А. А. Степанова, А. И. Красицкая, P-стабильность некоторых классов S-полигонов,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 2, 441–449

https://www.mathnet.ru/smj7566

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 510.67:512.56

P–СТАБИЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ S–ПОЛИГОНОВ

А. А. Степанова, А. И. Красицкая

Аннотация. Понятие P-стабильности является частным случаем обобщенной стабильности полных теорий. Рассматриваются вопросы, связанные с P-стабильностью некоторых классов S-полигонов. В частности, получено описание моноидов S, над которыми классы свободных, проективных, сильно плоских, делимых, регулярных S-полигонов P-стабильны.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.214

Ключевые слова: моноид, S-полигон, проективный S-полигон, сильно плоский S-полигон, делимый S-полигон, регулярный S-полигон, P-стабильная теория.

Введение

Понятие P-стабильности является частным случаем обобщенной стабильности полных теорий [1]. Абелевы группы с P-стабильной теорией описаны в [2]. В [3] дается полное описание $(P, 1)$-стабильных теорий в терминах определимой интерпретируемости в теории языка одноместных предикатов. В [4] рассмотрены S-полигоны с $(P, 1)$-стабильной теорией. Кроме того, доказано, что (P, s)-, (P, a)-, (P, e)-стабильность класса всех S-полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S — группа.

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с P-стабильностью некоторых классов S-полигонов. В частности, получено описание моноидов S, над которыми классы свободных, проективных, сильно плоских, делимых, регулярных S-полигонов P-стабильны.

§ 1. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения из теории полигонов.

Пусть S — моноид, 1 — единица S. Под *левым S-полигоном* ${}_SA$ (или просто *S-полигоном*) понимается алгебраическая система $\langle A; L_S\rangle$ языка $L_s = \{f_s^{(1)} \mid s \in S\}$ такая, что $f_s(f_t(a)) = f_{st}(a)$ и $f_1(a) = a$ для любых $a \in A$, $s, t \in S$. Аналогично определяется понятие правого S-полигона. Подсистема ${}_SB$ S-полигона ${}_SA$ называется *подполигоном полигона* ${}_SA$. В этом случае используем обозначение ${}_SB \subseteq_S A$. Класс всех S-полигонов обозначим через S-Act. Для любого $s \in S$ унарную операцию $f_s \in L_s$ на A будем обозначать через s.

Наименьшая относительно $\subseteq$ конгруэнция на S-полигоне ${}_SA$, содержащая множество $X \subseteq A \times A$, называется *конгруэнцией S-полигона ${}_SA$, порожденной множеством X*. *Копроизведением* S-полигонов ${}_SA_i$, $i \in I$, называется их

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 21.04.2020 № 075–02–2020–1482–1.

дизъюнктное объединение; копроизведение S-полигонов ${}_SA_i, i \in I$, обозначается через $\coprod\limits_{i \in I} {}_SA_i$.

Пусть ${}_SB_i \subseteq_S A_i$ и $\varphi_{ij} :_S B_i \to_S B_j$ — изоморфизм, причем $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ и $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} : B_i \to B_i$ — тождественное отображение $(i, j, k \in I)$. Тогда S-полигон $\coprod\limits_{i \in I} {}_SA_i/\eta$, где η — конгруэнция S-полигона $\coprod\limits_{i \in I} {}_SA_i$, порожденная множеством $\{(a_i, \varphi_{ij}(a_i)) \mid a_i \in B_i, i, j \in I\}$, называется *склейкой* S-полигонов ${}_SA_i$ по подполигонам ${}_SB_i$ $(i \in I)$. Класс K S-полигонов называется *замкнутым относительно копроизведений* (*склеек*), если копроизведение (склейка) любых S-полигонов из K принадлежит K.

Свободным S-полигоном (с множеством свободных образующих $X \subseteq F$) в классе S-*Act* называется S-полигон ${}_SF$ такой, что для любого S-полигона ${}_SA$ и отображения $\theta : X \to A$ существует единственный гомоморфизм $\bar{\theta} :_S F \to_S A$ такой, что $\bar{\theta}\iota = \theta$, где $\iota : X \to F$ — вложение. Класс всех свободных S-полигонов обозначим через $\mathcal{F}$.

Факт 1 [5, теорема 1.5.13]. *S-полигон ${}_SF$ является свободным тогда и только тогда, когда ${}_SF$ изоморфен копроизведению S-полигонов, изоморфных S-полигону ${}_SS$.*

Из факта 1 следует, что S-полигон ${}_SS$ является свободным и класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно копроизведений.

Проективным S-полигоном называется S-полигон ${}_SP$ такой, что для любых S-полигонов ${}_SN$, ${}_SM$ и любых гомоморфизмов $\theta :_S P \to_S N$ и $\varphi :_S M \to_S N$, где φ — эпиморфизм, существует гомоморфизм $\psi :_S P \to_S M$ такой, что $\varphi \circ \psi = \theta$. Класс всех проективных S-полигонов обозначим через $\mathcal{P}$.

Факт 2 [5, теорема 3.17.8]. *S-полигон ${}_SP$ проективен тогда и только тогда, когда ${}_SP \cong \coprod\limits_{i \in I} {}_SSe_i$, где $I \neq \varnothing$ и $e_i = e_i^2$ для всех $i \in I$.*

Из факта 2 следует, что S-полигон ${}_SS$ является проективным и класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно копроизведений.

Если A_S — правый S-полигон и ${}_SB$ — левый S-полигон, то *тензорное произведение* A_S и ${}_SB$, обозначаемое через $A_S \otimes_S B$, является фактор-множеством множества $A \times B$ относительно эквивалентности, порожденной множеством $\{((as, b), (a, sb)) \mid a \in A, b \in B, s \in S\}$. Для $a \in A$ и $b \in B$ класс эквивалентности с представителем (a, b) будем обозначать через $a \otimes b$. Отображение $- \otimes B$ является функтором из категории *Act*-S всех правых S-полигонов в категорию множеств. *Сильно плоским S-полигоном* называется S-полигон ${}_SB$ такой, что функтор $- \otimes B$ сохраняет универсальные квадраты. Обозначим класс всех сильно плоских S-полигонов через $\mathcal{SF}$.

Факт 3 [5, теорема 3.16.3, следствие 3.16.5]. *S-полигон ${}_SB$ сильно плоский тогда и только тогда, когда ${}_SB$ удовлетворяет следующим условиям:*

(P) *если $x, y \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = ty$, то существуют элемент $z \in B$ и элементы $s', t' \in S$ такие, что $x = s'z, y = t'z$ и $ss' = tt'$;*

(E) *если $x \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = tx$, то существуют $z \in B$ и $s' \in S$ такие, что $x = s'z$ и $ss' = ts'$.*

Из факта 3 следует, что S-полигон ${}_SS$ сильно плоский и класс $\mathcal{SF}$ замкнут относительно копроизведений.

Элемент $c \in S$ называется *сократимым справа*, если из равенства $ac = bc$ следует равенство $a = b$ для любых $a, b \in S$. *Делимый* S-полигон — это S-

полигон ${}_SA$, удовлетворяющий условию $cA = A$ для любого сократимого справа элемента $c \in S$. Класс всех делимых S-полигонов обозначим через S-Div.

Факт 4 [5, теорема 3.2.9]. *Для любого S-полигона ${}_SA$ существует делимый S-полигон ${}_SD(A)$ такой, что ${}_SA \subseteq_S D(A)$.*

Из определения делимого S-полигона следует, что класс S-Div замкнут относительно копроизведений и склеек. Из факта 4 следует, что существует делимый S-полигон ${}_SQ$ такой, что ${}_SS \subseteq {}_SQ$.

Пусть ${}_SA$ — S-полигон. Элемент $a \in A$ называется act-*регулярным*, если существует гомоморфизм $\varphi : {}_SSa \longrightarrow {}_SS$ такой, что $\varphi(a)a = a$. *Регулярным S-полигоном* называется S-полигон, все элементы которого act-регулярны. Из определения следует, что для любого регулярного S-полигона ${}_SA$ и любого элемента $a \in A$ существует $e = e^2 \in S$ такой, что ${}_SSa \cong_S Se$. Класс всех регулярных S-полигонов обозначим через $\mathcal{R}$. Заметим, что класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно копроизведений и склеек.

Пусть в S-полигоне ${}_SA$ существует регулярный подполигон. Объединение всех регулярных подполигонов S-полигона ${}_SA$ есть регулярный подполигон, который называется *регулярным центром* S-полигона ${}_SA$ и обозначается через $R({}_SA)$. Вместо $R({}_SS)$ будем писать ${}_SR$. Подполугруппа R моноида S называется регулярным центром моноида S.

Факт 5 [6]. *Класс $\mathcal{R}$ регулярных S-полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда*

(1) *полугруппа R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами;*

(2) *для любых $n \geq 1$, $s_i, t_i \in S$ $(1 \leq i \leq n)$ множество $\left\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x = t_i x\right\}$ пустое или конечно-порожденное как правый идеал полугруппы R.*

Приведем некоторые сведения из теории моделей. Для алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка L и $a_1, \ldots, a_n \in A$ вместо $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n$ будем писать $\bar{a} \in A$; длину кортежей $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ и $\bar{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, будем обозначать через $|a|$ и $|x|$ соответственно, т. е. $|a| = n$ и $|x| = n$.

Пусть $L(X)$ — язык, который получается из языка L добавлением множества X в качестве множества новых констант. Пусть T — теория языка L, $\mathcal{C}$ — *монстр-модель*, т. е. насыщенная в достаточно большой мощности модель теории T, X — *множество в теории* T, т. е. подмножество носителя $\mathcal{C}$, $T(X) = \{\varphi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in X, \mathcal{C} \models \varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{x})$ — формула языка $L\}$, язык L_P получается из языка L добавлением нового одноместного предикатного символа P, Δ — некоторое множество предложений языка L_P. Теория T называется *P_Δ-стабильной в мощности* λ, если для любого множества X в теории T мощности $\leq \lambda$ множество $T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$ имеет не более λ пополнений в языке $(L(X))_P$. Теория T называется *P_Δ-стабильной*, если она P_Δ-стабильна в некоторой бесконечной мощности λ.

Пусть U — множество в теории T, X, Y — множества кортежей элементов из U длины n. Пара $\langle X, Y \rangle$ называется *отделимой в теории* $T(U)$, если существует формула $\Phi(\bar{z})$ языка $L(U)$, $|\bar{z}| = n$, такая, что

$$\{\Phi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in X\} \cup \{\neg\Phi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in Y\} \subseteq T(U).$$

При этом говорят, что формула $\Phi(\bar{z})$ *отделяет X от Y* (или *отделяет пару* $\langle X, Y \rangle$) в T.

Факт 6 [1]. *Пусть T — полная теория языка L и Δ — некоторое множество предложений языка L_P. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *теория T P_Δ-стабильна;*

(b) *для любого множества U в теории T каждая пара $\langle X, Y\rangle$ множеств кортежей из U одинаковой длины, отделимая в $T_\Delta(U)$, отделима в теории $T(U)$.*

Теория T называется $(P,1)$-*стабильной,* если она P_Δ-стабильна для $\Delta = \varnothing$. Теория T называется (P,s)-*стабильной,* если она P_Δ-стабильна для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих замкнутость предиката P относительно функций, определимых функциональными символами языка L. Теория T называется (P,a)-*стабильной,* если она P_Δ-стабильна для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является алгебраически замкнутым множеством, т. е. содержит все конечные множества, определимые в алгебраической системе $\mathcal{C}$ формулами языка L с параметрами из предиката P. Теория T называется (P,e)-*стабильной*, если она P_Δ-стабильна для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является элементарной подсистемой. Класс K алгебраических систем языка L называется $(P,1)$ ((P,s), (P,a), (P,e))-*стабильным*, если теория $Th(A)$ $(P,1)$ ((P,s), (P,a), (P,e))-стабильна для любого $\mathcal{A} \in K$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка L называется $(P,1)$ ((P,s), (P,a), (P,e))-*стабильной*, если $Th(A)$ $(P,1)$ ((P,s), (P,a), (P,e))-стабильна.

Из этих определений следует

Факт 7. *Имеют место следующие импликации:*

$$(P,1)\text{-стабильность} \Rightarrow (P,s)\text{-стабильность} \Rightarrow (P,a)\text{-стабильность} \Rightarrow (P,e)\text{-стабильность}.$$

Для S-полигона ${}_SA$ и $t \in S$ введем обозначение

$$R_A^t = (tA\backslash\{a \in A \mid ta = a\}) \cup \{a \in A \mid ta = a \wedge \exists b(tb = a \wedge b \neq a)\}.$$

Следующий факт дает критерий $(P,1)$-стабильности S-полигонов.

Факт 8 [4]. *S-полигон ${}_SA$ $(P,1)$-стабилен тогда и только тогда, когда для любого $t \in S$ множество R_A^t конечно.*

Следующие два факта дают характеризацию моноидов S, класс всех S-полигонов над которыми P-стабилен.

Факт 9 [4]. *Класс $S - Act$ $(P,1)$-стабилен тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Факт 10 [7]. *Класс $S - Act$ (P,s)-стабилен тогда и только тогда, когда S — группа.*

Факт 11 [8, предложение 3.1.2]. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебраическая система языка L и $\mathcal{D}$ — подсистема алгебраической системы $\mathcal{A}$. Для того чтобы имело место $\mathcal{D} \preceq \mathcal{A}$, необходимо и достаточно, чтобы для любой формулы $\Phi(x_0,\dots,x_n)$ языка L и любых $b_1,\dots,b_n \in B$*

$$\mathcal{A} \models \exists x_0 \Phi(x_0, b_1,\dots,b_n) \Longrightarrow \mathcal{A} \models \Phi(b_0, b_1,\dots,b_n) \text{ для некоторого } b_0 \in B.$$

Множество X называется *множеством неразличимых в $\mathcal{A}$ элементов* (по отношению к упорядочению $<$), если $(\mathcal{A}, x_0,\dots,x_n) \equiv (\mathcal{A}, y_0,\dots,y_n)$ для всех n и для любых последовательностей $x_1 < \dots < x_n$ и $y_1 < \dots < y_n$ из множества X.

Факт 12 [8, предложение 3.3.8]. *Пусть $\langle X, < \rangle$ — некоторое линейно упорядоченное подмножество алгебраической системы $\mathcal{A}$. Предположим, что для любых двух упорядоченных по возрастанию n-элементных цепей $x_1 < \dots < x_n$ и $y_1 < \dots < y_n$ из X существует такой автоморфизм f алгебраической системы $\mathcal{A}$, что $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$. Тогда X — множество неразличимых в $\mathcal{A}$ элементов.*

§ 2. $(P, 1)$-стабильность

Теорема 1. *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и существуют S-полигон ${}_SA \in K$ и $e^2 = e \in S$ такие, что ${}_SSe \subseteq_S A$. Если класс K $(P, 1)$-стабилен, то $|Se| = 1$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются, класс K $(P, 1)$-стабилен, ${}_SB = \coprod\limits_{i\in\omega} {}_SA_i \in K$, где ${}_SA_i$ — копии S-полигона ${}_SA$, $a_i \in A_i$ — копии элемента $a \in A$ $(i \in \omega)$. Предположим, что существует $s \neq e$ такой, что $s \in Se$. Тогда $se = tee = te = s$ для некоторого $t \in S$.

Если $s^2 = s$, то из $ss = s$, $se = s$ и $e \neq s$ получаем

$$s \in \{t \in Se \mid st = t \wedge \exists r(sr = t \wedge r \neq t)\} \subseteq R^s_{Se} \subseteq R^s_A,$$

т. е. $s_i \in R^s_B$ для любого $i \in \omega$.

Если $s^2 \neq s$, то из $s = se$ и $ss \neq s$ получаем

$$s \in sSe \backslash \{t \in Se \mid st = t\} \subseteq R^s_{Se} \subseteq R^s_A,$$

т. е. $s_i \in R^s_B$ для любого $i \in \omega$.

Следовательно, $|R^s_B| \geq \omega$, что по факту 8 противоречит $(P, 1)$-стабильности класса K. Таким образом, $|Se| = 1$.

Из теоремы 1 и факта 9 вытекает

Следствие 1. *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и существует S-полигон ${}_SA \in K$ такой, что ${}_SS \subseteq_S A$. Класс K $(P, 1)$-стабилен тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Так как классы S-*Act*, $\mathcal{F}$, $\mathcal{SF}$, $\mathcal{P}$, S-*Div* замкнуты относительно копроизведений и содержат S-полигон ${}_SA \in K$ такой, что ${}_SS \subseteq_S A$, то из следствия 1 получаем

Следствие 2. *Пусть K — один из классов S-Act, $\mathcal{F}$, $\mathcal{SF}$, $\mathcal{P}$, S-Div. Класс K $(P, 1)$-стабилен тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Следствие 3. *Пусть $\mathcal{R} \neq \varnothing$. Класс $\mathcal{R}$ $(P, 1)$-стабилен тогда и только тогда, когда $|Se| = 1$ для любого $e = e^2 \in R$, где R — регулярный центр моноида S.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $e = e^2 \in R$, где R — регулярный центр моноида S. Так как ${}_SSe \in \mathcal{R}$ и класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно копроизведений, по теореме 1 $|Se| = 1$.

Достаточность. Предположим, что $|Se| = 1$ для любого $e = e^2 \in R$. Тогда любой связный регулярный S-полигон одноэлементен. Следовательно, любой регулярный S-полигон является копроизведением одноэлементных S-полигонов.

Пусть ${}_SA \in \mathcal{R}$ и $t \in S$. Тогда ${}_SA \cong \coprod\limits_{i\in I} Se_i$, где $e_i = e_i^2 \in R$. Так как $|Se_i| = 1$, то $te_i = e_i$ для любого $i \in I$, т. е. $\{a \in A \mid ta = a\} = A$ и $tA \setminus \{a \in A | ta = a\} = \varnothing$. Из равенства $tb = a$ следует $b = a$ для любых $a, b \in A$. Поэтому $\{a \in A \mid ta = a \wedge \exists b(tb = a \wedge b \neq a)\} = \varnothing$. Следовательно, $R^t_A = \varnothing$. По факту 8 S-полигон ${}_SA$ $(P, 1)$-стабилен. Таким образом, класс $\mathcal{R}$ $(P, 1)$-стабилен.

§ 3. (P,s)-, (P,a)-, (P,e)-стабильность

Теорема 2. *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и склеек и существуют S-полигон ${}_SA \in K$ и $e^2 = e \in S$ такие, что ${}_SSe \subseteq_S A$. Если класс K (P,e)-стабилен, то $Ste = Se$ для любого $t \in S$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются, класс K (P,e)-стабилен и существует $t \in S$ такой, что $e \notin Ste$. Пусть $T = \{s \in S \mid Sse = Se\}$. Ясно, что $e \in T$, $T \cap Ste = \varnothing$ и ${}_SS^1 = {}_S(Se\backslash T)$ — собственный подполигон S-полигона ${}_SSe \subseteq_S A$. Пусть ${}_SA_{ij}$ — попарно не пересекающиеся копии S-полигона ${}_SA$, ${}_SS^1_{ij}$ — копии подполигона ${}_SS^1$ в S-полигоне ${}_SA_{ij}$, a_{ij} — копии элемента $a \in A$ в S-полигоне ${}_SA_{ij}$ $(i,j \in \omega)$. Для $i \in \omega$ через ${}_SA_i$ обозначим склейку S-полигонов ${}_SA_{ij}$ по подполигонам ${}_SS^1_{ij}$, где $j \in \omega$; через A^1_i — склейку S-полигонов ${}_SA_{ij}$ по подполигонам ${}_SS^1_{ij}$, где $j \in 2\omega$. Будем отождествлять S-полигоны ${}_SA_{ij}$ и ${}_SS^1_{ij}$ $(j \in \omega)$ с соответствующими подполигонами S-полигона ${}_SA_i$. Тогда ${}_SA^1_i \subseteq_S A_i$. Пусть

$$ {}_SB = \bigsqcup_{i\in\omega} {}_SA_i, \quad {}_SP = \bigsqcup_{i\in\omega} {}_SA^1_{2i} \sqcup \bigsqcup_{i\in\omega} {}_SA_{2i+1}. $$

Покажем, что ${}_SP \preceq {}_SB$. Пусть $\Phi(x,\bar{x})$ — формула языка L_S, $\bar{x} = \langle x_0,\ldots,x_n\rangle$, $\bar{b} = \langle b_0,\ldots,b_n\rangle \in P$, ${}_SB \models \Phi(a_{2i,2j+1},\bar{b})$ для некоторого $a_{2i,2j+1} \in B \setminus P$. Пусть $k \in \omega$ таково, что $\{b_0,\ldots b_n\} \cap \bigl(A_{2i,2k} \setminus S^1_{2i,2k}\bigr) = \varnothing$. Очевидно, отображение $\varphi : {}_SB \longrightarrow {}_SB$, где

$$ \varphi(d) = \begin{cases} ra_{2i,2k}, & \text{если } d = ra_{2i,2j+1}, \\ ra_{2i,2j+1}, & \text{если } d = ra_{2i,2k}, \\ d & \text{иначе,} \end{cases} $$

является автоморфизмом. Следовательно, по факту 11 ${}_SP \preceq_S B$.

Так как $T \cap Ste = \varnothing$, то $(te)_{ij} \in S^1_{ij} \subseteq A_i$, т. е. $(te)_{ij} = (te)_{ik}$ в S-полигоне ${}_SA_i$ для любых $i,j,k \in \omega$. Через t_i обозначим элемент $(te)_{ij}$ S-полигона ${}_SA_i$, где j — любой элемент из ω. Пусть

$$ U = \{t_i \in A_i \mid i \in \omega\}, \quad X = \{t_{2i} \in A_{2i} \mid i \in \omega\}, $$

$$ Y = \{t_{2i+1} \in A_{2i+1} \mid i \in \omega\}, \quad \Phi(x) \leftrightharpoons \exists y(ty = x \wedge \neg P(y)), $$

где $\Phi(x)$ — формула языка $L_S \cup \{P\}$. Поскольку $te_{2i,2j+1} = t_{2i}$ в ${}_SA_{2i}$ и $e_{2i,2j+1} \notin P$ $(i,j \in \omega)$, то $X \subseteq \Phi(B)$. Так как ${}_SA_{2i+1}$ — компонента связности S-полигона ${}_SB$ и $A_{2i+1} \subseteq P$ $(i \in \omega)$, то $Y \cap \Phi(B) = \varnothing$. Таким образом, $\Phi(x)$ отделяет X и Y.

Предположим, что существует формула $\Psi(x,\bar{u})$ языка $L_S \cup U$, отделяющая X и Y, т. е. $X \subseteq \Psi(B,\bar{u})$ и $Y \cap \Psi(B,\bar{u}) = \varnothing$, где $\bar{u} = \langle u_0,\ldots,u_n\rangle \in U$. Пусть $u_0,\ldots,u_n \in \bigcup\limits_{i=0}^{k} A_i$ для некоторого $k \in \omega$. Для различных $t_{i_1},\ldots,t_{i_m} \in \bigcup\limits_{i>k} A_i$ и различных $t_{j_1},\ldots,t_{j_m} \in \bigcup\limits_{i>k} A_i$ существует автоморфизм φ алгебраической системы $\langle B; L_S(\bar{u})\rangle$ такой, что $\varphi(t_{i1}) = t_{j1},\ldots,\varphi(t_{im}) = t_{jm}$. Тогда по факту 12 множество $\{t_i \mid i > k\}$ является множеством неразличимых элементов в алгебраической системе $\langle B; L_S(\bar{u})\rangle$. Поскольку $t_{2k+2} \in X$, то $t_{2k+2} \in \Psi(B,\bar{u})$ и из неразличимости множества $\{t_i \mid i > k\}$ следует $t_{2k+1} \in \Psi(B,\bar{u})$, что противоречит равенству $Y \cap \Psi(B,\bar{u}) = \varnothing$. Следовательно, по факту 6 класс K не (P,e)-стабилен; противоречие. Таким образом, $Ste = Se$ для любого $t \in S$.

Лемма 1. *Если $St = S$ для любого $t \in S$, то S — группа.*

Доказательство. Пусть $St = S$ для любого $t \in S$ и $r \in S$. Так как $Sr = S$, то $1 = r'r$ для некоторого $r' \in S$. Поскольку $Sr' = S$, то $1 = r''r'$ для некоторого $r'' \in S$. Таким образом, $r = r''(r'r) = r''1 = r''$. Следовательно, $1 = rr'$, т. е. $r' = r^{-1}$. Итак, S — группа.

Из теоремы 2, фактов 7, 10 и леммы 1 получаем

Следствие 4. *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и склеек S-полигонов и существует S-полигон ${}_SA \in K$ такой, что ${}_SS \subseteq_S A$. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*
(1) *класс K (P, s)-стабилен;*
(2) *класс K (P, a)-стабилен;*
(3) *класс K (P, e)-стабилен;*
(4) *S — группа.*

Так как классы S-*Act* и S-*Div* замкнуты относительно копроизведений и склеек и содержат S-полигон ${}_SA \in K$ такой, что ${}_SS \subseteq_S A$, из следствия 4 получаем

Следствие 5. *Пусть K — один из классов S-Act, S-Div. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*
(1) *класс K (P, s)-стабилен;*
(2) *класс K (P, a)-стабилен;*
(3) *класс K (P, e)-стабилен;*
(4) *S — группа.*

Пусть ${}_SA$, ${}_SB$ — S-полигоны. Если для элементов $a \in A$ и $b \in B$ существует изоморфизм $f : {}_SSa \to {}_SSb$ такой, что $f(a) = b$, то этот факт будем обозначать через ${}_SSa \overset{\sim}{\rightarrow} {}_SSb$.

Будем говорить, что класс $\mathcal{R}$ *удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит* (см. [6]), если для каждого идемпотента $e \in R$, где R — регулярный центр моноида S, существует формула $\Phi_e(x)$ такая, что для любого регулярного S-полигона ${}_SA$ и любого $a \in A$

$$ {}_SA \models \Phi_e(a) \iff {}_SSa \overset{\sim}{\rightarrow} {}_SSe. $$

Лемма 2. *Пусть класс $\mathcal{R}$ удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит и $Ste = Se$ для любых $e = e^2 \in R$ и $t \in S$. Тогда*

$$ {}_SSe \equiv {}_SSf \iff {}_SSe \cong {}_SSf $$

для любых идемпотентов $e, f \in R$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются и $e, f \in R$. Если ${}_SSe \cong_S Sf$, то, очевидно, ${}_SSe \equiv_S Sf$. Пусть ${}_SSe \equiv_S Sf$. Тогда ${}_SSe \models \Phi_e(e)$, т. е. ${}_SSf \models \Phi_e(a)$ для некоторого $a \in Sf$. Следовательно, ${}_SSa \overset{\sim}{\rightarrow} {}_SSe$. Так как $af = a$, по условию $Sa = Sf$. Тогда ${}_SSe \cong_S Sf$.

Теорема 3. *Пусть класс $\mathcal{R}$ аксиоматизируем и удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*
(1) *класс $\mathcal{R}$ (P, s)-стабилен;*
(2) *класс $\mathcal{R}$ (P, a)-стабилен;*
(3) *класс $\mathcal{R}$ (P, e)-стабилен;*

(4) *$Ste = Se$ для любого идемпотента $e \in R$, где R — регулярный центр моноида S.*

Доказательство. Из факта 7 следуют импликации (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3). Так как класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно копроизведений и склеек S-полигонов, из теоремы 2 следует (3) $\Rightarrow$ (4).

Докажем (4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\{e_i \mid i \in I\}$ — множество всех идемпотентов множества R таких, что $Se_i \not\cong Se_j$ $(i \neq j)$. Покажем, что любой регулярный S-полигон изоморфен копроизведению S-полигонов ${}_SSe$, где $e = e^2 \in R$. Действительно, если ${}_SA$ — регулярный S-полигон и ${}_SSa \subset_S Sb \subseteq_S A$ для некоторых $a, b \in A$, то, поскольку существует $e = e^2 \in R$ такой, что ${}_SSb \cong_S Se$, в S-полигоне ${}_SSe$ есть собственный подполигон, что противоречит условию (4).

Для любого множества $J \subseteq I$ и любой функции $\varphi_J : J \longrightarrow \omega \cup \{\omega\}$ определим S-полигон

$$
{}_SA_{J,\varphi_J} = \bigsqcup_{j \in J} \bigsqcup_{l \in \varphi_J(j)} {}_SS^l e_j,
$$

где ${}_SS^l e_j$ $(l \in \varphi_J(j))$ — копии S-полигонов ${}_SSe_j$ $(j \in J)$. Например, если $J = \{j_0, j_1\} \subseteq I$, $\varphi_J(j_0) = 1 = \{0\}$, $\varphi_J(j_1) = 2 = \{0, 1\}$, то ${}_SA_{J,\varphi_J} = {}_SS^0 e_{j_0} \sqcup {}_SS^0 e_{j_1} \sqcup {}_SS^1 e_{j_1}$.

Пусть ${}_SB$ — регулярный S-полигон. Тогда существуют $J \subseteq I$ и функция $\psi_J : J \longrightarrow \mathrm{Ord}$, где Ord — множество всех ординалов, такие, что

$$
{}_SB \cong \bigsqcup_{j \in J} \bigsqcup_{l \in \psi_J(j)} {}_SS^l e_j.
$$

Функцию φ_J определим следующим образом:

$$
\varphi_J(j) = \begin{cases} \psi_J(j), & \text{если } \psi_J(j) < \omega, \\ \omega & \text{иначе.} \end{cases}
$$

Тогда ${}_SB \equiv {}_SA_{J,\varphi_J}$. Таким образом, любой регулярный S-полигон элементарно эквивалентен S-полигону типа ${}_SA_{J,\varphi_J}$.

Пусть ${}_SA \in \mathcal{R}$, P — одноместный предикат, $\lambda = \max\{2^{2^{|S|}}, \omega\}$, $T = Th({}_SA)$, X — множество в T, $|X| \leq \lambda$, $T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$, где $\Delta = \{\forall x (P(x) \to P(sx)) \mid s \in S\}$. Пусть T_1 — пополнение теории $T_\Delta(X)$ в языке $(L_S(X))_P$, $\mathcal{D} = \langle B; (L_S(X))_P \rangle$ — модель теории T_1. Поскольку $\mathcal{R}$ — аксиоматизируемый класс, любая модель теории T является регулярным S-полигоном, следовательно, элементарно эквивалентна S-полигону типа ${}_SA_{J,\varphi_J}$. В силу того, что $\mathcal{D}$ — модель $T_\Delta(X)$, имеем $X \subseteq P$. Так как X — множество в теории T, т. е. подмножество носителя монстр-модели $\mathcal{C}$, то

$$
{}_SSX \cong \bigsqcup_{j \in J} \bigsqcup_{l \in \psi_J(j)} {}_SS^l e_j
$$

для некоторых фиксированных $J \subseteq I$ и $\psi_J : J \longrightarrow \mathrm{Ord}$. Ввиду того, что ${}_S(P \setminus SX)$ и ${}_S(B \setminus P)$ — регулярные S-полигоны, существуют $K, L \subseteq I$ и функции φ_K, φ_L такие, что ${}_S(P \setminus SX) \equiv {}_SA_{K,\varphi_K}$, ${}_S(B \setminus P) \equiv {}_SA_{L,\varphi_L}$. Поскольку

$$
|\{\langle K, \varphi_K \rangle\} \mid K \subseteq I, \varphi_K : K \longrightarrow \omega \cup \{\omega\}| \leq 2^I \omega^{2^I} \leq \max\{\omega, 2^{2^S}\} = \lambda,
$$

число пополнений теории $T_\Delta(X)$ не больше, чем λ. Следовательно, теория T (P, s)-стабильна.

Следствие 6. *Пусть S — коммутативный моноид. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) *класс $\mathcal{R}$ (P,s)-стабилен;*

(2) *класс $\mathcal{R}$ (P,a)-стабилен;*

(3) *класс $\mathcal{R}$ (P,e)-стабилен;*

(4) *$Ste = Se$ для любого идемпотента $e \in R$, где R — регулярный центр моноида S.*

Доказательство. Из факта 7 следуют импликации (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3). Так как класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно копроизведений и склеек, из теоремы 2 следует (3) $\Rightarrow$ (4).

Докажем (4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $e, f \in R$. Тогда $Se = Sfe = Sef = Sf$. Поскольку $Ste = Se$ для любого $t \in S$, любой регулярный S-полигон изоморфен копроизведению копий S-полигона ${}_SSe$.

Покажем, что $\mathcal{R}$ — аксиоматизируемый класс. Поскольку $Se = eS$ — единственный правый идеал R, порожденный идемпотентом, полугруппа R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами. Пусть $sr = tr$ для некоторых $s, t \in S$, $r \in R$. Так как ${}_SSr \cong {}_SSe$, где $e = e^2 \in R$, то $r = re$, $Sr = Sre = Se$ и $e = ur = ru$ для некоторого $u \in S$. Тогда $se = te$. Следовательно, множество $\left\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x = t_i x\right\}$ либо пусто, либо совпадает с eS и поэтому конечно-порожденное как правый идеал полугруппы R. По факту 5 класс $\mathcal{R}$ аксиоматизируем.

Повторяя рассуждения из доказательства импликации (4) $\Rightarrow$ (1) теоремы 3 для $|I| = 1$ получаем (P,s)-стабильность класса $\mathcal{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Палютин Е. А.* E^*-стабильные теории // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 2. С. 194–210.
2. *Палютин Е. А.* P-стабильные абелевы группы // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 5. С. 606–631.
3. *Русалеев М. А.* Характеризация $(P,1)$-стабильных теорий // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2. С. 346–359.
4. *Птахов Д. О.* Полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 6. С. 712–720.
5. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Acts and categories. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 2000.
6. *Михалев А. В.,Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А.* Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов // Фунд. и прикл. математика. 2004. Т. 10, № 4. С. 107–157.
7. *Степанова А. А., Птахов Д. О.* P-стабильные полигоны // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 4. С. 486–505.
8. *Кейслер Г., Чен Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию 25 мая 2020 г.
После доработки 15 декабря 2020 г.
Принята к публикации 22 января 2021 г.

Степанова Алена Андреевна, Красицкая Анастасия Игоревна
Дальневосточный федеральный университет,
Школа естественных наук,
ул. Суханова, 8, Владивосток 690000
stepltd@mail.ru, stasyakras@gmail.com