Т. Ф. Панкратова, Квазимоды и экспоненциальное расщепление гамака,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1991, том 195, 103–112

Т.Ф.Панкратова

КВАЗИМОДЫ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ГАМАКА

В работе рассмотрено семейство одномерных операторов Шредингера с потенциалом, зависящим от параметра α и имеющим два невырожденных минимума при каждом значении параметра. Главный результат - формулировка и доказательство теоремы, устанавливающей поведение кривых собственных значений $E = E(\alpha)$ в окрестности тех точек плоскости (α, E), где эти кривые экспоненциально сближаются, не пересекаясь.

§ I. Введение

Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера

$$A(\alpha)y \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2y}{dx^2} + V(x,\alpha)y = Ey \qquad (I)$$

с гладким потенциалом $V(x,\alpha)$, имеющим как функция x при каждом значении $\alpha \in I$ два невырожденных минимума (две потенциальные ямы) $x_1(\alpha)$ и $x_2(\alpha)$ (см. рис.I). Зависимость потенциала от α пусть такова, что с ростом α одна из ям $(x_1(\alpha))$ движется вверх, а другая $(x_2(\alpha))$ - вниз.

На каждом отрезке $\Delta_i(\alpha)$ оси x, содержащем только одну точку минимума $x_i(\alpha)$, $i = 1,2$ можно рассмотреть самосопряженный оператор $A_i(\alpha)$, порожденный дифференциальным выражением (I) и произвольными самосопряженными граничными условиями. Пусть $\varepsilon_{n_i}(\alpha)$ - собственные числа оператора $A_i(\alpha)$. Функции $\varepsilon_{n_1}(\alpha)$ - монотонно возрастающие, а $\varepsilon_{n_2}(\alpha)$ - убывающие. Назовем кривые $E = \varepsilon_{n_i}(\alpha)$ квазитермами, связанными с i-ой потенциальной ямой, $i = 1, 2$. На плоскости (α, E) эти кривые пересекаются, образуя сеть (гамак) (см. рис.2). Кривые $E = E(\alpha)$ (термы) собственных значений самосопряженного оператора $A(\alpha)$, порожденного дифференциальным выражением (I) на отрезке, содержащем $\Delta_1(\alpha) \cup \Delta_2(\alpha)$ (м.б. на всей оси), не пересекаются, экспоненциально (при $\hbar \to 0$) сближаясь в окрестности точек пересечения квазитермов (рис.2а).

Главный результат настоящей работы - доказательство следующей формулы для собственных значений $E_i(\alpha)$, $i = 1,2$, верной в некоторой окрестности каждой точки пересечения (α^*, E^*) квази-

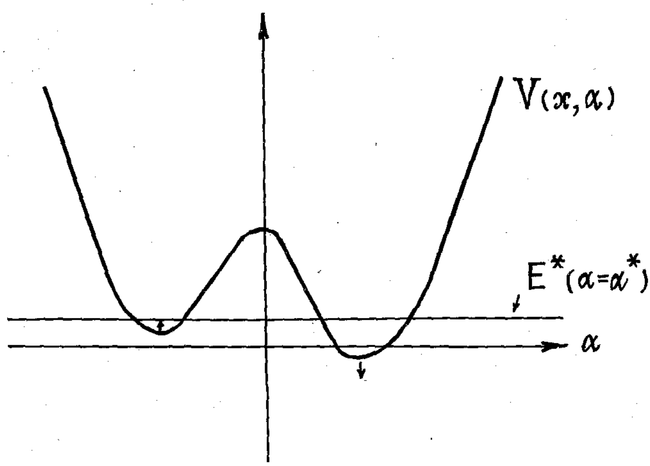

Рис. 1

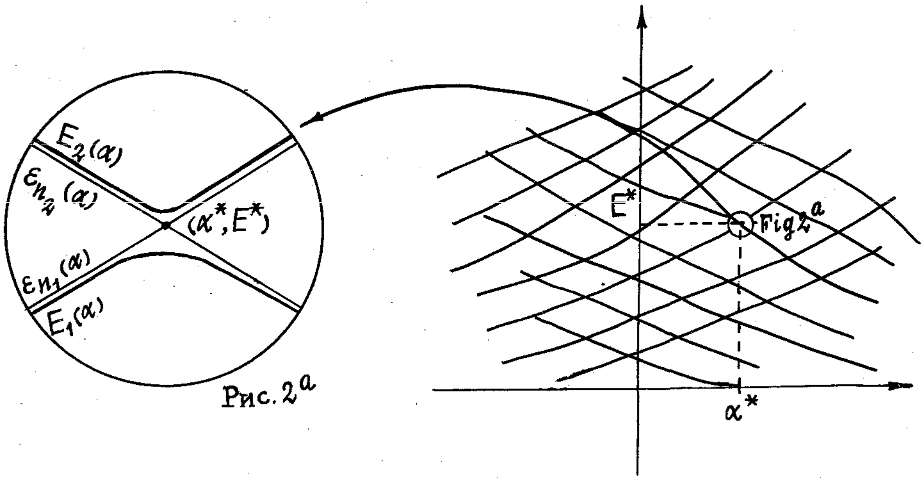

Рис. 2

термов $\varepsilon_{n_1}(\alpha^*) = \varepsilon_{n_2}(\alpha^*) = E^*$ для $0 < \hbar < \hbar_0$ и $n_i \le N$, $i = 1, 2$ (N зависит от гладкости потенциала):

$$E_{1,2}(\alpha) = \frac{\varepsilon_{n_1}(\alpha) + \varepsilon_{n_2}(\alpha)}{2} \pm$$

$$\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{n_1}(\alpha) - \varepsilon_{n_2}(\alpha)}{2}\right)^2 + a\exp\left\{-\frac{b}{\hbar}\right\}} - O\left(\exp\left\{-\frac{b+\delta}{\hbar}\right\}\right), \ \delta > 0, \qquad (2)$$

где a и b – положительные ограниченные функции параметров α и $\hbar$ (явные выражения для них см. в § 3).

Расщепление собственных значений оператора Шредингера с потенциальными ямами, обладающими определенной симметрией, достаточно строго исследовалось многими авторами в начале 80-х годов (см. [I]-[9] , а на физическом уровне строгости еще и раньше, см., напр., [I0]-[II] , где изучалось близкое по сути явление – распространение волн Лява в неоднородной системе, состоящей из двух волноводов. В работе [7] содержится формула вида (2), однако там рассмотрена другая задача (без параметра α и расщепление написано только для двух самых нижних уровней энергии, когда минимальные значения потенциала V лежат на одной прямой $V(x)=E_0$, наконец, вид функции $a = a(\alpha, \hbar, n_1, n_2)$ не выписан явно). Задача с параметром рассмотрена в [9] на физическом уровне строгости и там получена формула вида (2), которая вместо квазитермов ε_{n_i} содержит соответствующие уровни Бора-Зоммерфельда (т.е. первые по $\hbar$ приближения к ε_{n_i}) и в которой функция a выражена в несколько иных терминах. Идеология и методы настоящей работы отличаются от использованных в работах [I]-[II] и в основном следуют работам [I0] - [I4] .

§ 2. Абстрактная теорема

Перед формулировкой теоремы удобно ввести следующие обозначения.

Пусть H – пространство Гильберта со скалярным произведением $\langle \cdot , \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$;

$A(\alpha)$ – семейство самосопряженных операторов в H, $\alpha \in I \subset \mathbb{R}$;

$u_1(\alpha)$, $u_2(\alpha)$ – два ортонормированных вектора из области определения $A(\alpha)$ (следуя В.И.Арнольду [I5] , будем их называть квазимодами) и

$\Lambda_1(\alpha), \Lambda_2(\alpha)$ – две гладкие монотонные функции параметра α на I , такие, что

a) $\max_{\substack{\alpha\in I\\ i=1,2}} \left\|(A(\alpha)-\Lambda_i(\alpha))u_i(\alpha)\right\| \le \varepsilon$,

b) $(-1)^i \Lambda_i'(\alpha) < 0$,

c) $\Lambda_1(\alpha^*) = \Lambda_2(\alpha^*) = \Lambda^*,\ \alpha^* \in I$;

$$\vartheta_{ij} = \vartheta_{ij}(\alpha) = <(A(\alpha)-\Lambda_i(\alpha))\,u_i(\alpha),\, u_j(\alpha)> ;$$

$$\nu_i = \nu_i(\alpha) = \Lambda_i(\alpha) + \vartheta_{ii}(\alpha) ,$$

$$\tilde\lambda_{1,2} = \frac{\nu_1+\nu_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\right)^2 + \vartheta_{12}^2}$$

C – константа, удовлетворяющая условию $C > 8\sqrt{3}\varepsilon$.

Теорема I. Пусть интервал $]\Lambda^*-C,\ \Lambda^*+C[$ не содержит непрерывного спектра оператора $A(\alpha)$, а содержит только два его собственных значения (либо одно двукратное) для каждого $\alpha\in I$. Тогда существуют константы $\alpha_0 = \alpha_0(C)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(C)$, $p = p(C)$, такие, что для всех $|\alpha-\alpha^*| < \alpha_0$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, интервал $S_i(\alpha) = \{\lambda : |\lambda - \tilde\lambda_i(\alpha)| \le p\varepsilon^2\}$, $i = 1,2$, содержит истинное собственное значение оператора $A(\alpha)$.

Доказательство. Рассмотрим окрестность точки (α^*,Λ^*). Представим оператор $A(\alpha)$ в виде $A(\alpha) = A_0(\alpha) + V(\alpha)$, где для оператора $A_0(\alpha)$ числа $\Lambda_i(\alpha)$ и векторы $u_i(\alpha)$ являются собственными, а норма оператора $V(\alpha)$ не превосходит константы, умноженной на ε . Это можно сделать следующим образом. Пополним набор векторов $\{u_1, u_2\}$ до ортонормированного базиса в подпространстве, натянутом на вектора $u_i, (A-\Lambda_i)u_i$, $i = 1,2$. Положим

$$m_{ik} = \begin{cases} <(A-\Lambda_i)u_i, u_k> , & i=1,2;\ k=1,\dots,r; \\ \overline{m_{ki}} , & 2<i\le r;\ k=1,2; \\ 0 , & 2<i\le r;\ 2<k\le r; \end{cases}$$

$2\le r\le 4$, черта означает комплексное сопряжение.

Определим операторы V и A_0 следующими формулами

$$V\cdot = \sum_{i=1}^{r}\ \sum_{k=1}^{r} m_{ik} <\cdot, u_i> u_k ,$$

$$A_0 = A - V .$$

(Легко видеть, что оператор V самосопряжен и $\|V\| \le 2\varepsilon\sqrt{3}$). Теперь улучшим немного операторы A_0 и V так, чтобы норма невязки V стала меньше константы, умноженной на ε^2 . Из этих соображений положим $U_i = q_1^{(i)} u_1 + q_2^{(i)} u_2$ и подберем числа $q_j^{(i)}$, $\mu_i(\alpha)$ и векторы $\phi_i(\alpha)$. Для того, чтобы норма $\|(A(\alpha,)-\Lambda_i(\alpha))(U_i(\alpha)+\Phi_i(\alpha))\|$ не превосходила константы, умноженной на ε^2, необходимо, чтобы векторы $\Phi_i(\alpha)$ удовлетворяли следующим линейным неоднородным уравнениям

$$(A_0-\Lambda_i)\Phi_i = q_j^{(i)}(\Lambda_i-\Lambda_j)u_j - (V-\mu_i)U_i\ , \ j\neq i,\ i=1,2\ .$$

Условие разрешимости этих уравнений приводит к следующим квадратным уравнениям для μ_i :

$$\mu_i^2 - \mu_i(\vartheta_{11}+\vartheta_{22}+\Lambda_j-\Lambda_i)+\vartheta_{ii}(\vartheta_{jj}+\Lambda_j-\Lambda_i)-\vartheta_{ij}^2 = 0,$$

где $i,j\in\{1,2\},\ i\neq j,\ \vartheta_{ij} = \langle Vu_i, u_j\rangle$. Откуда

$$\mu_i = \frac{\vartheta_{11}+\vartheta_{22}+\Lambda_j-\Lambda_i}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(\vartheta_{11}+\vartheta_{22}+\Lambda_j-\Lambda_i)^2}{4} - \vartheta_{ii}(\vartheta_{jj}+\Lambda_j-\Lambda_i)+\vartheta_{ij}^2}\ ,\ j\neq i\ ,$$

и таким образом $\Lambda_{1,2}(\alpha) + \mu_{1,2}(\alpha)$ равны $\tilde\lambda_{1,2}(\alpha)$, значения которых определены выше, перед формулировкой теоремы.

Теперь оператор A можно представить в виде

$$A = A_1 + V_1\ ,$$

где $\tilde\lambda_{1,2}(\alpha)$ - собственные числа оператора A_1, а $\|V_1\|$ не превосходит константы, умноженной на ε^2. Применив известную теорему функционального анализа (см. [16], стр.206, теор.3), оценивающую сдвиг спектрального интервала при малом возмущении, завершим доказательство теоремы I.

§ 3. Теорема о расщеплении

Перед формулировкой второй теоремы удобно ввести дополнительные определения: $\Delta_i(\alpha,\delta) =]\,x_i(\alpha)-L_i(\alpha)-\delta, x_i(\alpha)+L_i(\alpha)+\delta\,[$, где $x_2(\alpha)-x_1(\alpha)<2L_i(\alpha)<2|x_2(\alpha)-x_1(\alpha)|,\ i=1,2;\ J(\alpha)=\Delta_1(\alpha)\cup$ $\cup\ \Delta_2(\alpha)$, $J = max_{\alpha\in I}\ J(\alpha)$;

$V(x,\alpha)$ в уравнении (I) - гладкая функция переменных x и α в прямоугольнике $J\times I$, имеющая как функция x две точки минимума $x_i = x_i(\alpha),\ i=1,2$, при каждом $\alpha\in I$ такие, что $V'_x(x_i,\alpha)=0,\ V''_{xx}(x_i,\alpha)>0,\ (-1)^i x_i(\alpha)>0,\ x_1(0)=-x_2(0)=-x_0$;

и как функция α, удовлетворяющая условию $(-1)^i \frac{d}{d\alpha} V(x_i(\alpha),\alpha) < 0$, $i=1,2$, $\alpha \in I$, причем $V(x(\alpha),\alpha) - V(x_i(\alpha),\alpha) > 0$ при $x \in \Delta_i(\alpha,\delta)$ и $x \neq x_i(\alpha)$.

Для каждого $\alpha \in I$, $E = \varepsilon_{n_i}(\alpha)$ и $y = y_{n_i}(x,\alpha)$ – число и функция переменного x, удовлетворяющие уравнению (I) на $\Delta_i(\alpha,\delta)$ точно, где

$$y_{n_i}(x,\alpha) = (\psi_{n_i}(x,\alpha))^{-\frac{1}{2}} D_{n_i}(\hbar^{-\frac{1}{2}} \psi_{n_i}(x,\alpha)),$$

$D_{n_i}(t)$ – решение уравнения

$$D_n'' = [t^2 - (2n+1)] D_n ,$$

$\psi_{n_i}(x,\alpha)$ – гладкая функция переменного x на $\Delta_i(\alpha,\delta)$. Разложения по степеням $\hbar$ чисел ε_{n_i} и функций y_{n_i} построены в работе [17] и представляют собой квазиклассическую асимптотику энергетических уровней и собственных состояний для каждой потенциальной ямы. Существование таки пар $(\varepsilon_{n_i}, y_{n_i})$ доказано в работе [14]. При наших условиях на потенциал справедливы неравенства

$$(-1)^i \frac{d}{d\alpha} \varepsilon_{n_i}(\alpha) < 0, \quad i = 1,2, \quad \alpha \in I .$$

Пусть (α^*, E^*) – точка плоскости (α, E), в которой

$$\varepsilon_{n_1}(\alpha^*) = \varepsilon_{n_2}(\alpha^*) = E^* .$$

Обозначим

$$q_i(t) = \sqrt{2m[V(t,\alpha) - V(x_i(\alpha),\alpha)]}\quad i = 1,2 ;$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} +\left[2\int_{x_1(\alpha)}^{x} q_1(t)\,dt\right]^{1/2}, & \text{при } x<0, \\ -\left[2\int_{x}^{x_2(\alpha)} q_2(t)\,dt\right]^{1/2}, & \text{при } x>0; \end{cases}$$

$$\omega_i = m^{-1}[\psi_0'(x_i(\alpha))]^2, \qquad \omega/q = \begin{cases} \omega_1/q_1, & \text{при } x<0, \\ \omega_2/q_2, & \text{при } x>0; \end{cases}$$

$$a = \frac{2^{n-1}}{n!\,\hbar^{n-1/2}} \sqrt{\frac{\omega_1\omega_2}{\pi}}\, |\psi_0(-0)|^n |\psi_0(+0)|^n (\psi_0(-0) + \psi_0(+0)) \times$$

$$\times \left\{ \frac{2n+1}{2} \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} \left(\frac{m\omega}{q} - \frac{\psi_0'}{|\psi_0|} \right) dt \right\} ;$$

$$q(t) = \begin{cases} q_1(t), & \text{при } t<0, \\ q_2(t), & \text{при } t>0; \end{cases}$$

$$b = \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} q(t)\, dt ;$$

$$d^2 = a \exp\left(-\frac{b}{\hbar}\right) ;$$

$$\tilde{E}_{1,2} = \frac{\varepsilon_{n_1}(\alpha) + \varepsilon_{n_2}(\alpha)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{n_1}(\alpha) - \varepsilon_{n_2}(\alpha)}{2}\right)^2 + d^2} .$$

p, q – фиксированные положительные числа такие, что интервал $\Delta(q) = [\alpha^* - q, \alpha^* + q]$ содержится в I ;

$\varepsilon(\alpha)$ – положительная функция на $\Delta(q)$;

$S_i(p, q, \varepsilon)$ – полоса на плоскости (α, E) , определенная следующим образом

$$\left\{(\alpha, E) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{E}_i(\alpha) - p\varepsilon^2(\alpha) \le E \le \tilde{E}_i(\alpha) + p\varepsilon^2(\alpha),\ \alpha \in \Delta(q)\right\} ,$$
$$i = 1,2 .$$

Теорема 2. Существуют такие положительные числа p и q и такая положительная функция $c(\alpha, \hbar)$, определенная на $\Delta(q) \times \,]0, \hbar_0[$ и полиномиальная по $\hbar^{-1/2}$, что, если мы возьмем

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha, \hbar) = c(\alpha, \hbar) \max_i \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_i(\alpha) - l_i(\alpha) - \delta}^{x_i(\alpha)} q_i(t)\, dt \right\} ,$$

то при достаточно малых $\hbar_0$ полосы $S_i(p, q, \varepsilon)$, $i = 1,2$, не пересекаются и для всех $\alpha \in \Delta(q)$ существует ровно два энергетических уровня E_i , $i = 1,2$, уравнения (I), таких, что $(\alpha, E_i) \in S_i(p, q, \varepsilon)$.

Доказательство. Применим теорему I к оператору Шредингера с самосопряженными граничными условиями на J , выбрав квазимоды u_1 и u_2 так, чтобы они удовлетворяли уравнению (I) с экспоненциально малой погрешностью ε . Это можно на основании анзацной теоремы, доказанной в [14]. Надо взять

$$u_i(x,\alpha) = \chi_i(x,\alpha) y_{n_i}(x,\alpha), \quad i = 1,2,$$

где $\chi_i(x,\alpha)$ - гладкие срезающие функции, такие, что

$$\chi_i(x,\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Delta_i(\alpha,0), \\ 0, & \text{при } x \notin \Delta_i(\alpha,0), \end{cases}$$

а $y_{n_i}(x,\alpha)$ - решения уравнения (I), определенные выше. Исследования соответствующих интегралов показывают, что

$$\vartheta_{11} = \vartheta_{22} + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2),$$

$$\vartheta_{12} = d + O(\varepsilon^2),$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$, определенное в формулировке теоремы 2. Применив теорему I к нашему случаю с $\widetilde{\lambda}_i = \widetilde{E}_i$ и $\Lambda_i(\alpha) = \mathcal{E}_{n_i}(\alpha)$, получим утверждение теоремы 2.

Литература

I. Аленицын А.Г. Расщепление спектра, порожденное потенциальным барьером. Дифф.ур-ния, 1982, т.18, № 11, с.1971-1975.

2. Simon B. Semiclassical Analysis of Low Lying Eigenvalues. II-Tunneling. Ann.Math., 1984, v.120, N 1, p.89-118.

3. Gesztesy F., Gurarie D., Holden H., Claus M., Sadun L., Simon B., Vogl P. Trapping and Cascading of Eigenvalues in the Large Coupling Limit. Comm.Math.Phys., 1988, v.118, N 4.

4. Harrel E.M. Double Wells.Comm.Math.Phys., 180, v.75, N 3, p.239-261.

5. Jona-Lasinio G., Martinelly F., Scoppola E. New Approach to the Semiclassical Limit of Quantum Mechanics. Comm.Math.Phys, 1981, v.80, N 2, p.223-254.

6. Helffer B., Sjöstrand J. Multiple Wells in the Semiclassical Limit I. Comm. in Partial Diff.Equations, 1984, v.9(4), p.337-408.

7. Helffer B., Söstrand J. Puits Multiples en Limite Semi-Classique II. Interaction Moléculer. Symetries. Perturbation. Ann.Inst.Henri Poincaré, 1985, v.42, N 2, p.127-212.

8. H e l f f e r B., S j ö s t r a n d J. Multiple Wells in the Semiclassical Limit III. Math.Nachr., 1985, v.124, p.263-313.

9. B e r r y M.V. The Adiabatic Limit and the Semiclassical Limit. J.Phys.A: Math.Gen., 1984, v.17, p.1225-1233. Printed in Great Britain.

10. Б у л д ы р е в В.С., О з е р о в Д.К. Дисперсия уравнения высокочастотных волн Лява в неоднородном полупространстве. – В сб.: Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. Вычисл.сейсмол., 1967, № 3, с.254-268.

11. Б у л д ы р е в В.С., О з е р о в Д.К. Высокочастотная асимптотика собственных функций-волн Лява. – В сб.: Методы и программы для анализа сейсмических наблюдений. Вычисл. сейсмол., 1967, № 3, с.269-281.

12. П а н к р а т о в а Т.Ф. Квазимоды и расщепление собственных значений. Докл.АН СССР, 1984, т.276, № 4, с.795-799.

13. П а н к р а т о в а Т.Ф. Квазимоды и экспоненциальное расщепление собственных значений. Проблемы Мат. Физ., вып.II, 1986, с.167-177.

14. П а н к р а т о в а Т.Ф. Уравнение Шредингера. Теорема об анзацном представлении решения, сосредоточенного в окрестности минимума потенциала. – В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1984, т.140, с.137-150.

15. А р н о л ь д В.И. Моды и квазимоды. Функц.анализ, 1972, т.6, вып.2, с.12-20.

16. Б и р м а н М.Ш., С о л о м я к М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Учебное пособие. Л., 1980, 264 с.

17. С л а в я н о в С.Ю. Асимптотика сингулярных задач Штурма-Лиувилля по большому параметру в случае близких точек перехода. Дифф.ур-ния, 1969, т.5, № 2, с.313-325.