И. З. Батыршин, И. И. Батыршин, Строго монотонные операции на порядковых шкалах правдоподобности на основе мультимножеств, *Исслед. по информ.*, 2004, выпуск 8, 41–46

# СТРОГО МОНОТОННЫЕ ОПЕРАЦИИ НА ПОРЯДКОВЫХ ШКАЛАХ ПРАВДОПОДОБНОСТИ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

**И.З. Батыршин, И.И. Батыршин**

## Введение

Экспертные оценки правдоподобности, как правило, измеряются в порядковых шкалах, т.е. множество значений этих оценок обычно представляет собой конечное линейно упорядоченное множество элементов, на котором адекватными являются лишь операции min и max, определяемые линейной упорядоченностью шкалы [1, 2]. Градациям шкалы можно поставить в соответствие вещественные числа, упорядоченность которых соответствует упорядоченности градаций шкалы, причем на множестве этих чисел допустимы любые строго монотонные преобразования. Примером такой шкалы может быть линейно упорядоченное множество лингвистических оценок типа $X_p$ = {*НЕПРАВДОПОДОБНО*, *МАЛАЯ ПРАВДОПОДОБНОСТЬ*, *МОЖЕТ БЫТЬ*, *БОЛЬШАЯ ПРАВДОПОДОБНОСТЬ*, *НАВЕРНЯКА*}. Градациям шкалы можно поставить в соответствие наборы чисел {1, 2, 3, 4, 5}, {0, 0.2, 0.5, 0.8, 1} или другие, сохраняющие упорядоченность градаций, однако вещественные операции типа сложение и умножение над этими величинами применять нельзя.

Подобные качественные оценки правдоподобности используются в экспертных системах. В качестве адекватных операций конъюнкции и дизъюнкции на таких шкалах можно использовать операции min и max, соответственно. Однако эти операции не являются строго монотонными, т.к. значение этих операций равно значению одного из операндов и не меняется при изменении значения второго операнда в определенном диапазоне. Например, $1\wedge2 = \min\{1,2\} = 1$, $1\wedge5 = \min\{1,5\} = 1$. Нестрогость этих операций не позволяет учитывать изменение правдоподобности посылок в правилах экспертных систем, использующих качественные оценки правдоподобности. Такая нечувствительность процедур логического вывода экспертных систем к изменению правдоподобности посылок приводит на практике к нежелательному эффекту, когда многие заключения, получаемые на выходе экспертной системы, получают одинаковые оценки правдоподобности, хотя они могут существенно отличаться по значениям правдоподобности посылок. Заметим, что введение на конечных порядковых шкалах правдоподобности операций конъюнкции и дизъюнкции, задаваемых непосредственно в виде отображений, удовлетворяющих аксиомам $t$-норм и $t$-конорм [3], не решает проблемы определения строго монотонных операций на таких шкалах [5].

Решение этой проблемы было предложено в [1], где строгая монотонность операций конъюнкции и дизъюнкции над элементами порядковых шкал осуществлялась за счет погружения этих шкал в пространство так называемых лексикографических оценок, когда результатом операции является не элемент шкалы, а упорядоченный список операндов, и эти списки сравниваются по правдоподобности лексикографически. Например, в классе мин-оценок правдоподобности операции конъюнкции строго монотонны, и для рассмотренного выше примера получаем $1\wedge2 = (1,2)$, $5\wedge1 = (1,5)$ и $(1,2) < (1,5)$. В [1] было введено несколько классов оценок правдоподобности, на каждом из которых были определены операции конъюнкции и дизъюнкции. Несколько классов этих оценок были реализованы в оболочке экспертной системы ЛЕКСИКО [4].

Разработанный в [1] способ введения строго монотонных операций над элементами порядковой шкалы основан на оперировании со списками элементов из этой шкалы, что представляло определенные трудности как в разработке модели, так и в ее практической реализации. В данной работе предлагается представление классов оценок в виде мультимножеств, что значительно упрощает и теоретическую и практическую реализацию предложенного в [1] метода введения строго монотонных операций конъюнкции и дизъюнкции на порядковых шкалах.

## Основные понятия

Пусть $X_p = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ – линейно упорядоченное множество значений истинности (возможности, правдоподобности) такое, что $x_i < x_j$ для всех $i < j$. Значения $x_0$ и $x_{n+1}$ будут обозначаться как **0** и **1** и будут интерпретироваться как ложное (невозможное) и истинное (достоверное), соответственно. (Мы не делаем различия в модальностях как в модальной логике). Остальные значения рассматриваются как промежуточные градации истинности. Для рассмотренного выше примера шкалы правдоподобности **0** и **1** обозначают градации *НЕПРАВДОПОДОБНО* и *НАВЕРНЯКА* соответственно. Обозначим через $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ подмножество множества $X_p$, состоящее из элементов промежуточной градации истинности. Мультимножеством $A$ над $X$ будем называть строку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i$ – число вхождений элемента $x_i$ в мультимножество $A$. Для некоторого $j$ значение $a_j$ может быть равно нулю, это будет означать, что $A$ не содержит $x_j$. Подобные мультимножества будут называться оценками истинности, правдоподобности. Пусть $F$ обозначает множество всех мультимножеств над $X$ и $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ суть некоторые мультимножества из $F$. Мы будем рассматривать два различных способа построения мультимножеств из элементов исходного множества $X$, соответствующие способам построения лексикографических мин-оценок и макс-оценок правдоподобности [1]. В первом случае мультимножество будет рассматриваться как результат конъюнкции элементов из $X$, а во втором случае как результат дизъюнкции элементов из $X$. Соответствующие классы мультимножеств будут называться конъюнктивными и дизъюнктивными, а множества из этих классов будут обозначаться как к-мультимножества и д-мультимножества. Каждый из классов совпадает с $F$, однако отношения сравнения и операции на этих классах множеств будут определяться по разному.

## Операции конъюнкции и дизъюнкции в классе конъюнктивных мультимножеств

Конъюнктивное мультимножество (к-мультимножество) состоит из всех элементов множества $X$, участвующих в конъюнкции. На множестве $F$ введем операцию конъюнкции $\wedge$ следующим образом:

$$(a_1,\dots,a_n)\wedge(b_1,\dots,b_n)=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n).$$

Определение упорядочения к-мультимножеств основано на свойстве операции конъюнкции [1, 3]: $A\wedge B \le A$, т.е. «добавление» к элементам к-мультимножества $A$ элементов к-мультимножества $B$ «ослабляет» правдоподобность результата. Отношения равенства и упорядочения на $F$ вводятся следующим образом:

$A = B$, тогда и только тогда, когда $a_i = b_i$ для всех $i = 1,\dots,n$.

$A < B$, если существует такое $i$, что $a_i > b_i$ и $a_k = b_k$ для всех $k < i$.

Из определения следует, что отношение упорядочения к-мультимножеств определяется минимальным элементом, по которому к-мультимножества различаются. К-мультимножества могут рассматриваться как результат применения нечеткой конъюнкции, обобщающей операцию *min*. Они являются аналогами лексикографических мин-оценок правдоподобности, изучавшихся в [1].

Пусть $F_p = F\cup\{\mathbf{0}\}\cup\{\mathbf{1}\}$ – расширенное множество значений правдоподобности. Расширение отношения $<$ на $F_p$ определим следующим образом: $\mathbf{0} < A < \mathbf{1}$ для любого к-мультимножества $A$ из $F$. В общем случае $A$ и $B$ будут обозначать элементы из $F_p$. Положим $A \le B$, если $A = B$ или $A < B$. Очевидно, что операция $\le$ на $F_p$ является операцией линейного упорядочения, т.е. $\le$ транзитивно, и для любых $A$ и $B$ из $F_p$ выполняется либо $A \le B$ либо $B \le A$.

Определим расширение операции конъюнкции на $F_p$:

$$A\wedge\mathbf{0} = \mathbf{0}\wedge A = \mathbf{0},\ A\wedge\mathbf{1} = \mathbf{1}\wedge A = A.$$

Операция дизъюнкции $\vee$ на множестве $F_p$ вводится следующим образом:

$$A\vee\mathbf{0} = \mathbf{0}\vee A = A,\ A\vee\mathbf{1} = \mathbf{1}\vee A = \mathbf{1},$$

$$(a_1,\dots,a_n)\vee(b_1,\dots,b_n)= \max\{(a_1,\dots,a_n),\ (b_1,\dots,b_n)\},$$

где max берется в соответствии с введенным отношением линейного упорядочения на $F_p$.

Теорема 1. *Операции $\wedge$ и $\vee$ являются соответственно t-нормой и t-конормой* [3] *на множестве к-мультимножеств $F_p$, т.е. удовлетворяют ассоциативности, коммутативности и следующим условиям:*

$$A\wedge\mathbf{1} = A,\quad A\vee\mathbf{0} = A \quad \text{(граничные условия)},$$

$$A\wedge B \leq C\wedge D,\ A\vee B \leq C\vee D, \text{ если } A \leq C, B \leq D \quad \text{(монотонность)},$$

*причем $\wedge$ является строго монотонной операцией на $F_p$, т. е. удовлетворяет условию*

$$A\wedge B< A\wedge D, \text{ если } B < D \text{ и } A \neq \mathbf{0} \quad \text{(строгая монотонность)}.$$

Следует заметить, что введенная операция дизъюнкции не является строго монотонной. В следующем разделе вводится строго монотонная операция дизъюнкция на множестве мультимножеств.

## Операции конъюнкции и дизъюнкции в классе дизъюнктивных мультимножеств

Дизъюнктивное мультимножество (д-мультимножество) состоит из всех элементов множества $X$, участвующих в дизъюнкции. На множестве $F$ введем операцию дизъюнкции $\vee$ следующим образом:

$$(a_1,\dots,a_n)\vee(b_1,\dots,b_n) = (a_1+ b_1,\dots, a_n+b_n).$$

Определение упорядочения д-мультимножеств основано на свойстве операции дизюнкции $A\vee B \geq A$, т.е. «добавление» к элементам д-мультимножества $A$ элементов д-мультимножества $B$ «усиливает» правдоподобность результата. Отношения равенства и упорядочения на $F$ вводятся следующим образом:

$A = B$ тогда и только тогда, когда $a_i = b_i$ для всех $i = 1,\dots, n$.

$A < B$, если существует такое $i$, что $a_i < b_i$ и $a_k = b_k$ для всех $k > i$.

Расширение отношения < на расширенное множество значений правдоподобности $F_p= F\cup\{\mathbf{0}\}\cup\{\mathbf{1}\}$ определяется как $\mathbf{0} < A < \mathbf{1}$ для любого д-мультимножества $A$ из $F$. В общем случае $A$ и $B$ будут обозначать элементы из $F_p$. Положим $A \leq B$, если $A = B$ или $A < B$. Очевидно, что операция $\leq$ на $F_p$ является операцией линейного упорядочения.

Определим расширение операции дизъюнкции на $F_p$:

$$A\vee\mathbf{0} = \mathbf{0}\vee A = A,\ A\vee\mathbf{1} = \mathbf{1}\vee A =\mathbf{1}.$$

Операция конъюнкции $\wedge$ на множестве $F_p$ вводится следующим образом:

$$A\wedge\mathbf{0} = \mathbf{0}\wedge A = \mathbf{0},\ \ A\wedge\mathbf{1} = \mathbf{1}\wedge A = A,$$
$$(a_1,\ldots,a_n)\wedge(b_1,\ldots,b_n) = \min\{(a_1,\ldots,a_n), (b_1,\ldots,b_n)\},$$

где min берется в соответствии с введенным отношением линейного упорядочения на $F_p$.

Теорема 2. *Операции $\wedge$ и $\vee$ являются соответственно t-нормой и t-конормой на множестве д-мультимножеств $F_p$, причем $\vee$ является строго монотонной операцией на $F_p$, т. е. удовлетворяет условию*

$A\vee B < A\vee D$, *если* $B < D$ *и* $A \neq \mathbf{1}$ *(строгая монотонность).*

Заметим, что введенная операция конъюнкции не является строго монотонной на множестве д-мультимножеств.

## Заключение

В работе предложены новые методы построения строго монотонных операций конъюнкции и дизъюнкции на порядковых шкалах правдоподобности. Эти методы более удобны и просты для реализации в процедурах логического вывода экспертных систем с качественными экспертными оценками правдоподобности, чем методы, предложенные в [1] на основе лексикографических оценок правдоподобности. Предложенные операции являются адекватными в порядковых шкалах правдоподобности в отличие от многих математических операций, традиционно применяемых для этих целей в экспертных системах.

Работа выполнялась при поддержке гранта РФФИ № 03-01-96245.

## Литература

1. Батыршин И.З. Лексикографические оценки правдоподобности с универсальными границами. I. // Техническая кибернетика. Известия РАН. - 1994. - N 5. - С. 28-45.

2. Батыршин И.З. Методы представления и обработки нечеткой информации в интеллектуальных системах // Новости искусственного интеллекта. - 1996. - № 2. - С. 9 - 65.

3. Батыршин И.З. Основные операции нечеткой логики и их обобщения. – Казань: Отечество, 2001.

4. Закуанов Р.А., Батыршин И.З., Бикушев Г.С., Архиреев В.П. Представление нечетких понятий в гибридной экспертной системе СМОПЛЕКС // Тр. междунар. семинара "Мягкие вычисления - 96". - Казань, 1996. - С. 122 - 128.

5. Fodor J. Smooth associative operations on finite ordinal scales // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. - 2000. - № 8 (6). - P. 791–795.