УДК 517.9:533.9

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Б. В. ГИСИН

(Москва)

Исследование ряда вопросов математической и теоретической физики приводит к следующей задаче.

Задача. Найти в области $r \geqslant 0$ решение уравнения

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}=R-R^n \tag{1}$$

при условиях:

1) $R(0)\neq 0$,

2) $R(r)$ ограниченно,

3) интеграл $\int\limits_0^\infty R^2r^2dr$ существует,

4) $n>1$ (для $n\leqslant 1$ решений с первыми тремя условиями не существует).

Решения уравнения (1) с условиями 1) — 4) будем называть частицеподобными.

Уравнение (1) рассматривалось в [1]—[5]. В [1] было установлено существование положительных частицеподобных решений для $1<n\leqslant 4$. Другим методом это было показано в [2] для $1<n\leqslant 3$; здесь также было вычислено решение для $n=$ $={}^3/_2$. Для $n=3$ уравнение исследовалось в [3]—[5]; в частности, в [3] были вычислены первые пять решений.

Пусть частицеподобные решения уравнения (1) существуют. Тогда для них справедливо следующее асимптотическое поведение в нуле:

$$R(r)=R_0+\frac{1}{6}(R_0-R_0{}^n)r^2+\dots, \tag{2}$$

и на бесконечности:

$$R(r)=C\frac{e^{-r}}{r}, \tag{3}$$

где C — постоянная.

Нетрудно показать, что $dR\,/\,dr$ для частицеподобных решений всюду ограничено.

Лемма. *Для существования частицеподобных решений уравнения* (1) *необходимо, чтобы $R^{n+1}(r)\geqslant 0$ для любых r, n.*

Для доказательства заметим, что n может быть либо числом иррациональным, либо несократимой дробью вида $(2m+1)\,/\,2l$, $(2m+1)\,/\,(2l+1)$, $2m\,/\,(2l+1)$ (m, l — целые числа). В первых трех случаях утверждение леммы очевидно. Положим, что в четвертом случае, при $n=2m\,/\,(2l+1)$, у частицеподобного решения существует область, в которой $R<0$ и, соответственно, $R^{n+1}<0$. Тогда в этой области вместе с ее границами найдутся по крайней мере две различные точки, в которых произведение r^2RR' равно нулю. Умножим (1) на r^2R и проинтегрируем по r между этими точками. Тогда, интегрируя левую часть по частям и перенося неисчезающий член в правую часть, приходим к противоречию:

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}R'^2r^2dr+\int\limits_{r_1}^{r_2}R^2r^2dr+\int\limits_{r_1}^{r_2}(-R^{n+1})r^2dR=0, \tag{4}$$

так как сумма положительных членов не может равняться нулю. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для существования частицеподобных решений уравнения* (1) *необходимо, чтобы $n<5$.*

Умножим (1) сначала на r^2R, затем на $2r^3R'$ и, интегрируя по r (где нужно — по частям) от нуля до бесконечности, получим

$$r^2RR'\Big|_0^\infty-\int\limits_0^\infty R'^2r^2dr=\int\limits_0^\infty R^2r^2dr-\int\limits_0^\infty R^{n+1}r^2dr,$$

$$r^2R'^2\Big|_0^\infty + \int_0^\infty R' r^2dr = r^3\left(R^2 - \frac{2}{n+1}R^{n+1}\right)\Big|_0^\infty - 3\int_0^\infty R^2r^2dr + \frac{6}{n+1}\int_0^\infty R^{n+1}r^2dr.$$

Складывая эти соотношения и используя (2), (3), находим

$$2\int_0^\infty R^2r^2dr = \frac{5-n}{n+1}\int_0^\infty R^{n+1}r^2dr. \tag{5}$$

В силу леммы $R^{n+1} \geqslant 0$, поэтому необходимо, чтобы $n < 5$.

Теорема 2. *Для существования частицеподобных решений уравнения* (1) *необходимо, чтобы* $|R(0)| > |R(r)|$.

Умножив (1) на $2R'$ и проинтегрировав по r от нуля до бесконечности и от нуля до r с использованием (2), (3), получим, соответственно,

$$0 < 4\int_0^\infty \frac{1}{r}R'^2dr = \frac{2}{n+1}R_0^{n+1} - R_0^2, \qquad \frac{2}{n+1}R_0^{n-1} - 1 > 0;$$

$$0 < R'^2 + 4\int_0^x \frac{1}{r}R'^2dr = \frac{2}{n+1}R_0^{n+1} - R_0^2 - \left(\frac{2}{n+1}R^{n+1}(r) - R^2(r)\right) = \tag{6}$$

$$= \{R_0^2 - R^2(r)\}\left\{\frac{2}{n+1}R_0^{n-1}\left(\frac{1-\gamma^{n+1}}{1-\gamma^2}\right) - 1\right\};$$

$\gamma = R(r)\,/\,R_0 \neq 1$ в силу (6).

Согласно лемме $\gamma^{n+1} \geqslant 0$, поэтому

$$\frac{1-\gamma^{n+1}}{1-\gamma^2} = 1 + \gamma^2\frac{1-\gamma^{n-1}}{1-\gamma^2} \geqslant 1,$$

и таким образом вторая скобка в (6) для любых r больше нуля. Отсюда получаем $R_0^2 > R^2(r)$.

Теперь, используя теорему 2, легко находим из (5) нижнюю границу для R_0:

$$2\int_0^\infty R^2r^2dr = \frac{5-n}{n+1}\int_0^\infty R^{n+1}r^2dr < \frac{5-n}{n+1}R_0^{n-1}\int_0^\infty R^2r^2dr,$$

$$|R_0| > \left[\frac{2(n+1)}{5-n}\right]^{1/n-1}.$$

В заключение выражаю благодарность М. М. Лисовскому за ценные обсуждения.

Поступила в редакцию
3.07.1965

Цитированная литература

1. Z. Nehari. On a nonlinear differential equation arisig in nuclear physics. Proc. Roy. Arich Acad., 1963, A62, № 9, 118—135.
2. Е. П. Жидков, В. П. Шириков. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 5, 804—816.
3. В. Б. Гласко, Ф. Лерюст, Я. П. Терлецкий, С. Ф. Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, 35, № 2 (8), 452—457.
4. R. J. Finkelstein, R. Le Levier, M. Ruderman. Nonlinear spinor fields. Phys. Rev., 1951, 83, № 2, 326—332.
5. N. Rosen, H. B. Rosenstock. The force between particles in a nonlinear field theory. Phys. Rev., 1952, 85, № 2, 257—259.