C. Weber, A. Pajitnov, L. Rudolph, Morse–Novikov number of knots and links,
Algebra i Analiz, 2001, Volume 13, Issue 3, 105–118

Алгебра и анализ
Том 13 (2001), вып. 3

ЧИСЛО МОРСА–НОВИКОВА ДЛЯ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ

© К. Вебер, А. Пажитнов, Л. Рудолф

Число Морса–Новикова $\mathcal{MN}(L)$ зацепления $L \subset S^3$ определяется как наименьшее возможное количество критических точек морсовского отображения $S^3 \setminus L \to S^1$ специального типа. В статье изучаются свойства этого инварианта: он оценивается снизу при помощи чисел Новикова зацепления L, для которых, в свою очередь, устанавливается связь с классическими инвариантами зацеплений; обсуждается точность полученных оценок. Доказывается, что число Морса–Новикова ведет себя субаддитивно при связном суммировании узлов. Формулируется гипотеза.

§1. Введение

Пусть $K \subset S^3$ — ручной узел, $C_K = S^3 \setminus K$. Напомним, что K называется *расслоенным*, если существует расслоение $\varphi\colon C_K \to S^1$, которое „хорошо себя ведет" в окрестности узла K.

Класс расслоенных узлов является большим естественным классом узлов. Например, все алгебраические узлы расслоенные [Mi1]. Расслоение $\varphi\colon C_K \to S^1$ дает дополнительные инварианты, помогающие вычислять основные инварианты расслоенного узла [Du]. Аналогичное понятие определено для ориентированных зацеплений.

Рассмотрим произвольное зацепление $L \subset S^3$. Всегда можно построить морсовское отображение $\varphi\colon C_L = S^3 \setminus L \to S^1$, которое „хорошо себя ведет" в окрестности зацепления L. Если зацепление L не расслоенное, то у φ обязательно есть критические точки. Изучение таких отображений и связанных с ними инвариантов зацепления и является целью настоящей статьи.

Простейший возникающий на этом пути инвариант зацепления L — это его *число Морса–Новикова* $\mathcal{MN}(L)$, определяемое как наименьшее возможное

Ключевые слова: поверхность Зайферта, сумма Мурасуги, минимальная функция Морса, неравенства Новикова.

Авторы благодарят Швейцарский национальный фонд научных исследований за финансовую поддержку.

количество критических точек такого морсовского отображения. Этот инвариант можно изучать при помощи теории Морса–Новикова отображений в окружность. Теория эта началась с работы С. П. Новикова [No] и развивалась в течение последних 20 лет.

Важным инструментом в теории Морса–Новикова являются *неравенства Новикова* — аналог классических неравенств Морса, — дающие оценки снизу для числа Морса–Новикова в терминах *чисел Новикова*. Это позволяет нам доказать, что существуют узлы со сколь угодно большим числом Морса–Новикова (см. предложение 6.1).

Поскольку числа Новикова дают для числа Морса–Новикова только оценку снизу, последняя может оказаться неоптимальной. И действительно, мы приводим примеры узлов, для которых гомологии (и числа) Новикова равны нулю, а число Морса–Новикова — нет (см. §5). Таким образом, чисто гомологических оценок снизу недостаточно, и для получения дальнейшей информации о числе Морса–Новикова требуются другие методы.

Мы доказываем, что для всякого ориентированного зацепления L существуют морсовские отображения $C_L \to S^1$, имеющие критические точки только индексов 1 и 2, и $\mathcal{MN}(L)$ равняется наименьшему возможному количеству критических точек такого морсовского отображения.

Следующий шаг состоит в том, чтобы использовать естественные геометрические операции над зацеплениями такие, как связная сумма, и изучить поведение числа Морса–Новикова при таких операциях. В качестве первого результатата (см. предложение 6.2) мы доказываем, что

$$\mathcal{MN}(K_1\#K_2) \leqslant \mathcal{MN}(K_1) + \mathcal{MN}(K_2),$$

где # — операция связного суммирования ориентированных узлов [Ro, с. 40]. Хотя используемый нами метод прост, он, по-видимому, нов. На дополнении узла $K_1\#K_2$ в явном виде строится S^1-значная функция Морса из двух функций Морса, заданных на дополнениях узлов K_1 и K_2 соответственно (см. §6). В случае расслоенных узлов верно и обратное: если узел $K_1\#K_2$ — расслоенный, то узлы K_1 и K_2 — также расслоенные [Ga]. Таким образом, естественно поставить следующий вопрос (М. Буало, К. Вебер):

$$\text{верно ли, что } \mathcal{MN}(K_1\#K_2) = \mathcal{MN}(K_1) + \mathcal{MN}(K_2)\,?$$

Наши результаты в некоторой степени свидетельствуют в пользу положительного ответа.

Терминология и обозначения. На протяжении всей статьи мы работаем в C^∞-категории. Таким образом, функции, отображения, кривые и т.д. считаются принадлежащими классу C^∞, если явно не оговорено противное.

Поверхностью Зайферта называется ориентированное компактное двумерное подмногообразие в S^3, не имеющее замкнутых компонент. Край $L = \partial S$ поверхности Зайферта S представляет собой ориентированное зацепление; S называется *поверхностью Зайферта* зацепления L.

Трехмерная сфера $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ наделяется ориентацией, индуцированной из стандартной ориентации пространства $\mathbb{R}^3$. Если L — ориентированное зацепление, то зацепление с противоположной ориентацией обозначается через $-L$. Аналогично если S — поверхность Зайферта, то поверхность Зайферта с противоположной ориентацией обозначается через $-S$.

Пусть $L \subset S^3$ — зацепление. Морсовское отображение $f\colon C_L \to S^1$ называется *регулярным*, если у каждой компоненты L_i зацепления L имеется окрестность, оснащенная как $S^1 \times D^2$ с $L_i \approx S^1 \times 0$, таким образом, что сужение $f|\colon S^1 \times (D^2 \setminus \{0\}) \to S^1$ задается формулой $(x,y) \mapsto y/|y|$. Если f — морсовское отображение какого-нибудь многообразия в $\mathbb{R}$ или в S^1, то через $m_p(f)$ обозначим количество критических точек индекса p.

Всюду в дальнейшем используются гомологии и когомологии только с целыми коэффициентами.

План статьи. В §2 обсуждаются числа Новикова узлов и зацеплений. Неравенства Новикова дают оценку снизу для количества критических точек регулярного морсовского отображения $f\colon C_L \to S^1$ в терминах чисел Новикова зацепления L (см. предложение 2.1 и следствие 2.2). Мы связываем числа Новикова с классическими инвариантами зацеплений.

В §3 доказывается существование минимальной функции Морса на дополнении любого зацепления L (см. теорему 3.3). Такая функция Морса имеет критические точки только индексов 1 и 2. В §4 обсуждается связь между функциями Морса на дополнении зацепления и свободными поверхностями Зайферта. В §5 даются примеры. В §6 доказывается, что число Морса-Новикова субаддитивно по отношению к связному суммированию узлов.

Благодарности. Особая благодарность рецензентам за многочисленные ценные комментарии и предложения по усовершенствованию текста статьи. Авторы благодарны М. Буало за полезные обсуждения. А. Пажитнов и Л. Рудолф благодарят Университет Женевы за теплое гостеприимство. Часть работы была выполнена во время визита А. Пажитнова в Оксфордский университет (осенью 1998 г.), поддержанного EPRSC, грант GR/M98159. А. Пажитнов благодарен Оксфордскому университету за теплое гостеприимство во время этого визита.

Гомологии Новикова для дополнений узлов в S^3 были впервые изучены А. Лазаревым [La]. В частности, для случая узлов А. Лазарев получил аналог нашей теоремы 2.4.

§2. Гомологии Новикова и оценки снизу для числа Морса–Новикова

Обозначения. Пусть $L \subset S^3$ — ориентированное зацепление. Поскольку сфера S^3 ориентирована, то нормальное расслоение зацепления L и его подрасслоение на единичные окружности также ориентированы. Для каждой компоненты $L_i \subset L$ существует единственный элемент $\mu_i \in H_1(C_L)$, реализуемый произвольным ориентированным слоем нормального расслоения на единичные окружности компоненты L_i. Имеется единственный когомологический класс $\xi_L \in H^1(C_L)$ такой, что для каждого i выполняется равенство $\xi_L(\mu_i) = 1$. Пусть $\overline{C_L} \to C_L$ — бесконечнолистное циклическое накрытие, ассоциированное с этим когомологическим классом.

Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, $\widehat{\Lambda} = \mathbb{Z}[[t]][t^{-1}]$. Напомним, что $\widehat{\Lambda}$ — область главных идеалов. Гомологии $H_*(\overline{C_L})$ являются Λ-модулем. Обозначим $H_*(\overline{C_L}) \otimes_\Lambda \widehat{\Lambda}$ через $\widehat{H}_*(L)$. Пусть $\widehat{b}_i(L) = \mathrm{rk}_{\widehat{\Lambda}} \widehat{H}_i(L)$ и пусть $\widehat{q}_i(L)$ — *число кручения* модуля $\widehat{H}_i(L)$, т.е. минимальное количество $\widehat{\Lambda}$-образующих его подмодуля кручения.

Предложение 2.1. *Пусть $f\colon C_L \to S^1$ — регулярная функция Морса, представляющая когомологический класс ξ_L. Тогда*

$$m_i(f) \geqslant \widehat{b}_i(L) + \widehat{q}_i(L) + \widehat{q}_{i-1}(L). \tag{1}$$

Доказательство представляет собой прямое обобщение доказательства неравенств Новикова [No] для замкнутых многообразий (см. [F или P1]). •

Соотношения между числами Новикова. Числа $\widehat{b}_i(L)$ и $\widehat{q}_i(L)$ удовлетворяют некоторым алгебраическим соотношениям.

1) $\widehat{H}_0(L) = 0$.

Действительно, $H_0(\overline{C_L}) \approx \mathbb{Z}$, и элемент $t \in \Lambda$ действует тождественно; т.е. $1 - t = 0$, и поскольку $1 - t$ обратим в $\widehat{\Lambda}$, то $H_0(\overline{C_L}) \otimes_\Lambda \widehat{\Lambda} = 0$. Следовательно,

$$\widehat{b}_0(L) = \widehat{q}_0(L) = 0. \tag{2}$$

2) Вот следствия двойственности Пуанкаре:

$$\widehat{b}_i(L) = \widehat{b}_{3-i}(-L), \tag{3}$$

$$\widehat{q}_i(L) = \widehat{q}_{3-i-1}(-L). \tag{4}$$

(По поводу доказательства см. [P, §3]. Рассуждения в этой статье относятся к случаю замкнутых многообразий, но они легко обобщаются на наш случай, поскольку гомологии Новикова края трубчатой окрестности зацепления L равны нулю.)

3) Из равенств (4) и (2), очевидно, следует, что

$$\widehat{q}_2(L) = 0. \tag{5}$$

4) Наконец, заметим, что $\chi(L) = \chi(C_L) = 0$.

Следовательно, для каждого клеточного разбиения пары $(S^3 \backslash \operatorname{Int} T(L), \partial T(L))$ выполняется равенство $\sum(-1)^i n_i = 0$, где n_i — количество клеток размерности i. Поэтому эйлерова характеристика цепного комплекса $C_*(\overline{C_L})$ свободных Λ-модулей равна нулю, откуда, в свою очередь следует, что

$$\widehat{b}_1(L) = \widehat{b}_2(L). \tag{6}$$

Таким образом, все числа $\widehat{b}_i$, $\widehat{q}_i$ определены двумя из них: $\widehat{b}_1 = \widehat{b}_2$ и $\widehat{q}_1$. В силу предыдущих замечаний окончательный вид неравенств Новикова для зацеплений в S^3 следующий.

Следствие 2.2.

$$m_1(f) \geqslant \widehat{b}_1(L) + \widehat{q}_1(L); \quad m_2(f) \geqslant \widehat{b}_1(L) + \widehat{q}_1(L). \quad \bullet$$

Гомологии $\widehat{H}_*(L)$, как $\widehat{\Lambda}$-модуль, раскладываются в прямую сумму циклических модулей. Модуль $\widehat{H}_1(L)$ связан с классическими полиномами узлов и зацеплений. Чтобы установить эту связь, нам прежде всего потребуется немного алгебры.

Λ-модули. Пусть M — конечно-порожденный Λ-модуль со свободной конечно-порожденной резольвентой. Рассмотрим точную последовательность

$$F_1 \xrightarrow{D} F_0 \to M \to 0, \tag{7}$$

где $F_0 \approx \Lambda^m$ и $F_1 \approx \Lambda^n$. Будем считать, что $m \leqslant n$. Идеалы $E_s(D)$, порожденные $(m-s)\times(m-s)$-минорами матрицы оператора D, являются инвариантами модуля M. Обозначим через $\alpha_s(M)$ Н.О.Д. всех элементов идеала $E_s(D)$. (Вообще говоря, $\alpha_s(M) \notin E_s(D)$).

Рассмотрим пополнение $\widehat{M} = M \otimes_\Lambda \widehat{\Lambda}$, соответствующую точную последовательность

$$\widehat{F}_1 \xrightarrow{\widehat{D}} \widehat{F}_0 \to \widehat{M} \to 0 \tag{8}$$

(точную в силу точности справа тензорного произведения) и инварианты $E_s(\widehat{D})$ и $\alpha_s(\widehat{M})$. Ключевым здесь является то наблюдение, что

$$\alpha_s(\widehat{M}) = \alpha_s(M). \tag{9}$$

Это немедленно вытекает из следующей леммы:

Лемма 2.3. *Пусть* $a, b \in \Lambda$. *Тогда* Н.О.Д.$_\Lambda(a,b) =$ Н.О.Д.$_{\widehat{\Lambda}}(a,b)$.

Доказательство. Пусть $\alpha =$ Н.О.Д.$_\Lambda(a,b)$ и $\lambda \in \Lambda$ — такой элемент, что и a, и b делятся на λ в $\widehat{\Lambda}$. Покажем, что тогда и α делится на λ в $\widehat{\Lambda}$.

Достаточно рассмотреть случай, когда $a, b \in \mathbb{Z}[t]$, причем a и b взаимно простых в $\mathbb{Z}[t]$, так что $aP+bQ = n \in \mathbb{Z}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{Z}[[t]]$ делит и a, и b. Тогда $\lambda | n$. Запишем $\lambda\mu = k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{Z}[[t]]$. Элемент λ не делится на целое число, и можно считать, что то же самое верно для μ. Тогда $\lambda\mu$ должно равняться 1, поскольку иначе редукция по модулю любого простого делителя числа k приводит к противоречию. Следовательно, элемент λ обратим в $\widehat{\Lambda}$ и делит всякий элемент кольца $\widehat{\Lambda}$. •

Так как $\widehat{\Lambda}$ — область главных идеалов, то модуль $\widehat{M}$ изоморфен следующей сумме циклических модулей:[1]

$$\widehat{M} \approx \bigoplus_{s=0}^{m-1} \widehat{\Lambda}/\gamma_s\widehat{\Lambda}, \quad \text{где } \gamma_s = \alpha_s/\alpha_{s+1}. \tag{10}$$

В частности, $\gamma_{s+1} \mid \gamma_s$ для каждого s.

Числа Новикова. Начиная с этого места, $\widehat{M} = H_1(\overline{C_L})$. Назовем соответствующий элемент α_s *s-м полиномом зацепления*. Следующая теорема, непосредственно вытекающая из предыдущих рассуждений, позволяет вычислять числа Новикова $\widehat{b}_1(L)$ и $\widehat{q}_1(L)$ в терминах этих полиномов.

Теорема 2.4.

1. *Число Новикова* $\widehat{b}_1(L)$ *равняется количеству тех* α_s, *которые равны нулю.*
2. *Число Новикова* $\widehat{q}_1(L)$ *равняется количеству тех* γ_s, *которые не равны нулю и у которых старший коэффициент отличен от* 1. •

Случай узлов. Оказывается, что для узла K всегда $\widehat{b}_i(K) = 0$. (Впервые это заметил А. Лазарев [La]; для доказательства достаточно заметить, что модуль $H_1(\overline{C_K})$ задается квадратной матрицей; ее определитель есть многочлен Александера узла и потому не равен нулю.)

§3. Минимальные функции Морса

Пусть M — замкнутое многообразие. Морсовское отображение $f\colon M \to S^1$ называется *минимальным*, если для каждого k число $m_k(f)$ является наименьшим возможным среди всех морсовских отображений, гомотопных

[1] Мы считаем, что $0/0 = 0$ и $\alpha_m = 1$.

f. (Ср. параллельное определение [Sh, определение 1.11] для вещественно-значных функций Морса.)

Даже в случае вещественно-значных функций Морса минимальные функции Морса не всегда существуют [Sh]. Проблема в том, что, вообще говоря, число Морса $m_k(f)$ нельзя минимизировать одновременно для всех индексов k. Здесь мы показываем, что в случае, когда $M = C_L$, минимальные функции Морса всегда существуют.

(Поскольку многообразие C_L некомпактно, определение минимальной функции Морса следует здесь несколько видоизменить. Назовем функцию Морса $f\colon C_L \to S^1$ *минимальной*, если она регулярна и ее числа Морса $m_i(f)$ являются наименьшими возможными среди всех гомотопных ей регулярных функций.)

Кроме того, мы показываем, что минимальная функция Морса может иметь только критические точки индексов 1 и 2. (Последний факт напрашивается уже из соотношений $\widehat{b}_0(L) = \widehat{b}_3(L) = \widehat{q}_3(L) = \widehat{q}_2(L) = \widehat{q}_0(L) = 0$.)

Обозначения. Пусть L — ориентированное зацепление с μ компонентами и $f\colon C_L \to S^1$ — регулярная функция Морса. Будем считать, что $1 \in S^1$ — ее регулярное значение. (Общий случай отличается от этого только более сложными обозначениями.)

Пусть $F\colon \overline{C_L} \to \mathbb{R}$ — поднятие отображения f, а T — открытая трубчатая окрестность зацепления L такая, что сужение отображения f на замыкание окрестности T является стандартным.

Пусть $X = S^3 \setminus T$ и пусть $\overline{X} \subset \overline{C_L}$ — прообраз множества X. Тогда $\overline{X}$ — некомпактное многообразие, край которого — бесконечнолистное циклическое накрывающее объединения μ торов, т.е. дизъюнктное объединение μ экземпляров $S^1 \times \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество $W = F^{-1}([0,1])$. Это — кобордизм между многообразиями с краем $F^{-1}(0)$ и $F^{-1}(1)$. Выберем образующую t (бесконечной циклической) структурной группы накрытия так, что $F(xt) < F(x)$. Накрывающее пространство $\overline{C_L}$ есть объединение кобордизмов $W_n = t^n W$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 3.1. *Существует регулярная функция Морса $g\colon C_L \to S^1$ с $m_p(g) \leqslant m_p(f)$ для каждого p и такая, что одна из ее регулярных поверхностей уровня связна.*

Доказательство. В предыдущих обозначениях будем считать, что поверхность $S = F^{-1}(0)$ несвязна. Обозначим через $m(f)$ общее количество критических точек функции f. Мы построим новую функцию Морса f_0 такую, что для каждого p выполнено неравенство $m_p(f_0) \leqslant m_p(f)$, причем либо

i) $m(f_0) < m(f)$, либо
ii) $m(f_0) = m(f)$ и у f_0 существует регулярная поверхность уровня, у которой количество связных компонент строго меньше, чем у S.

Последовательное применение этой конструкции доказывает лемму.

Перейдем к конструкции. Заметим, что по крайней мере одно из двух включений

$$W \hookleftarrow S \hookrightarrow tW$$

индуцирует неинъективный гомоморфизм в H_0. (Действительно, вспомним, что $\overline{C_L}$ связно. Рассмотрим пути в $\overline{C_L}$, соединяющие различные связные компоненты поверхности $S = F^{-1}(0)$, и выберем из них тот путь, который пересекает наименьшее количество кобордизмов W_n. Очевидно, что это количество должно равняться 1.)

Пусть, например, гомоморфизм $H_0(S) \to H_0(W)$ имеет нетривиальное ядро. В силу стандартных соображений, связанных с перегруппировкой критических точек [Mi2, §4], можно считать, что функция $F\colon W \to [0,1]$ *упорядочена*, т.е. существуют регулярные значения

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 = 1$$

такие, что для каждого i все точки индекса i функции F лежат в $F^{-1}([\alpha_i, \alpha_{i+1}])$.

Выберем градиентно-подобное векторное поле v для f. Потребуем чтобы поле v „хорошо себя вело" в окрестности зацепления L. А именно, напомним, что у нас есть оснащение $\Phi\colon L \times D^2 \xrightarrow{\approx} T$ трубчатой окрестности T такое, что сужение отображения $f \circ \Phi$ на любой проколотый диск $x \times (D^2 \setminus \{0\})$ задается формулой $(x, y) \mapsto y/|y|$. Потребуем, чтобы векторное поле $w = \Phi_*^{-1}(v)$ на $L \times D^2$ касалось $x \times D^2$ для каждого $x \in L$, а в каждом $x \times D^2 \approx D^2$ задавалось бы формулой $w(y_1, y_2) = (y_1, -y_2)$. Таким образом, в частности, интегральные кривые поля v в T являются меридианами. Потребуем также, чтобы v удовлетворяло условию трансверсальности: стабильное многообразие каждой критической точки трансверсально к нестабильному многообразию каждой другой критической точки.

Рассмотрим включения

$$F^{-1}(0) \subset F^{-1}([0, \alpha_1]) \subset F^{-1}([0, \alpha_2]) \subset W.$$

Второе (четвертое) множество в этой последовательности получается из первого (третьего) приклеиванием ручек индекса 0 (соответственно 2 и 3). Следовательно, первое и третье включения индуцируют мономорфизмы в H_0. Таким образом, второй гомоморфизм включения неинъективен, откуда следует, что существует критическая точка p индекса 1, стабильное многообразие $D(p, v)$ которой относительно потока v пересекает $F^{-1}(\alpha_1)$ в двух точках, лежащих в различных связных компонентах поверхности $F^{-1}(\alpha_1)$. Имеются две возможности:

1. Эти две связные компоненты диффеоморфно спускаются на $F^{-1}(0)$ градиентным сдвига.

2. Одна из них (или обе) есть пересечение с $F^{-1}(\alpha_1)$ восходящих дисков критических точек индекса 0.

В первом случае мы применяем процедуру перегруппировки чтобы столкнуть вниз критическую точку p и получить новую функцию Морса $\widetilde{F}\colon W \to [0,1]$ со следующими свойствами:

1) векторное поле v по-прежнему является градиентно-подобным векторным полем для $\widetilde{F}$;
2) критическая точка p принадлежит наименьшему критическому уровню функции $\widetilde{F}$;
3) регулярная поверхность уровня, соответствующая значению $\widetilde{F}(p)+\varepsilon$, для малых ε имеет $k-1$ связных компонент (где k — количество связных компонент поверхности S).

Во втором случае заметим, что существует v-траектория, соединяющая критическую точку индекса 1 с критической точкой индекса 0, и стандартное рассуждение с сокращением [Mi2, теорема 8.1] дает функцию Морса $\widetilde{F}\colon W \to [0,1]$, у которой на 2 критические точки меньше, чем у F. В случае, когда гомоморфизм $H_0(S) \to H_0(tW)$ неинъективен, применяем такое же рассуждение к функции $-F$. Лемма 3.1 доказана. •

Лемма 3.2. *Пусть у f есть связная регулярная поверхность уровня S. Тогда найдется функция Морса g без критических точек индекса 0 и 3 и такая, что S — одна из ее поверхностей уровня. Кроме того, $m_1(g) \leqslant m_1(f)$ и $m_2(g) \leqslant m_2(f)$.*

Доказательство. Кобордизм W обязательно связен (по двойственности Пуанкаре–Лефшеца). Таким образом, стандартная процедура сокращения дает функцию Морса $\widetilde{F}$ с $m_i(F) = m_i(\widetilde{F})$ для $i \geqslant 2$, $m_1(\widetilde{F}) \leqslant m_1(F)$ и $m_0(\widetilde{F}) = 0$.

Применяя ту же самую процедуру к функции Морса $-F$, избавимся от критических точек индекса 3. •

Существование минимальных функций Морса получается в качестве простого следствия.

Теорема 3.3. *Существует минимальная регулярная функция Морса $f\colon C_L \to S^1$. Эта функция Морса имеет критические точки индексов только 1 и 2.*

Доказательство. Достаточно взять регулярную функцию Морса $f\colon C_L \to S^1$, для которой $\min\{m_1(f), m_2(f)\}$ является наименьшим в классе всех регулярных функций Морса. Применяя леммы 3.1 и 3.2, получаем функцию g с $m_0(g) = m_3(g) = 0$ и $m_1(g) = m_2(g) \leqslant \min\{m_(f), m_2(f)\}$. Тогда, очевидно, g — минимальная функция Морса. •

§4. Морсовские отображения и свободные поверхности Зайферта

Если X — топологическое пространство, положим $h_1(X) := \mathrm{rk}\, H_1(X)$. Связная поверхность Зайферта $F \subset S^3$ называется *свободной*, если $\pi_1(S^3 \setminus F)$ — свободная группа (обязательно с $h_1(F)$ образующими).

Пусть $N(F) \approx F \times [0,1]$ — трубчатая окрестность поверхности F. Заметим, что если поверхность F — свободная, то пространство $S^3 \setminus N(F)$ гомеоморфно шару с $h_1(F)$ ручками. (Действительно, применяя лемму Дена, получаем, что $S^3 \setminus N(F)$ гомеоморфно некоторому телу с ручками [H, с. 56–58]. Ранг группы первых гомологий этого тела с ручками легко вычисляется по двойственности Александера и равняется $h_1(F)$.)

Мы видим, что F — свободная поверхность Зайферта тогда и только тогда, когда $\partial N(F)$ индуцирует раздожение Хегора сферы S^3.

Минимальный род свободной поверхности Зайферта S с $\partial S = L$ называется *свободным родом* зацепления L. В этом параграфе указаны некоторые связи между свободными поверхностями Зайферта и функциями Морса на дополнении зацепления.

Здесь мы рассматриваем специальный класс функций Морса. Регулярная функция Морса $f\colon C_L \to S^1$ называется *приемлемой*, если

1) $m_0(f) = m_3(f) = 0$;
2) критические значения для всех критических точек одного и того же индекса совпадают;
3) каждая регулярная поверхность уровня связна.

Простое применение результатов предыдущего параграфа показывает, что приемлемые функции всегда существуют.

Пусть $f\colon C_L \to S^1$ — приемлемая функция Морса и $\theta_1, \theta_2 \in S^1$ — такие ее регулярные значения, что критические значения индекса 1 (соответственно 2) находятся в интервале $]\theta_1, \theta_2[$ (соответственно $]\theta_2, \theta_1[$). Чтобы упростить обозначения, будем считать, что $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$. Пусть $m = m_1(f) = m_2(f)$ и пусть g_1 и g_2 соответственно — род поверхностей $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(\pi)$.

Лемма 4.1. $g_2 - g_1 = m$.

Доказательство. Поверхность $f^{-1}(\pi)$ получается из поверхности $f^{-1}(0)$ при помощи m перестроек индекса 1. Следовательно, $\chi(f^{-1}(\pi)) = \chi(f^{-1}(0)) - 2m$, т.е. $2 - 2g_2 = 2 - 2g_1 - 2m$. •

Лемма 4.2. *Поверхность $f^{-1}(\pi)$ является свободной поверхностью Зайферта для L.*

Доказательство. Дополнение трубчатой окрестности поверхности $f^{-1}(\pi)$ есть $f^{-1}(S^1 \setminus [\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon])$. Оно получается из $f^{-1}(0)$ приклеиванием m ручек индекса 1, соответствующих критическим точкам индекса 1 функции f, и m ручек индекса 1, соответствующих критическим точкам индекса 1 функции $(-f)$. •

§5. Примеры

5.1. Тривиальное зацепление L_0 с μ компонентами. Очевидно, что $\widehat{b}_1(L) = \widehat{b}_2(L) = \mu$, и также легко построить функцию Морса $f\colon C_L \to S^1$ с $m_1(f) = m_2(f) = \mu$. Таким образом, в этом случае неравенства (1) являются точными.

5.2. Есть узлы, для которых неравенства (1) точными *не* являются. Вот семейство таких примеров. Пусть K — произвольный нетривиальный узел, а K' — его нескрученное удвоение Уайтхеда (определение см., например, в [Ro, с. 39]).

Многочлен Александера узла K равняется 1, откуда в силу теоремы 2.4 следует, что $\widehat{H}_*(K) = 0$. Но узел K — не расслоенный. Действительно, его род равняется 1, а степень многочлена Александера расслоенного узла равна удвоенному роду узла.

То же самое рассуждение работает, если заменить K' на произвольный нетривиальный узел с многочленом Александера, равным 1.

Было бы интересно вычислить число Морса–Новикова для этих узлов.

5.3. В этом примере показано, что смена ориентации некоторых компонент зацепления может влиять на число Морса–Новикова.

Ориентируем кольцо $S^1 \times [-1, 1]$ произвольным образом и вложим его в S^3 таким образом, чтобы его ось была незаузлена, а коэффициент зацепления ее компонент края (ориентированных как край кольца) равнялся бы n. Мы получаем ориентированное зацепление в S^3. (На рис. 1 можно увидеть случай $n = 2$.) Стандартное вычисление матрицы Зайферта показывает, что $H_1(\overline{C_L}) \approx \Lambda/n(1-t)\Lambda$, откуда $\widehat{q}_1(L) = 1$, и, следовательно, $\mathcal{MN}(L) \geqslant 2$. (Мы полагаем, что в действительности $\mathcal{MN}(L) = 2$.)

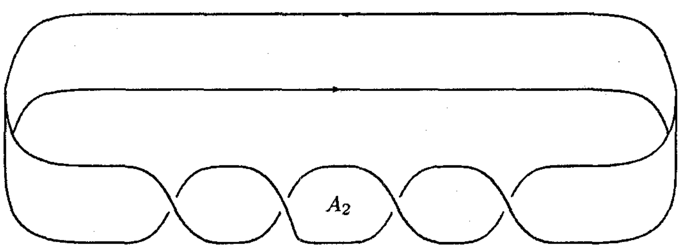

Рис. 1.

Обращая ориентацию одной из из двух компонент этого зацепления, получаем торическое зацепление, которое расслоено [Ro, с. 337].

§6. Связная сумма

Один из возможных подходов к вычислению инварианта $\mathcal{MN}(L)$ состоит в том, чтобы изучать его поведение при различных естественных операциях над зацеплениями или узлами. Простейшая операция такого типа — *связная сумма*. Заметим, что если $L = L_1 \# L_2$, то имеется изоморфизм

$$H_1(\overline{C_L}) \approx H_1(\overline{C_{L_1}}) \oplus H_1(\overline{C_{L_2}}) \tag{11}$$

[Ro, с. 179]. Следовательно, то же самое верно для гомологий Новикова.

Предложение 6.1. *Существуют узлы со сколь угодно большим числом Морса–Новикова.*

Доказательство. Пусть K — узел, у которого старший коэффициент многочлена Александера отличен от 1. Тогда разложение модуля $\widehat{H}_1(K)$ в сумму циклических $\widehat{\Lambda}$-модулей нетривиально, откуда $q_1(nK) \geqslant n$, где nK — связная сумма n экземпляров узла K. •

Предложение 6.2. *Пусть K_1, K_2 — ориентированные узлы. Имеет место неравенство*

$$\mathcal{MN}(K_1 \# K_2) \leqslant \mathcal{MN}(K_1) + \mathcal{MN}(K_2).$$

Доказательство. Пусть $f_i : C_{K_i} \to S^1$ — минимальные функции Морса. Можно считать, что и K_1 и K_2 содержат точку $0 \in S^3$ и что в малом диске $D(0,\varepsilon)$ и K_1 и K_2 совпадают с одним и тем же отрезком прямой, а семейство поверхностей уровня функции f_i в $D(0,\varepsilon)$ есть семейство плоских полукругов. Пусть $\Phi : S^3 \to S^3$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\Phi(x) = I(-x)$, где I — инверсия относительно точки 0 и сферы $S(0,\varepsilon/2)$.

Отображение Φ изотопно тождественному, следовательно, узел $K_2' = \Phi(K_2)$ изотопен узлу K_2. Далее, приклеивая $K_2' \cap D(0,\varepsilon)$ к $K_1 \cap \left(S^3 \setminus D(0,\varepsilon)\right) + \pi$, получаем узел, изотопный $K_1 \# K_2$, а склеивая функции $f_1 | D(0,\varepsilon) + \pi$ и $f_2 \circ \Phi | S^3 \setminus D(0,\varepsilon)$, получаем отображение $f : C_K \to S^1$ с числом Морса, равным сумме чисел Морса отображений f_1 и f_2. •

Заметим, что аналогичное предложение справедливо для случая зацеплений.

Другая естественная операция над зацеплениями — так называемая *сумма Мурасуги* [Ga]. *Четырехугольная сумма Мурасуги* определена для пар (S_1, α_1) и (S_2, α_2), где S_i — поверхности Зайферта, а α_i — *заплаты* на этих поверхностях. Вместо того, чтобы воспроизводить здесь формальное определение, предлагаем читателю взглянуть на рис. 2. Поверхности S_1 и S_2 склеиваются

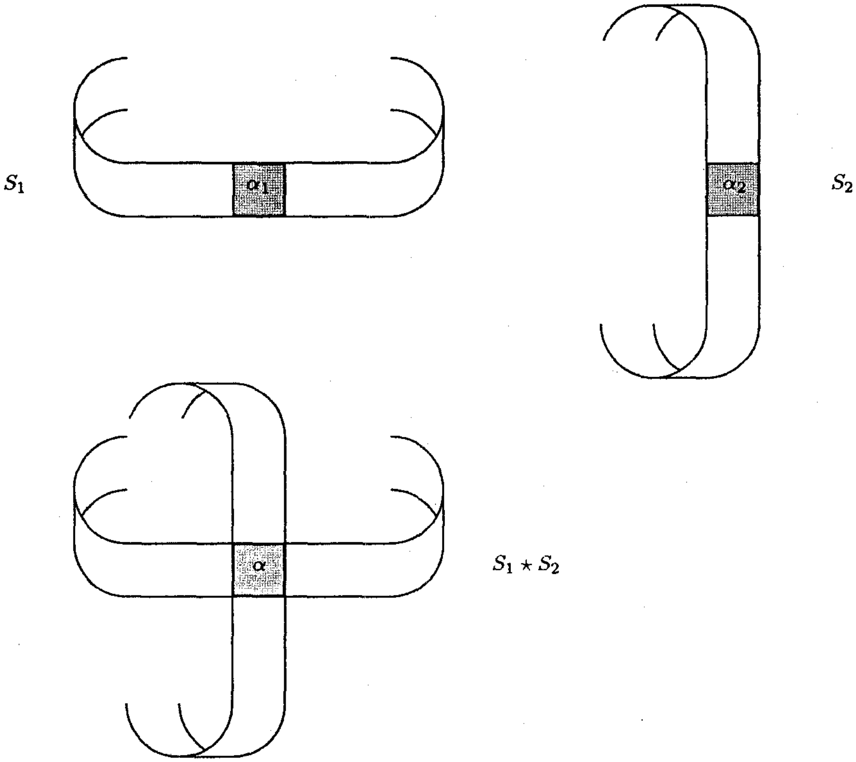

Рис. 2.

вдоль заплат α_1 и α_2. Получающаяся в результате поверхность обозначается через $S_1 \star S_2$; она содержит четырехугольник $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$.

Сформулируем соответствующую гипотезу. Пусть S — поверхность Зайферта, $L = \partial S$. Мы определяем $\mathcal{MN}(S)$ как наименьшее возможное количество критических точек функции Морса $C_L \to S^1$, для которой S является регулярной поверхностью уровня.

Гипотеза 6.3. *Пусть* $S = S_1 \star S_2$. *Тогда*

$$\mathcal{MN}(S_1 \star S_2) \leqslant \mathcal{MN}(S_1) + \mathcal{MN}(S_2). \tag{12}$$

Список литературы

[BZ] Burde G., Zieschang H., *Knots*, de Gruyter Stud. Math., vol. 5, Walter de Gruyter and Co., Berlin–New York, 1985.

[CF] Crowell R. H., Fox R. H., *Introduction to knot theory*, Ginn and Co., Boston, MA, 1963.

[Du] Durfee A., *Fibered knots and algebraic singularities*, Topology **13** (1974), 47–59.

[F] Фарбер М., *Точность неравенств Новикова*, Функц. анал. и его прил. **19** (1985), 49–59.

[Ga] Gabai D., *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Low-Dimensional Topology (San Francisco, CA, 1981), Contemp. Math., vol. 20, Amer. Math Soc., Providence, RI, 1983, pp. 131–143.

[H] Hempel J., *3-manifolds*, Ann. of Math. Stud., No. 86, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.

[La] Лазарев А. Ю., *Гомологии Новикова в теории узлов*, Мат. заметки **51** (1992), №3, 53–57.

[Mi1] Milnor J., *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Stud., No. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1968; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1971.

[Mi2] Milnor J., *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1969.

[No] Новиков С. П., *Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса*, Докл. АН СССР **260** (1981), 31–35.

[P] Пажитнов А., *О точности неравенств типа Новикова для многообразий со свободной абелевой фундаментальной группой*, Мат. сб. **180** (1989), №11, 1486–1523.

[P1] Pazhitnov A. V., *On the Novikov complex for rational Morse forms*, Ann. Fac. Sci. Toulouse (6) **4** (1995), 297–338.

[Ro] Rolfsen D., *Knots and links*, Math. Lecture Ser., No. 7, Publish or Perish, Berkeley, CA, 1976.

[Ru] Rudolph L., *Quasipositive plumbing* (*constructions of quasipositive knots and links*). V, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 257–267.

[St] Stallings J., *Constructions of fibered knots and links*, Algebraic and Geometric Topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford, CA, 1976). Pt. 2, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 32, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978, pp. 55–60.

[Sh] Шарко В. В., *Функции на многообразиях*, Наук. думка, Киев, 1990.

Поступило 6 мая 2000 г.

Section de Mathématiques
2–4, rue du Lièvre
Case Postale 240, CH-1211, Genève 24
Switzerland

E-mail: Claude.Weber@math.unige.ch

UMR 6629 CNRS, Université de Nantes
Département de Mathématiques
2, rue de la Houssinière, 44072, Nantes Cedex
France

E-mail: pajitnov@math.univ-nantes.fr

Department of Mathematics, Clark University
Worcester, MA 01610, USA

E-mail: lrudolph@black.clarku.edu