Б. Г. Гребенщиков, Об устойчивости стационарных систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием, линейно зависящим от времени, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 7, 69–71

https://www.mathnet.ru/ivm5120

Б. Г. Гребенщиков

УДК 517.92

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

Данная работа посвящена изучению свойств решений систем вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\mu t) + R\dot{x}(\mu t),\ t \geqslant t_0 > 0,\ \mu = \text{const},\ 0 < \mu < 1. \tag{1}$$

Здесь A, B, R — постоянные матрицы размерности $l \times l$, $x(t)$ есть l-мерная вектор-функция времени t. На начальном множестве $E_0: [\mu t_0, t_0]$ задана непрерывная вектор-функция $\varphi(t)$, имеющая непрерывную производную [1]. Запаздывание $\gamma(t) = (1 - \mu)t$ есть линейная функция времени.

Пусть корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ имеют отрицательную вещественную часть, т. е.

$$\operatorname{Re}\lambda < -\beta_1,\ \beta_1 = \text{const},\ \beta_1 > 0. \tag{2}$$

Далее, пусть собственные значения ρ матрицы $A^{-1}B$ удовлетворяют неравенству

$$|\rho| < 1. \tag{3}$$

Наконец, пусть корни p характеристического уравнения $|E - Re^{-\sigma(p+1)}| = 0$, $\sigma = -\ln\mu$ имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} p < -\beta_2,\ \beta_2 = \text{const},\ \beta_2 > 0. \tag{4}$$

Сделаем замену времени $\tau = \ln(t/t_0)$. Получаем систему нейтрального типа с постоянным запаздыванием

$$\dot{z}(\tau) = t_0 e^{\tau}[Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma)] + R\dot{z}(\tau - \sigma),\ \tau \geqslant 0. \tag{5}$$

Теорема. *Нулевое решение системы* (5) *экспоненциально устойчиво, если только выполнены неравенства* (2)—(4). *Отсюда нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Приведем краткую схему доказательства. Покажем вначале, что при выполнении неравенства (2) решение системы (5) допускает экспоненциальную оценку [2], т. е. справедливо неравенство

$$\|z(\tau)\| \leqslant Ke^{\beta_3\tau}\max\{\|\varphi_*(\theta)\|_1,\ \|\dot{\varphi}_*(\theta)\|_1\}, \tag{6}$$

где $K = \text{const}$, $K > 0$, $\beta_3 = \text{const}$, $\beta_3 > 0$, $\varphi_*(\tau) = \varphi(e^t)$,

$$\|\varphi_*(\theta)\|_1 = \sup_{-\sigma\leqslant\theta\leqslant 0}\|\varphi_*(\theta)\|,\ \|z(\tau)\| = \sum_{i=1}^{l}|z_i(\tau)|,$$

$z_i(\tau)$ — компоненты вектор-функции $z(\tau)$.

Для доказательства данной оценки заметим, что система (5) эквивалентна следующей системе с запаздыванием:

$$\dot{z}(\tau) = R^{m+1}\dot{\varphi}(\tau - (m+1)\sigma) + t_0e^{\tau}\mu^m R^m[Az(\tau - m\sigma) + B\varphi(\tau - (m+1)\sigma)] +$$
$$+ t_0e^{\tau}\mu^{m-1}R^{m-1}[Az(\tau - (m-1)\sigma) + Bz(\tau - m\sigma)] + \ldots + t_0e^{\tau}[Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma)], \tag{7}$$

где $R^i = R^{i-1}R$, $m\sigma < \tau \leqslant (m+1)\sigma$.

Записывая решение системы (7) в форме Коши [3] при $0 < \tau \leqslant \sigma$, учитывая неравенство (2), получаем оценку

$$\sup_{0<\tau\leqslant\sigma}\|z(\tau)\| \leqslant \left(C + \frac{Cb}{\beta_2}\right)\|\varphi_*(\theta)\|_1 + \frac{CR_1}{\beta_1 t_0}\|\dot{\varphi}_*(\theta)\|_1,$$

где $\|e^{A(t-s)}\| \leqslant Ce^{-\beta_1(t-s)}$, $C = \text{const}$, $C \geqslant 1$, $\|B\| \leqslant b$, $\|R\| \leqslant R_1$. Аналогичным образом, используя аппарат теории разностных уравнений [4], получаем при $m\sigma < \tau \leqslant (m+1)\sigma$ оценку

$$\sup_{m\sigma<\tau\leqslant(m+1)\sigma}\|z(\tau)\| \leqslant \left[R_1 + C + \frac{Cb + R_1Ca}{\beta_1}\right]^m\left[C + \frac{CR_1 + CR_1a}{\beta_1 t_0} +\right.$$
$$\left. + \frac{2Cb}{\beta_1}\right]\max\{\|\varphi_*(\theta)\|_1,\ \|\dot{\varphi}_*(\theta)\|_1\},$$

где $\|A\| \leqslant a$.

Полагая $\beta_3 = (1/\sigma)\ln(R_1 + C + (Cb + R_1Ca)/\beta_1)$, $K = C + 2CR_1/\beta_1 + (CR_1 + CR_1a)/(\beta_1 t_0)$, получаем оценку (6).

Поскольку для решения системы (5) справедлива экспоненциальная оценка (6), применим при исследовании вопроса об устойчивости нулевого решения данной системы метод преобразования Лапласа [2]. Умножим обе части системы (5) на $e^{-(p+1)\tau}$ и проинтегрируем по τ от нуля до $+\infty$. Обозначив

$$F(p) = \int_0^\infty z(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau,$$

методами, аналогичными изложенным в работе [5], получаем следующую функционально-разностную неоднородную систему:

$$[E - Re^{-\sigma(p+1)}]\, F(p+1) = \frac{t_0}{p+1}[A + Be^{-\sigma p}]\, F(p) + [E - Re^{-\sigma(p+1)}]\,\frac{z(0)}{p+1} +$$
$$+ \frac{t_0 e^{-\sigma p}}{p+1} B \int_{-\sigma}^{0} \varphi_*(s)\, e^{-ps}\, ds + \frac{e^{-\sigma(p+1)}}{p+1} R \int_{-\sigma}^{0} \dot{\varphi}_*(s)\, e^{-(p+1)s}\, ds. \tag{8}$$

Кроме того, при $r > \beta_3 + 2$ [5] справедливо асимптотическое представление

$$F(p) = \frac{z(0)}{p} + O\left(\frac{1}{|p|^2}\right), \tag{9}$$

r фиксированное, $q \to \pm\infty$, $r = \operatorname{Re} p$, $q = \operatorname{Im} p$. Покажем, что данное представление справедливо и при $-\varepsilon \leqslant r \leqslant \beta_3 + 2$. Пусть $r \geqslant \beta_3 + 1 + \varepsilon$. Сделаем замену

$$F(p+1) = \frac{z(0)}{p+1} + F_1(p+1). \tag{10}$$

Подставим данное выражение в систему (8) и умножим обе части вновь полученного равенства на $p+1$. Получим

$$(p+1)[E - Re^{-\sigma(p+1)}]\, F_1(p+1) = t_0[A + Be^{-\sigma p}]\, F_1(p) +$$
$$+ t_0[A + Be^{-\sigma p}]\,\frac{z(0)}{p} + t_0 e^{-\sigma p} B \int_{-\sigma}^{0} \varphi_*(s)\, e^{-ps}\, ds + e^{-\sigma(p+1)} R \int_{-\sigma}^{0} \dot{\varphi}_*(s)\, e^{-(p+1)s}\, ds. \tag{11}$$

Заметим, что подстановка (10) предполагает существование матрицы $[E - Re^{-\sigma(p+1)}]^{-1}$. Полагая $F_1(p) = F_1(p_0 - 1/2 + \eta)$, $F_1(p+1) = F_1(p_0 + 1/2 + \eta)$ $(|p_0 - 1/2 + \eta| \leqslant 1/2 + \varepsilon/2$, $|p_0 + 1/2 + \eta| \leqslant 1/2 + \varepsilon/2)$ и разлагая данные вектор-функции в ряд Тейлора по степеням $\eta \pm 1/2$ с центром разложения в точке p_0 (это можно сделать вследствие того, что правее абсциссы сходимости $F(p)$ является аналитической [6]), разлагая также в ряд Тейлора вектор-функции

$$E - Re^{-\sigma(p+1)},\quad A + Be^{-\sigma p},\quad \frac{t_0}{p}[A + Be^{-\sigma p}]\, z(0) +$$
$$+ t_0 e^{-\sigma p} B \int_{-\sigma}^{0} \varphi_*(s)\, e^{-ps}\, ds + e^{-\sigma(p+1)} R \int_{-\sigma}^{0} \dot{\varphi}_*(s)\, e^{-(p+1)s}\, ds,$$

приравнивая в равенстве (11) свободные члены, получим

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left\{[E - Re^{-\sigma(p_0+1/2)}] + (-1)^{j+1}\frac{t_0}{p_0 + 1/2}[A + Be^{-\sigma(p_0-1/2)}]\right\}\frac{1}{2^j j!} F_1^{(j)}(p_0) =$$
$$= t_0[A + Be^{-\sigma(p_0-1/2)}]\,\frac{z(0)}{p_0^2 - 1/4} + \frac{t_0 e^{-\sigma(p_0-1/2)}}{p_0 + 1/2} B \int_{-\sigma}^{0} \varphi_*(s)\, e^{-(p_0-1/2)s}\, ds +$$
$$+ \frac{e^{-\sigma(p_0+1/2)}}{p_0 + 1/2} R \int_{-\sigma}^{0} \dot{\varphi}_*(s)\, e^{-(p_0+1/2)s}\, ds. \tag{12}$$

Поскольку $\| F_1^{(j)}(p_0) \| \frac{1}{j \cdot 2^j} \to 0$ при $j \to \infty$ (так же, как и при фиксированном r_0, $r_0 > \beta_3$, $q \to \pm\infty$), из соотношения (12) получаем асимптотическое представление

$$F_1(p_0 + 1/2) = [E - Re^{-\sigma(p_0+1/2)}]^{-1} \left\{ t_0 [A + Be^{-\sigma(p_0-1/2)}] \frac{z(0)}{p_0^2 - 1/4} + \frac{t_0 e^{-\sigma(p_0-1/2)}}{p_0 + 1/2} B \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\sigma}^{0} \varphi_*(s) e^{-(p_0-1/2)s} ds + \frac{e^{-\sigma(p_0+1/2)}}{p_0 + 1/2} R \int_{-\sigma}^{0} \dot{\varphi}_*(s) e^{-(p_0+1/2)s} ds \right\} + O\left(\frac{1}{|p_0|^3}\right), \tag{13}$$

r_0 фиксированное, $r_0 \geqslant \beta_3 + 1/2 + \varepsilon$, $q \to \pm\infty$.

Но тогда асимптотическое представление (9) справедливо уже при $r \geqslant \beta_3 + 1$. Продолжая подобную процедуру по шагам, получим в конце концов, что уточненное асимптотическое представление (13) справедливо по крайней мере в области $r_0 \geqslant 1/2 - \varepsilon$, тогда асимптотическое представление (9) справедливо в области $r \geqslant -\varepsilon$.

Поскольку справедливо предельное равенство [2], [6]:

$$z(\tau) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_3 - i\omega}^{\beta_3 + i\omega} F(p) e^{p\tau} dp,$$

то, учитывая асимптотическое представление (9) и аналитичность вектор-функции $F(p)$, получаем предельное соотношение

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_3 - i\omega}^{\beta_3 + i\omega} F(p) e^{p\tau} dp = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - i\omega}^{-\varepsilon + i\omega} F(p) e^{p\tau} dp = O(e^{-\varepsilon\tau}) [\| \varphi_*(s) \|_1 + \| \dot{\varphi}_*(s) \|_1], \quad -\sigma \leqslant s \leqslant 0,$$

отсюда и следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М.: Наука, 1971.— 296 с.

2. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.— 548 с.

3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.— 576 с.

4. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум.— М.: Мир, 1971.— 310 с.

5. Гребенщиков Б. Г. Устойчивость систем с переменным запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания.— Свердловск, 1983.— С. 25—34.

6. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1967.— 304 с.

г. Первоуральск

Поступили
полный текст 11.07.1988
краткое сообщение 30.08.1989

Г. П. Емгушева, В. А. Ногин

УДК 517.983

О СХОДИМОСТИ В $L_p(R^n)$ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С НЕСТАНДАРТНЫМ УРЕЗАНИЕМ

Гиперсингулярные интегралы (г. с. и.) вида

$$(D_\Omega^\alpha f)(x) = \int_{R^n} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}} \Omega(t) dt, \quad \alpha > 0, \; l > \alpha, \tag{1}$$

где $(\Delta_t^l f)(x)$ — конечная разность функции $f(x)$ с центром в точке x и шагом t (центрированная или нецентрированная), нашли применение при решении интегральных уравнений первого рода с ядрами типа потенциала (см. книги [1], [2] и имеющуюся там библиографию).