{r-1} \ldots t_{l+1} = t$ входит в $[M]$ и является разнозначной о. р. ф. с множеством значений в $L(\varphi,\ l)$.

Теперь для любой $f \in P$ берем функцию $f' = t^{-1} f$. Для нее существует $t' \in [M]$ такая, что $|f'(x) - t'(x)| \leqslant \varphi(x)$ для $x \in \Delta f'$. Так как $\Delta f' \subseteq L(\varphi,\ l)$, то из $x = t(y)$ получаем $|f'(t(y)) - t'(t(y))| \leqslant \varphi(t(y))$, или $|f(y) - q(y)| \leqslant l$ (ибо $t(y) \in L(\varphi,\ l)$), где $q \in [M]$, для каждого $y \in \mathbf{N}$. Значит, множество M является l-полным.

В условиях теоремы $l = 0$, поэтому $\mathrm{KP}(0) \leqslant \mathrm{KP}(\varphi)$. Но $\mathrm{KP}(\varphi) \leqslant \mathrm{KP}(0)$ при любой о. р. ф. φ, т. е. $\varphi \sim 0$.

Этап 5. Если $\varphi(x)$ не ограничена и существуют такие l и r, что $L(\varphi,\ l) \supset (\infty,\ l+1),\ \ldots,\ L(\varphi,\ r-1) \supset (\infty,\ r)$ и $L(\varphi,\ r) \supset (\infty,\ n)$ для любого $n > r$, то $\mathrm{KP}(l) \leqslant \mathrm{KP}(\varphi)$.

Условие $L(\varphi,\ r) \supset (\infty,\ n)$, $n > r$, означает, что в $L(\varphi,\ r)$ можно указать бесконечную последовательность попарно непересекающихся интервалов $\mathrm{Int}(c_i,\ \varphi(i))$, $i \geqslant 0$, и задать о. р. ф. $g(i) = c_i$. Если M — φ-полное множество, то аналогично предыдущему существует о. р. ф. $t' \in [M]$, разнозначная и с множеством значений в $L(\varphi, r)$. Далее рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Теорема доказана.

Из доказательства этапа 1 следует, что $\text{КР}(0) > \text{КР}(1) > \text{КР}(2) > \ldots$, т. е. каждый критерий $(n+1)$-полноты строго слабее критерия n-полноты. Если $\varphi_i(i)=0$, $\varphi_i(x)=1$, когда $x \neq i$, то класс $R(X)$ сохранения множества $X = \mathbf{N} - \{i\}$ $(R(X) = \{f \in P\colon f(X) \cap \bar{X} = \varnothing\} \cup Q)$ является φ_i-полным, но не φ_j-полным при $j \neq i$: критерии $\text{КР}(\varphi_0)$, $\text{КР}(\varphi_1)$, $\text{КР}(\varphi_2)$, ... попарно не сравнимы. Наконец, пусть φ — о. р. ф. и $m = \min\{\varphi(x)\colon x \in \mathbf{N}\}$, $\varphi(a) = m$, $a \notin \text{Int}(b, m)$, $\psi(x) = \varphi(x)+1$. Класс $R(X)$ с $X = \mathbf{N} - \text{Int}(b, m)$ является ψ-полным, но не φ-полным, т. е. $\text{КР}(\varphi) > \text{КР}(\psi)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *В частично упорядоченном множестве* КР *имеется ровно один максимальный элемент* КР(0) *и нет минимальных. Его глубина и ширина счетны.*

Для фиксированной о. р. ф. φ совокупность всех замкнутых классов в R, каждый из которых содержит предикаты из $Q - Q^*$, разбивается на три подмножества: множество $\text{ПОЛ}(\varphi)$ всех φ-полных классов, множество $\text{ППОЛ}(\varphi)$ всех φ-предполных классов (сам класс не является φ-полным, но становится таковым при любом его расширении), множество остальных классов. Отношение $\text{КР}(\varphi) \leqslant \text{КР}(\psi)$ имеет место, если и только если $\text{ПОЛ}(\psi) \supseteq \text{ПОЛ}(\varphi)$, и потому $\text{КР}(\varphi) = \text{КР}(\psi) \leftrightarrow \text{ПОЛ}(\varphi) = \text{ПОЛ}(\psi)$. Уже отмечалось, что $\text{ПОЛ}(0) = \{R\}$. Мощность множества $\text{ПОЛ}(\varphi)$ зависит от φ и может быть различной. Проиллюстрируем это на примере функций, принимающих только два значения: 0 и 1.

Множество $Z \subset \mathbf{N}$ назовем *предельным*, если оно не включает в себя ни одного интервала радиуса 1, но при любом его расширении такие интервалы появляются.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(x) \leqslant 1$ *для всякого* $x \in \mathbf{N}$. *Множество* $\text{ПОЛ}(\varphi)$ *имеет мощность*:

равную 1, *если* $L(\varphi, 0) \supset (\infty, 1)$;

равную 2, *если* $L(\varphi, 0)$ *является объединением предельного и непустого конечного множества*;

счетную, если $L(\varphi, 0)$ — *предельное множество*;

континуума — в остальных случаях.

Опуская полное доказательство, опишем множество $\text{ПОЛ}(\varphi)$ в первых трех вариантах. Пусть $L = \varphi^{-1}(0)$ и $M = \varphi^{-1}(1)$.

Первый вариант следует из теоремы 1: $\text{ПОЛ}(\varphi) = \{R\}$.

Во втором варианте $\text{ПОЛ}(\varphi) = \{R, R'(M)\}$.

Рассмотрим третий вариант. В φ-полном замкнутом классе $A = F \cup G$ множеством предикатов G может быть только одно из четырех:

$$B = \{\alpha \in Q\colon \Delta\alpha \subseteq L\}, \quad B \cup Q^*, \quad Q(\omega_2), \quad Q,$$

где $Q(\omega_2)$ — класс предикатов, сохраняющих отношение $\omega_2 = \{(x, y)\colon (x=y) \vee \vee (x \in M \,\&\, y \in M)\}$, а $B \cup Q^*$ — класс $Q(\omega_1)$ предикатов, сохраняющих $\omega_1 = \{(x, y)\colon x = y \vee x \in M \vee y \in M\}$ $(Q(\omega) = \{\alpha \in Q\colon (x, y) \in \omega \,\&\, x \in \Delta\alpha \,\&\, y \in \Delta\alpha \rightarrow \rightarrow \alpha(x) = \alpha(y)\})$.

а) Если $G = Q$, то A — один из трех классов: R, $R'(M)$, $R(M)$ (где $R(M) = P(M) \cup Q$, $P(M) = \{f \in P\colon f(M) \cap \bar{M} = \varnothing\}$).

б) Если $G = Q(\omega_2)$, то F — либо $P(M)$, либо класс $P(\omega_2)$ сохранения отношения ω_2.

в) Если $G = B$, то F — единственный класс $P(M)$.

г) Если $G = Q(\omega_1)$, то различных классов F счетное множество. Для $n \geqslant 0$ и m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ определяем классы

$$P_{n,m} = P(M) \cup \{f \in P\colon |f(M) \cap L| = 1 \,\&\, |\Gamma f \cap M| \leqslant \leqslant n \,\&\, |\{x \in M\colon f^{-1}(x) \cap M \neq \varnothing\}| \leqslant m\}$$

и предельные классы

$$P_{\omega, m} = \bigcup_{n \geqslant m} P_{n, m}, \quad P_{\omega, \omega} = \bigcup_{m \geqslant 0} P_{\omega, m}.$$

Класс $P_{\omega, m}$ предполон в

$$P_m = P(M) \cup \{f \in P\colon |f(M) \cap L| = 1 \,\&\, |\{x \in M\colon f^{-1}(x) \cap M \neq \varnothing\}| \leqslant m\}.$$

Класс P_m строго содержится в P_{m+1}, а предельный класс $P_\omega = \bigcup P_m$ предполон в классе $P(\omega_1)$.

В четвертом варианте имеется две возможности. Первая: множество L бесконечное, и $L \cup \{a\}$ с некоторым $a \in M$ не содержит интервалов радиуса 1; φ-полон класс $C(T) = \{f \in P\colon f(M) \subseteq (M - \{a\}) \vee f(M) \subseteq T\} \cup B$ с любым подмножеством $T \subseteq M$, содержащим a ($C(T_1) \neq C(T_2)$ при $T_1 \neq T_2$). Вторая: множество $L \cup W$ с некоторым бесконечным множеством $W \subset M$ содержит только конечное число интервалов радиуса 1 (в частности, L конечное). Не ограничивая общности, можно считать W рекурсивным. Класс почти сохранения множества $\overline{L \cup W \cup T}$ с любым $T \subset W$ является φ-полным.

Теперь покажем, что изучаемая модификация понятия полноты не приводит к критерию, существенно более простому, чем критерий обычной полноты. Как и в [1], для этого сравним, во-первых, критериальные системы через семейства предполных классов, во-вторых, характеристические множества конечной полноты. При этом еще более ослабим требования к «полным» множествам.

Определение 3. Множество $M \subseteq R$ называется *слабо полным*, если оно φ-полно при некоторой о. р. ф. φ.

Обычным способом определяется слабо предполный класс. Каждый предполный в R класс является либо ослабленно полным (φ-полным, слабо полным), либо в том же смысле предполным. В [1] перечислены 11 семейств предполных в R классов ППОЛ$_i$ ($i = 1, \ldots, 11$). Классы некоторых из них оказываются ослабленно полными: любой класс семейства ППОЛ$_1$, ППОЛ$_4$ или ППОЛ$_5$ слабо полон; φ-полон каждый класс семейства ППОЛ$_4$, если $L(\varphi, l)$ конечно для всякого $l \geqslant 0$, или каждый класс семейства ППОЛ$_5$, если $\varphi(x) \geqslant x$. Однако некоторые семейства (например, ППОЛ$_6$) состоят только из φ-предполных классов при любой о. р. ф. φ. В общем виде утверждение сформулируем следующей теоремой.

Теорема 4. *В семействе* ППОЛ$_i$ *имеет мощность самого семейства подмножество*:

а) *φ-предполных классов для любой о. р. ф. φ, когда* $i = 1, 2, 3, 6, \ldots, 11$;

б) *φ-предполных классов, когда* $i = 4$ *и о. р. ф. φ удовлетворяет условию* $(\exists l)$ [$L(\varphi, l)$ — *бесконечное множество*], *а также когда* $i = 5$ *и о. р. ф. φ ограничена*;

в) *слабо предполных классов, когда* $i = 2, 3, 6, \ldots, 11$.

Доказательство утверждения для φ-предполноты использует свойства о. р. ф. φ, а для слабой предполноты базируется на одном методе, который состоит в следующем. Пусть $a_0 = 0$ и $a_n = a_{n-1} + 2n + 1$, когда $n \geqslant 1$. Интервалы $\mathrm{Int}(a_n, n)$, $n \geqslant 0$, не пересекаются и не покрывают множество $\mathbf{N}$. Для любой о. р. ф. φ определим функцию $f(y) = a_{\varphi(y)}$. Любая ее φ-аппроксимирующая функция t удовлетворяет условию $|a_{\varphi(y)} - t(y)| \leqslant \varphi(y)$, т. е. $t(y) \in \mathrm{Int}(a_{\varphi(y)}, \varphi(y))$ для каждого $y \in \mathbf{N}$. Остается выбрать параметры, определяющие классы семейств ППОЛ$_i$ так, чтобы функция t не могла принадлежать классу. Например, для $i = 3$ достаточно рекурсивное множество X выбрать так, чтобы в $\overline{X}$ было бесконечно много интервалов вида $\mathrm{Int}(a_n, n)$, для $i = 7$ (или $i = 9$) взять разбиение множества $\mathbf{N}$ (или идеал) так, чтобы одним из множеств разбиения (идеала) было $\bigcup \mathrm{Int}(a_n, n)$.

В дополнение к теореме 4 можно заметить, что существуют φ-предполные классы, не являющиеся предполными (и таких классов континуум). Поскольку критериальная система для ослабленной полноты содержит все ослабленно предполные классы, то можно сказать, что по разнообразию входящих в нее классов она не может быть существенно более простой, чем критериальная система для обычной полноты, состоящая из всех предполных в R классов.

Под критерием конечной φ-полноты понимаются необходимые и достаточные условия φ-полноты произвольного конечного множества $M \subset R$ (такого, что $M \cap P \neq \varnothing$ и $M \cap Q \neq \varnothing$). В [1] определена эффективная нумерация μ таких множеств, с помощью которой задается характеристическое множество конечной φ-полноты:

$$\text{ПРК}(\varphi) = \{m\colon\ \mu(m)\ \varphi\text{-полно в } R\}.$$

В доказательстве теоремы 2 использовались конечно порождаемые классы $R(X)$ и $R'(X)$; поэтому ее утверждение справедливо и для множества всех критериев конечной φ-полноты. А это означает, что частично упорядоченное по включению множество всех множеств ПРК(φ) имеет минимальным элементом ПРК $=$ ПРК(0), не имеет максимальных элементов, его глубина и ширина счетны. Объединение множеств ПРК(φ) по всем о. р. ф. φ образует характеристическое множество ПРКС конечной слабой полноты.

Теорема 5. *Множество* ПРК *m-сводится к множеству* ПРКС, *а также к множеству* ПРК(φ) *с любой о. р. ф.* φ.

Доказательство. Опишем алгоритм, который для каждого $m \in \mathbf{N}$ строит конечное множество $M_m \subset R$, слабо полное тогда и только тогда, когда множество $\overline{W}_m$ конечное (здесь $W_0, W_1, W_2, \ldots$ — гёделева нумерация всех рекурсивно перечислимых множеств). Для этого представим $\mathbf{N}$ прямой суммой интервалов $\operatorname{Int}(a_n, n)$, где $a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + 2n$. Через Z_m обозначим множество всех нечетных чисел, входящих в интервалы $\operatorname{Int}(a_n, n)$ с $n \in W_m$.

Пусть $\{t(x), p(x), \alpha(x)\}$ — полное множество в R, причем функции t, p и предикат α всюду определены. Наш алгоритм перечисляет без повторений элементы множества Z_m: $z_0, z_1, z_2, \ldots$ и определяет три функции: f_m, g_m, h_m и предикат β_m. Если $Z_m = \varnothing$, то они нигде не определены. Если в перечислении получены z_i и $z_{t(i)}$, то $f_m(z_i) = z_{t(i)}$ (аналогично $g_m(z_i) = z_{p(i)}$, $h_m(i) = z_i$ и $\beta_m(z_i) = \alpha(i)$). Таким образом, если Z_m — конечное множество, то области определения у функций и предиката конечные; если Z_m — бесконечное, то f_m, g_m, β_m порождают класс

$$\{f \in P\colon\ \Delta f \subseteq Z_m \,\&\, \Gamma f \subseteq Z_m\} \cup \{\gamma \in Q\colon\ \Delta\gamma \subseteq Z_m\},$$

а f_m, g_m, h_m, β_m — класс $C_m = \{f \in P\colon\ \Gamma f \subseteq Z_m\} \cup Q$.

Определим еще функцию q: $q(2n+1) = 0$, $q(2n) = 2n+2$, $n \geqslant 0$, и положим $M_m = \{f_m, g_m, h_m, q, \beta_m\}$. В замыкание $[M_m]$ включается C_m, а также все функции-константы.

Пусть множество $\overline{W}_m$ конечное (возможно, пустое). Тогда в $\overline{Z}_m$ только конечное множество нечетных чисел. Пусть о. р. ф. φ такова, что $\varphi^{-1}(0)$ — конечное множество. Для произвольной функции $s' \in P$ определяем функцию $s \in P$ так:

а) если $s'(x)$ не определено, то не определено $s(x)$, иначе

б) если $s'(x) \in Z_m$, то $s(x) = s'(x)$, иначе

в) если $\varphi(x) = 0$ или $s'(x)$ нечетно или ($s'(x)$ четно и $\operatorname{Int}(s'(x), 1) \subset \subset \overline{Z}_m$), то $s(x) = s'(x)$, иначе

г) если $s'(x) + 1 \in Z_m$, то $s(x) = s'(x) + 1$, иначе $s(x) = s'(x) - 1$.

Очевидно, что функция s φ-аппроксимирует функцию s'. Покажем, что $s \in [M_m]$. Функция s принимает только конечное множество значений $a_1, \ldots, a_l$ из $\overline{Z}_m$ (это возможно только в случае в). Пусть $s(Y_0) \subseteq Z_m$, $s(Y_j) =$

$=a_j$ $(j=1, \ldots, l)$ и $Y_0 \cup Y_1 \cup \ldots \cup Y_l = \Delta s$. В представлении

$$s=[\delta_0](s_0 \vee [\delta_1](s_1 \vee \ldots \vee [\delta_l](s_l \vee s_-)\ldots))$$

предикат $\delta_i(x)=И$, если $x \in Y_i$, $\delta_i(x)=Л$, если $x \in (\Delta s - Y_i)$, функция s_0 имеет $\Delta s_0 = Y_0$, $s_i(x) \equiv a_i$ $(i \geqslant 1)$, а функция s_- нигде не определена. Выше показано, что все элементы этого разветвления имеются в $[M_m]$, поэтому $s \in [M_m]$, т. е. множество M_m слабо полно.

Пусть множества W_m и $\overline{W}_m$ бесконечные. Тогда $M_m \subset R'(Z_m)$ и в $\overline{Z}_m$ бесконечно много интервалов вида $\mathrm{Int}(a_n, n)$. Поэтому для любой о. р. ф. φ функция $f(y)=a_{\varphi(y)}$ не имеет φ-аппроксимирующих функций в $R'(Z_m)$ — множество M_m не является слабо полным. Наконец, если множество W_m конечное, то $M_m \subset R'(V)$, где V — множество всех нечетных чисел из интервалов $\mathrm{Int}(a_{2n}, 2n)$, $n \geqslant 0$, а класс $R'(V)$, как и выше, не является слабо полным.

Мы установили, что m-сводится к ПРКС множество $\{x\colon \overline{W}_x$ конечное$\}$, которое Σ_3-полно [2], а в [1] показано, что ПРК $\in \Sigma_3$. Следовательно, ПРК $\leqslant_m$ПРКС. Одновременно доказана и m-сводимость ПРК к ПРК(φ), когда множество $\varphi^{-1}(0)$ конечное.

Если множество $\overline{\varphi^{-1}(0)}$ конечное, то согласно теореме 1 ПРК $=$ ПРК(φ), т. е. m-сводимость одного к другому тривиальна. Если же бесконечны как $\varphi^{-1}(0)$, так и его дополнение, то сводимость ПРК $\leqslant_m$ПРК(φ) устанавливается методом теоремы 6 из [1], когда в качестве рассматриваемого там множества берется $\varphi^{-1}(0)$. Теорема доказана.

Таким образом, в иерархии m-степеней или в иерархии арифметических множеств Клини — Мостовского уровень ослабленной полноты не ниже уровня обычной полноты.

Замечание 1. Наряду с конечной можно изучать эффективную φ-полноту. Обе модификации интересны тем, что критериальные системы для них счетны даже при континууме предполных классов [3]. На базе введенной в [1] эффективной нумерации всех эффективных множеств $M \subseteq R$ определяются характеристические множества эффективной φ-полноты ПРЭ(φ) и слабой полноты ПРЭС. Для них имеет место аналог теоремы 5.

Замечание 2. Можно идти дальше по пути ослабления требований к «полным» множествам. Пусть Φ — вычислимое семейство о. р. ф. (например, $\Phi=\{F(x, n)\colon n \in \mathbf{N}\}$ с о. р. ф. $F(x, y)$).

Определение 4. Множество $M \subseteq R$ называется *Φ-полным*, если $M \cap (Q-Q^*) \neq \varnothing$ и для всякой функции $f \in P$ найдется такое $\varphi \in \Phi$, что замыкание $[M]$ содержит функцию, которая φ-аппроксимирует функцию f.

Аналогично предыдущим определениям вводятся Φ-предполные классы, множество ПРК(Φ) и т. д. Однако даже такая модификация не приводит к существенному упрощению критериев полноты: утверждение в) теоремы 4 и теорема 5 справедливы и для Φ-полноты. В доказательстве интервалы $\mathrm{Int}(a_n, n)$, введенные в теореме 4, заменяются на $\mathrm{Int}(a_n, r_n)$, где $r_n = \max\{\varphi_0(n), \ldots, \varphi_n(n)\}$, если $\Phi=\{\varphi_i(x)\colon i \in \mathbf{N}\}$, и $a_n = a_{n-1}+r_{n-1}+r_n+2$ $(a_0=0)$. Функция $p(n)=a_n$ рекурсивна; допустим, что ее φ_i-аппроксимирует функция $t \in P$ (где $\varphi_i \in \Phi$), т. е. $|p(x)-t(x)| \leqslant \varphi_i(x)$. Так как $\varphi_i(n) \leqslant r_n$ при $n \geqslant i$, то $t(n) \in \mathrm{Int}(a_n, r_n)$. Остальное, как в теоремах 4 и 5.

Замечание 3. Изложенные результаты справедливы и для таких функциональных систем, в которых замкнуты (и предполны) использованные здесь классы. Это имеет место, например, для схем программ Янова [4]. Для систем многоместных функций наиболее естественна n-полнота, хотя не исключены и более общие случаи.

Автор глубоко благодарен В. Б. Кудрявцеву за обсуждение изложенных здесь результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голунков Ю. В. Полнота по модулю идеала в функциональных системах программного типа // Дискретная математика.— 1990.— Т. 2, вып. 2.— С. 112—120.
2. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.— М.: Мир, 1972.— 624 с.
3. Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. Вып. 13.— М.: Наука, 1965.— С. 45—74.
4. Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов // Проблемы кибернетики. Вып. 1.— М.: Наука, 1958.— С. 75—127.

Статья поступила 27.07.89