

М. В. Лотфуллин

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В настоящее время большое внимание уделяется разработке приближенных методов конформных отображений, и в частности, методов, использующих функции, обладающие свойством растяжения [1]. В данной статье вводится в рассмотрение новая функция растяжения, позволяющая, в отличие от известных функций растяжения [2, с. 196], создать удобный для алгоритмизации метод конформного отображения областей произвольной формы, который обладает достаточно высокой скоростью сходимости.

Пусть односвязная область D плоскости z ограничена кусочно-гладкой кривой C . Не умаляя общности, можно считать, что $0 \in D$, $D \subset K$, где $K = \{|z| \leq 1\}$. При отображении области D на единичный круг K применяются два процесса последовательных приближений.

1. Осуществляется растяжение области D до достаточно близкой к кругу области D_n с помощью функции

$$\lambda(z, a) = \frac{[a(1 - \bar{a}z)]^{1/N} - (a - z)^{1/N}}{[\bar{a}(a - z)]^{1/N} - (1 - \bar{a}z)^{1/N}},$$

реализующей конформное отображение N -листного круга с точкой разветвления $z = a$ на круг K . Применяя лемму Шварца [3, с. 29], нетрудно показать, что функция $\lambda(z, a)$ обладает свойством растяжения

$$|\lambda(z, a)| \geq |z|, \quad z \in D.$$

Параметр N выбирается из условия

$$|\lambda(z^0, z^0)| > 1 - \varepsilon,$$

где z^0 — ближайшая к началу координат точка кривой C , ε — точность растяжения. В процессе последовательных приближений $a = z_n^0$, где z_n^0 — ближайшая к началу координат точка границы области D_n . Область D_n считается достаточно близкой к кругу K , если:

область D_n является звездной [4, с. 359];

выполняется условие $|z_n^0| > 1 - \varepsilon$.

Ввиду того, что скорость сходимости процесса последовательных растяжений убывает с ростом $|z_n^0|$, после выполнения указанных условий процесс последовательных приближений продолжается по следующему алгоритму.

$$2. \tilde{\varphi}_n(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_C \frac{\varphi_{n-1}(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{2} \varphi_{n-1}(t_0),$$

где интегрирование проводится в смысле главного значения,

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \exp[\text{Im} \ln \tilde{\varphi}_n(t)]; \\ \varphi_0(t) &= \exp[\text{Im} \ln f_n(t)]. \end{aligned}$$

Здесь $f_n(z) = \lambda(\lambda(\dots \lambda(z, z_0^j) \dots), z_{n-1}^j)$ — функция, осуществляющая конформное отображение области D на область D_n . Оценка сходимости процесса ведется по величине

$$\delta_n = \max_{t \in C} |\hat{\varphi}_n(t) - \varphi_{n-1}(t)|.$$

Необходимым и достаточным условием сходимости является

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_C \frac{\varphi_{n-1}(t)}{t-t_0} dt - \frac{1}{2} \varphi_{n-1}(t_0) \right| = 0. \quad (1)$$

Условие (1) можно записать в виде

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_C \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt - \frac{1}{2} \varphi(t_0) \right| = 0, \quad (2)$$

где $\varphi(t)$ — предел последовательности функций $\varphi_n(t)$. Из соотношения (2) видно, что $\varphi(t)$ является краевым значением функции, аналитической в области D [5, с. 41]. Так как $|\varphi(t)| = 1$, функция

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

осуществляет конформное отображение области D на круг K . Обратную функцию $F(u)$

$$z = F(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(t)}{t-u} dt \quad (\Gamma = \{|u| = 1\})$$

можно представить в виде ряда

$$F(u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u^k \quad (|u| \leq 1), \quad (3)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \psi(t) t^{-k-1} dt.$$

На основе описанного алгоритма составлена программа на языке Фортран IV. В качестве примера приведем результаты некоторых расчетов.

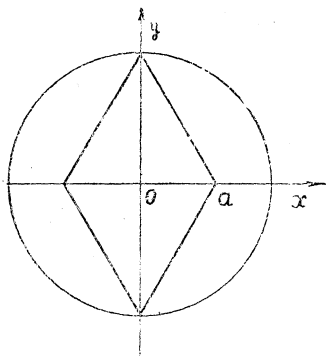


Рис. 1.

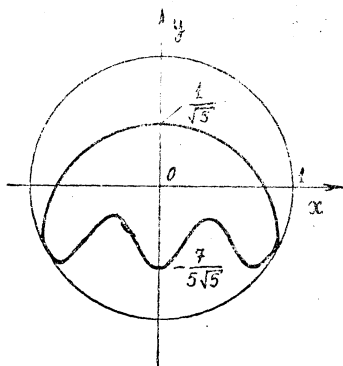


Рис. 2.

А. Отображение круга K на внутренность эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ осуществляется с помощью ряда (3), первые 19 членов которого имеют вид

$$z = 1,216u + 0,305u^3 + 0,147u^5 + 0,089u^7 + 0,057u^9 + \\ + 0,040u^{11} + 0,029u^{13} + 0,021u^{15} + 0,016u^{17} + 0,012u^{19} + \dots$$

Отклонение образа круга K от исходной области не превышает 0,05.

В. Отображение круга K на внутренность ромба (рис. 1). При $a = 1$ первые 9 членов разложения в ряд (3) отображающей функции записываются в виде

$$z = 0,863u + 0,076u^5 + 0,032u^9 + \dots,$$

а при $a = 0,5$ — в виде

$$z = 0,496u - 0,068u^3 + 0,058u^5 - 0,025u^7 + \dots$$

Для представления отображающей функции в виде ряда (3) с точностью до 0,01 при $a = 1$ необходимо учитывать не менее 40 членов, а при $a = 0,5$ — не менее 50 членов.

С. Отображение круга K на незвездную область, изображенную на рисунке 2. Учет 60 членов ряда (3) позволяет представить отображающую функцию с точностью до 0,01. Первые четыре члена ряда (3) имеют вид:

$$z = 0,626u - 0,021iu^2 + 0,084u^3 - 0,065iu^4 + \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фильчаков П. Ф. Приближенные методы конформных отображений.— Киев: Наукова думка, 1964.— 532 с.
2. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений.— М.: ИЛ, 1963.— 406 с.
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— 2-е изд.— М.: Наука, 1966.— 628 с.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— 4-е изд., исправленное.— М.: Наука, 1973.— 736 с.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1977.— 640.

Доложено на семинаре 28 января 1983 года.