Е. Г. Емельянов, О “склеивании” квадратичных дифференциалов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2009, том 371, 69–77

https://www.mathnet.ru/znsl3545

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 371, 2009 г.

Е. Г. Емельянов

О “СКЛЕИВАНИИ” КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

**Восьмидесятилетию со дня рождения
Игоря Петровича Митюка
посвящается**

Согласно основной структурной теореме Дженкинса [1], дополнение замыкания объединения всех критических траекторий квадратичного дифференциала Qdz^2 на компактной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ состоит из конечного числа областей, каждая из которых есть либо круговая, либо кольцевая, либо концевая, либо полосообразная область этого дифференциала. В случае отсутствия плотностных структур можно сказать, что замкнутые критические траектории квадратичного дифференциала разбивают поверхность $\mathfrak{R}$ на конечное число областей указанного вида. Если квадратичный дифференциал не имеет полюсов порядка > 2, то концевые области в разбиении отсутствуют. Каждая круговая область D_i квадратичного дифференциала допускает конформный гомеоморфизм $\zeta = \zeta(z)$ на единичный круг, удовлетворяющий уравнению

$$-\frac{\alpha_i^2}{4\pi^2}\frac{d\zeta^2}{\zeta^2} = Qdz^2,$$

где $\alpha_i > 0$ – метрическая характеристика квадратичного дифференциала, означающая длину его замкнутой траектории в области D_i. Для кольцевой области D_j существует конформный гомеоморфизм на круговое кольцо $\{1 < |z| < r_j\}$, удовлетворяющий такому же уравнению. Здесь r_j – еще одна метрическая характеристика квадратичного дифференциала, определяющая конформный модуль области D_j. Для полосообразной области D_k существует конформный гомеоморфизм на полосу $\{0 < \operatorname{Im} z < h_k\}$, удовлетворяющий уравнению

$$d\zeta^2 = Qdz^2,$$

Ключевые слова : квадратичный дифференциал, траектория, экстремальное разбиение.

где h_k – длина дуги ортогональной траектории квадратичного дифференциала, соединяющей противоположные стороны области D_k. Набор параметров α_i, r_j, h_k и старшие коэффициенты разложений квадратичного дифференциала в окрестностях полюсов второго порядка определяют квадратичный дифференциал с заданным типом разбиения.

Естественным обращением "основной структурной теоремы" Дженкинса для случая отсутствия плотностных структур и полюсов порядка > 2 является утверждение о возможности "склеить" риманову поверхность $\mathfrak{R}$ из нескольких копий единичного круга, нескольких круговых колец с заданными модулями и нескольких горизонтальных полос с произвольно выбранными высотами, получив на ней квадратичный дифференциал с заданными метрическими характеристиками. Формулировка и доказательство такого утверждения и является целью данной работы. Полученная теорема является теоремой существования квадратичных дифференциалов с произвольно выбранными метрическими характеристиками.

Сравнительно недавно появились работы П. М. Тамразова [2, 3], в которых таким способом (т.е. при помощи "склеивания") было доказано существование квадратичного дифференциала с произвольно выбранными метрическими свойствами для задач Чеботарева и Грётша (здесь $\mathfrak{R} = \mathbb{C}$), позднее появилась работа А. Ю. Солынина [4], содержащая общий результат в случае отсутствия полосообразных областей. Оба автора для описания требуемого разбиения рассматриваемой поверхности использовали заданный на ней граф. Мы используем другой подход, который представляется более удобным.

1. Исходные материалы

1.1. Области. Пусть для $1 \le k \le p_1$ область D_k представляет собой копию единичного круга, для $p_1 + 1 \le k \le p_1 + p_2$ область D_k есть кольцо $\{1 < |z| < r_k\}$ и для $p_1 + p_2 + 1 \le k \le p_1 + p_2 + p_3 = p$ область D_k есть полоса $\{0 < \operatorname{Im} z < h_k\}$. При этом для $1 \le k \le p_1 + p_2$ заданы положительные числа α_k.

1.2. Дуги. Пусть задано отображение $k = k(i)$ множества индексов $1, 2, \dots, 2q$ в множество $1, 2, \dots, p$. Пусть $\gamma_i \subset \partial D_k$, $k = k(i)$ – открытая дуга, ориентированная соответственно естественной ориентации границы ∂D_k, $P(i)$ и $Q(i)$ – начальная и конечная точки дуги γ_i, соответственно. При этом, возможно, $P(i)=\pm\infty$ или $Q(i)=\pm\infty$, но не одновременно. Для $1\le i\le 2q$ положим

$$i'=2q-i+1$$

Через $|\gamma_i|$ будем обозначать длину γ_i в метрике соответствующего квадратичного дифференциала на D_k, т.е. дифференциала $-\frac{\alpha_k^2}{4\pi^2}\frac{dz^2}{z^2}$, если D_k – кольцо или круг, и дифференциала dz^2, если D_k – полоса. Должны быть выполнены условия:

$$|\gamma_i|=|\gamma_i'|, \tag{1}$$

если $P(i)=\infty$, то $Q(i')=\infty$, и если $Q(i)=\infty$, то $P(i')=\infty$;

$$\forall k,\quad 1\le k\le p,\quad \partial D_k=\bigcup_{k(i)=k}\overline{\gamma_i}$$

1.3. Циклы. Будем писать $\gamma_i\succ\gamma_j$, если $k(i)=k(j)$, $P(i)=Q(j)$ (возможно, $P(i)=Q(j)=\infty$). Набор дуг $\gamma_{i_1},\gamma_{i_2},\ldots,\gamma_{i_{2m}}$ назовем циклом, если выполнены условия:

$$\begin{array}{lll} 1^0 & \gamma_{i_{2k+1}}\succ\gamma_{i_{2k}}, & 0\le k\le m; \\ 2^0 & (i_{2k})'=i_{2k+1}, & 0\le k\le m-1,\quad (i_{2m})'=i_1. \end{array} \tag{2}$$

Число m назовем длиной цикла. Потребуем, чтобы при $P(i_1)\ne\infty$ было $m\ne 2$. Два цикла, состоящие из одних и тех же дуг, отождествляются.

2. “Склеивание” поверхности $\mathfrak{R}$

2.1. Точки. Точками $\mathfrak{R}$ являются:

1^0. точки областей D_k, $1\le k\le p$;

2^0. пары отождествленных (“склеенных”) точек (p,p'), $p\in\gamma_i$, $p'\in\gamma_{i'}$;

3^0. точки c_s, $1\le s\le s_1$, каждая из которых соответствует некоторому циклу длины $m>1$, в котором $P(i_1)\ne\infty$;

4^0. точки a_s, $1\le s\le s_2$, каждая из которых соответствует циклу длины 1, в котором $P(i_1)\ne\infty$;

5^0. точки b_s, $1\le s\le s_3$, каждая из которых соответствует циклу длины $m\ge 1$, в котором $P(i_1)=\infty$.

2.2. Локальные координаты. Пусть в дальнейшем z_k – естественная координата в области D_k.

1. Пусть $p \in D_k$. Тогда окрестностью точки p в $\mathfrak{R}$ является ее окрестность в D_k, $\zeta = z_k - z_k(p)$ – координата в окрестности точки $p \in \mathfrak{R}$, представляющая ее нулем.

2. Пусть $p \in \gamma_i$, $p' \in \gamma_{i'}$, $k = k(i)$, $k' = k(i')$. Точки p и p' склеиваются, если выполнены условия:

$$|p - P(i)| = |p' - Q(i')|, \quad |p - Q(i)| = |p' - P(i')|.$$

Можем считать, что $P(i) \neq \infty$. Положим

$$\zeta_k = \chi(z_k - z_k(p)), \quad \chi = \pm 1, \tag{3}$$

если D_k – полоса, и

$$\zeta_k = \chi \frac{\alpha_k}{2\pi} i \log \frac{z_k}{z_k(p)}, \quad \chi = \pm 1,$$

если D_k – кольцо или круг. Знак χ выбирается таким образом, чтобы $\zeta_k(p)$ возрастало при движении точки p вдоль дуги γ_i от $P(i)$ к $Q(i)$. Тогда для склеивающихся точек $q \in \gamma_i$, $q' \in \gamma_{i'}$ значения $\zeta_k(q)$ и $-\zeta_{k'}(q')$ совпадают. Локальной координатой в окрестности точки $(p, p') \in \mathfrak{R}$ будет функция

$$\zeta(q) = \begin{cases} \zeta_k(q), & q \in D_k \\ -\zeta_{k'}(q'), & q \in D_{k'} \end{cases} \tag{4}$$
$$\zeta(q, q') = \zeta_k(q) = -\zeta_{k'}(q').$$

3. Пусть точка $c_s \in \mathfrak{R}$ соответствует циклу $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_{2m}}$, $P(i_1) \neq \infty$, $k_j = k(i_{2j-1})$.

Положим

$$\zeta_{k_j}(q) = \chi(z_{k_j}(q) - z_{k_j}(P(i_{2j-1}))), \quad 1 \leq j \leq m,$$

если область D_{k_j} – полоса, и

$$\zeta_{k_j}(q) = \chi \frac{\alpha_{k_j}}{2\pi} i \log \frac{z_{k_j}}{z_{k_j}(P(i_{2j-1}))},$$

если область D_{k_j} – кольцо или круг, $\chi = \pm 1$, где знак χ выбирается, как выше. Тогда локальной координатой в окрестности точки $c_s \in \mathfrak{R}$ будет функция

$$\zeta(q) = (\zeta_{k_j}(q))^{\frac{2}{m}} \epsilon^{j-1}, \tag{5}$$

если $q \in D_{k_j}$,

$$\zeta(q, q') = (\zeta_{k_j}(q))^{\frac{2}{m}} \epsilon^{j-1} = (\zeta_{k_{j+1}}(q'))^{\frac{2}{m}} \epsilon^{j}, \tag{6}$$

если $q \in \gamma_{2j}$, $q' \in \gamma_{2j+1}$ – склеенные точки, $\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{m})$.

4. Пусть a_s соответствует циклу γ_{i_1}, γ'_{i_1}, $P(i_1) \neq \infty$, $k = k(i_1)$. Локальной координатой в окрестности точки $a_s \in \mathfrak{R}$ будет функция

$$\zeta(q) = (\zeta_k(q))^2,$$

если $q \in D_k$, и функция

$$\zeta(q, q') = (\zeta_k(q))^2 = (\zeta_k(q'))^2,$$

если $q \in \gamma_{i_1}$, $q' \in \gamma'_{i_1}$.

5. Пусть точка b_s соответствует циклу $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_{2m}}$, $P(i_1) = \infty$. Тогда $P(i_1) = Q(i_2) = \dots = Q(i_{2m}) = \infty$. В дальнейшем в этом пункте для упрощения записи будем опускать индекс i и писать вместо i_j просто j. Положим

$$k_j = k(2j-1), \quad j = 1, 2, \dots m, \quad \zeta_j(q) = \chi[z_{k_j} - z_{k_j}(Q(2j-1))]$$

для $q \in \overline{D_{k_j}}$, $\chi = \pm 1$. Знак χ выбирается таким образом, чтобы при движении точки q вдоль дуги γ_{2j-1} значение ζ_j возрастало. Пусть

$$w_0 = 0, \quad w_j = z_{k_j}(P(2j)) - z_{k_j}(Q(2j-1)), \quad j = \overline{1, m} \tag{7}$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_m = A_s = |A_s| i e^{-i\theta_s}.$$

Координату в окрестности точки b_s определим следующим образом:

$$\zeta(q) = \exp\left(\frac{2\pi}{|A_s|} e^{i\theta_s} \left(\zeta_j(q) + \sum_{t=0}^{j-1} w_t\right)\right) \tag{8}$$

для $q \in D_{k_j}$.

3. Теорема о "склеивании"

Теорема. *Пусть области D_k, $1 \le k \le p$, и дуги γ_i, $1 \le i \le 2q$, описаны выше. Тогда определенная в §2 поверхность $\mathfrak{R}$ вместе с заданной на ней системой локальных координат $\zeta(q)$ представляет собой компактную риманову поверхность рода*

$$g = 1 - \frac{E}{2}, \quad E = s_1 + s_2 + s_3 - q + p_1 + p_3.$$

Пусть $\varphi_k : D_k \to \mathfrak{R}$ – естественное вложение, $I(\zeta) = \varphi^{-1}$ – обратное отображение. Тогда

$$(I')^2 d\zeta^2$$

– мероморфный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, для которого области $\mathcal{D}_k = \varphi(D_k)$ соответственно круговые, кольцевые и полосообразные области. В точках c_s, $1 \le s \le s_1$, этот дифференциал имеет нули порядков $m_s - 2$, в точках a_s, $1 \le s \le s_2$, – простые полюсы, и в точках b_s, $1 \le s \le s_3$, – двойные полюсы. При этом в окрестности точки b_s в терминах параметра, представляющего эту точку нулем, имеет место разложение

$$(I')^2 = -\frac{A_s^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{\zeta^2} + \cdots. \tag{9}$$

Кроме того, этот дифференциал имеет двойной полюс в каждой точке, являющейся образом нуля при вложении в $\mathfrak{R}$ круга, и не имеет других особенностей.

Доказательство. 1. Легко видеть, что $\mathfrak{R}$ будет ориентируемой двумерной поверхностью без края. Доказательство того утверждения, что $\mathfrak{R}$ – риманова поверхность, состоит в прямой проверке согласованности введенных выше локальных координат.

2. Дуги γ_i, $\gamma_{i'}$ склеиваются в дугу Γ_i на $\mathfrak{R}$, $1 \le i \le q$. Определим для $1+p_1 \le k \le 1+p_1+p_2$ дуги $\Gamma_{q+k-p_1} \subset \mathcal{D}_k$ таким образом, чтобы каждая из них соединяла две точки множества $\{c_s\}$, принадлежащие различным граничным компонентам двусвязной области $\mathcal{D}_k$. Тогда набор точек $\{c_s\}\bigcup\{a_s\}\bigcup\{b_s\}$, набор дуг Γ_i, $1 \le i \le q+p_2$, и набор областей $\mathcal{D}_k$, $1 \le k \le p_1$, $p_1+p_2+1 \le k \le p$, и $D_k \backslash \Gamma_{q+k-p_1}$, $1+p_1 \le k \le 1+p_1+p_2$, образуют клеточное разбиение поверхности $\mathfrak{R}$. Отсюда получаем значение эйлеровой характеристики E этой поверхности.

3. Разложение (9) следует из (7).

4. Примеры и замечания

4.1. Пусть на двумерной сфере S^2 задан плоский связный граф Γ без циклов (дерево), $\{c_s\}_1^{s_1}$, $\{a_s\}_1^{s_2}$ – соответственно множества его вершин порядка ≥ 3 и порядка 1, $\{\Gamma_i\}_{i=1}^q$ – множество его ребер. Пусть $x_1, x_2, \dots x_q$ – произвольный набор положительных чисел, $1 = 2\sum_i x_i$, $\Gamma = \bigcup \overline{\Gamma}_i$, $G = S^2 \backslash \Gamma$.

Выберем множество областей состоящим из одного единичного круга Δ и определим набор дуг γ_i, $1 \leq i \leq 2q$, на границе этого-круга следующим образом. Одной из вершин графа порядка 1 сопоставим точку $z = 1$ на единичной окружности. Обходя границу ∂G в положительном направлении, начиная от выбранной вершины, будем сопоставлять одной стороне разреза по дуге Γ_i дугу γ_i на единичной окружности длины $2\pi x_i$. Если другая сторона разреза уже пройдена, то дуге присваивается номер i'. Легко видеть, что вершины графа порядка 1 однозначно соответствуют циклам длины 1. Склеенная поверхность будет в этом случае, очевидно, римановой сферой. Пусть $\varphi : \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$ – естественное вложение. Можем считать, что $\varphi(0) = \infty$. “Склеенный” на сфере квадратичный дифференциал имеет единственый двойной полюс в ∞ и простые полюсы в точках a_s, $1 \leq s \leq s_2$, соответствующих вершинам графа порядка 1. Континуум $\overline{\mathbb{C}} \backslash \varphi(\Delta)$ будет, как известно, континуумом наименьшей емкости $E(a_1, a_2, \dots, a_{s_2})$. Это доказывает результат П. М. Тамразова [2, 3], согласно которому при надлежащем выборе точек $a_1, a_2, \dots, a_{s_2}$ на сфере можно получить континуум наименьшей емкости с произвольно заданными метрическими характеристиками.

4.2. Размерность множества склеенных поверхностей. Пусть выбран набор областей D_k, $1 \leq k \leq p$ набор дуг γ_i, $1 \leq i \leq 2q$ и заданы положительные числа h_k и α_k как в §1. Пусть также заданы старшие коэффициенты A_s разложения квадратичного дифференциала в двойных полюсах b_s. Покажем, что тогда набор исходных материалов характеризуется M параметрами, где

$$M = q - p_1 - p_3 - s_3. \tag{10}$$

1^0. Число дуг γ_i, имеющих конечную длину $|\gamma_i| = x_i$, равно $q - 2p_3$. Длины x_i входят в число определяющих параметров.

2^0. Каждая полоса D_k, $p_1 + p_2 + 1 \leq k \leq p$ характеризуется значением параметра y_k, определяющего относительный сдвиг дуг, расположенных на противоположных сторонах полосы D_k.

3^0. Каждое кольцо D_k, $p_1+1 \le k \le p_1+p_2$, характеризуется двумя параметрами: параметром r_k, определяющим его конформный модуль, и параметром y_k, определяющим относительный сдвиг дуг, лежащих на разных граничных окружностях D_k.

Таким образом, всего имеется $q-p_3+2p_2$ параметров. При этом сумма длин дуг, расположенных на одной граничной окружности круга или кольца D_k, должна быть равна α_k, и в каждой точке b_s должно выполняться условие

$$\sum_k y_k = \operatorname{Re} A_s,$$

где суммирование производится по индексам k, для которых полосы D_k входят в соответствующий цикл. Таким образом, всего имеем $s_3+p_1+2p_3$ уравнений, откуда и следует (10).

Система круговых, кольцевых и полосообразных областей "склеенного" квадратичного дифференциала на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ является экстремальной в соответствующей задаче об экстремальном разбиении этой поверхности (см., например, [5]). Обозначим

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}\backslash(\{a_s\}_1^{s_2}\bigcup\{b_s\}_1^{s_3}\bigcup\{p_k\}_1^{p_1}), \quad n = s_2+s_3+p_1.$$

Данными указанной задачи являются p_2 гомотопических классов замкнутых кривых на $\mathfrak{R}'$, каждый из которых содержит замкнутую траекторию, лежащую в своей кольцевой области $\mathcal{D}_k$, и p_3 гомотопических классов кривых на $\mathfrak{R}'$ с концами в точках множества $\{b_s\}_1^{s_3}$, каждый из которых содержит траекторию, лежащую в своей полосообразной области D_k. Также данными задачи служат точки a_s, b_s, p_k и параметры h_k, $\alpha_k A_s$.

Вещественная размерность пространства Тейхмюллера $T(n)$ поверхностей рода g с n проколами равна

$$6g-6+2n = -3E+2(S_2+s_3+p_1) = M+N-s_1 \ge M,$$

где s_1 – число нулей квадратичного дифференциала Qdz^2, N – их суммарная кратность. Пусть $\mathfrak{R}(t)$ – кривая в пространстве $T(n)$, $\mathfrak{R}(0)=\mathfrak{R}$. Гомотопия $\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}(t)$ естественно переносит данные задачи об экстремальном разбиении на поверхность $\mathfrak{R}(t)$ и порождает на этой поверхности квадратичный дифференциал $Q_t dz^2$. Исходные материалы для "склеивания" этого дифференциала описываются M-мерным вектором $X(t)$. Из единственности решения задачи об экстремальном разбиении следует, что соответствие $X(t) \longleftrightarrow \Re(t)$ является гомеоморфизмом. Это доказывает, что найдется комплексная структура на компактной поверхности рода g и набор n точек на ней такие, что определенный на полученной римановой поверхности квадратичный дифференциал Qdz^2, обладающий тем свойством, что p_1 круговых, p_2 кольцевых и p_3 полосообразных областей этого дифференциала разбивают указанную поверхность требуемым образом, имеет произвольно заданные метрические характеристики. Последнее утверждение обобщает теорему 1 из [4].

Литература

1. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (N. F.), Bd. 18, Springer-Verlag, Berlin ets., 1958; 2nd ed. corrected, 1965. Перев. на русск. яз. 1-го изд., Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., 1962.
2. P. M. Tamrazov, *Tchebotarov's extremal problem.* — Cent. Eur. J. Math. **3** (2003) No. 4, 591–605.
3. P. M. Tamrazov, *Tchebotarov's problem.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **341** (2005) No. 7, 404–408.
4. A. Yu. Solynin, *Quadratic differentials and weighted graphs on compact surfaces.* In: Analysis and Mathematical Physics." Trend in Mathematics, 473–505. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
5. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.

Emel'yanov E.G. A sewing theorem for quadratic differentials.

Quadratic differentials on a finite Riemann surface with poles of order not exceeding two are considered. The existence of such a differential with prescribed metrical characteristics is proved. These characteristics are the following: the first coefficients in the expansions of a quadratic differential in neighborhoods of it's poles of order two, the conformal modules of the ring domains, and the heights of the strip domains in the decomposition of the Riemann surface defined by this differential.

С.-Петербургский университет
экономики и финансов,
Садовая ул. 21, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: emelyanoveg@rambler.ru

Поступило 18 октября 2009 г.