В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов, Оценка точности аппроксимациив предельной теореме Б. А. Севастьянова и ее применение в задаче о случайных включениях,
Дискрет. матем., 2014, том 26, выпуск 1, 75–84

Дискретная математика

том 26 выпуск 1 * 2014

УДК 519.21 DOI 10.4213/dm1268

Оценка точности аппроксимации в предельной теореме Б. А. Севастьянова и ее применение в задаче о случайных включениях

© 2014 г. В. А. Копытцев[1], В. Г. Михайлов[2]

Получена оценка точности пуассоновской аппроксимации в известной теореме Б. А. Севастьянова об условиях сходимости распределения суммы случайных индикаторов к распределению Пуассона. Этот результат применяется для оценки скорости сходимости к предельному пуассоновскому распределению в одной из теорем для числа решений систем случайных включений.

Ключевые слова: суммы случайных индикаторов, пуассоновская аппроксимация, системы случайных включений над конечным полем.

1. Введение

Теорема Б. А. Севастьянова о достаточных условиях сходимости распределения суммы зависимых случайных индикаторов к распределению Пуассона была опубликована им в работе [1] и имеет следующий вид.

Пусть $W = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ — сумма зависимых индикаторов, совместное распределение которых зависит от n как от параметра. Введем обозначения

$$p_{i_1,\ldots,i_r} = \mathbf{P}\{\xi_{i_1} = \ldots = \xi_{i_r} = 1\}, \quad \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} p_i, \quad p = \max_i p_i.$$

При каждом $n = 2, 3, \ldots$ и каждом $k = 2, 3 \ldots$ рассмотрим множество $J_k(n) = \{(i_1, \ldots, i_r) : \ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n\}$ и выделим в нем некоторое подмножество $I_k(n)$, называемое исключительным множеством. Введем обозначения

$$A^{(k)} = \sum_{I_k(n)} p_{i_1} \ldots p_{i_k}, \quad B^{(k)} = \sum_{I_k(n)} p_{i_1,\ldots,i_k},$$

$$D^{(k)} = \max_{(i_1,\ldots,i_k) \in J_k(n) \setminus I_k(n)} \left| \frac{p_{i_1,\ldots,i_k}}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}} - 1 \right|.$$

[1] Место работы: Академия криптографии Российской Федерации
e-mail: kopytcev2012@mail.ru
[2] Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
e-mail: mikhail@mi.ras.ru

Теорема Севастьянова. *Пусть $n \to \infty$, $\lambda_n \to \lambda \in (0, \infty)$, $p \to 0$ и $A^{(k)} + B^{(k)} + D^{(k)} \to 0$ при всех $k = 2, 3 \ldots$. Тогда распределение случайной величины W при $n \to \infty$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ.*

Эта теорема дает простой рецепт доказательства предельной теоремы Пуассона с помощью метода моментов. С ее помощью удалось описать условия пуассоновской сходимости в целом ряде задач вероятностной комбинаторики, в том числе, для числа μ_r ячеек, содержащих по r частиц каждая, в различных схемах случайных размещений (см., например, [2], [3]), для числа повторений длинных цепочек в последовательности независимых испытаний ([4],[5]), для числа пар эквивалентных цепочек ([6], [7]), для статистик критериев проверки качества псевдослучайных чисел ([8], [9]) и т. д. В работах [10], [11], [12] были предложены обобщенные версии теоремы Севастьянова для совместных распределений сумм случайных индикаторов, также нашедшие свое применение в задачах вероятностной комбинаторики.

С появлением известного метода Чена – Стейна для оценивания точности пуассоновской аппроксимации интерес к теореме Севастьянова значительно ослабел. Оказалось, что в большинстве случаев, когда применимы оба метода, использовать метод Чена – Стейна проще. Кроме того, он позволяет получить явные оценки точности аппроксимации сопровождающим пуассоновским распределением.

Тем не менее, имеется круг задач, в котором метод Чена – Стейна пока применить успешно не удалось. Это задачи о числе таких решений систем случайных линейных или полиномиальных уравнений над конечным полем, которые удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям. Такие задачи впервые были систематически рассмотрены в работах [13] и [14]. Немного позже эта тематика расширилась за счет систем случайных включений ([15] – [18]). Все основные результаты этих работ доказаны с помощью обычной и обобщенной версий теоремы Севастьянова.

В настоящей работе мы выводим оценку точности пуассоновской аппроксимации в теореме Севастьянова (раздел 2) и применяем ее при оценке скорости сходимости к предельному пуассоновскому распределению в одной из теорем для числа решений систем случайных полиномиальных включений (раздел 3).

Заметим, что попытка построения оценки точности пуассоновской аппроксимации в теореме Севастьянова уже предпринималась ранее в работе [19], но она осталась не до конца реализованной.

2. Оценка точности в предельной теореме Севастьянова

Пусть F_W и F_Y — функции распределения случайных величин W и Y, Po_λ — функция распределения Пуассона с параметром λ, а

$$d(F_W, F_Y) = \sup_x |F_W(x) - F_Y(x)|.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия теоремы Севастьянова. Тогда при любом натуральном числе K, $13\lambda_n + 1 \leqslant K < \lambda_n p^{-1}$, и достаточно большом n*

$$d(F_W, \mathrm{Po}_\lambda) \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right\} |\lambda_n - \lambda| + p + 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} +$$
$$+ \frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1 \leqslant k \leqslant K} \frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k)}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})}. \qquad (1)$$

Доказательство. Мы используем подход, описанный в параграфе 3 работы [19], лемму 3 из работы [20] и свойства распределений, описанные в теореме 1.C и замечании 1.1.4 книги [21].

Начнем с построения оценки расстояния между распределением случайной величины W и сопровождающим пуассоновским распределением с параметром λ_n. Рассмотрим случайную величину $V = \zeta_1 + \ldots + \zeta_n$, где $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — независимые случайные индикаторы и $\mathbf{P}\{\zeta_i = 1\} = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Из определений следует, что

$$\mathbf{E}C_W^k = \sum_{J_k(n)} p_{i_1,\ldots,i_k} = B^{(k)} + \sum_{J_k(n)\setminus I_k(n)} p_{i_1,\ldots,i_k},$$

$$\mathbf{E}C_V^k = \sum_{J_k(n)} p_{i_1}\ldots p_{i_k} = A^{(k)} + \sum_{J_k(n)\setminus I_k(n)} p_{i_1}\ldots p_{i_k}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}C_W^k - \mathbf{E}C_V^k = B^{(k)} - A^{(k)} + \sum_{J_k(n)\setminus I_k(n)} (p_{i_1,\ldots,i_k} - p_{i_1}\ldots p_{i_k}).$$

Из определения величины $D^{(k)}$ и этого равенства следует, что

$$\left|\mathbf{E}C_W^k - \mathbf{E}C_V^k\right| \leqslant |A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k. \tag{2}$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{E}C_V^k = \frac{1}{k!}\left(\lambda_n^k - \sum_{|\{i_1,\ldots,i_k\}|<k} p_1\ldots p_k\right) \geqslant \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1 - \frac{kp}{\lambda_n}\right). \tag{3}$$

При условии $\lambda_n > kp$ из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\left|\frac{\mathbf{E}C_W^k}{\mathbf{E}C_V^k} - 1\right| \leqslant \frac{k!}{\lambda_n^k}\cdot\frac{|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k}{1 - kp\lambda_n^{-1}}. \tag{4}$$

Согласно лемме 3 работы Зубкова [20] (см. также [19])

$$d(F_W, F_V) \leqslant \frac{\varepsilon(1 + [H\lambda_n])e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} + 2e^{-(H+1)\lambda_n/4}, \tag{5}$$

где $H \geqslant 13$,

$$\varepsilon(T) = \max_{1\leqslant k\leqslant T}\left|\frac{\mathbf{E}C_W^k}{\mathbf{E}C_V^k} - 1\right|. \tag{6}$$

Из формул (4) – (6) следует неравенство

$$d(F_W, F_V) \leqslant 2e^{-(H+1)\lambda_n/4} +$$

$$+\frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}}\max_{1\leqslant k\leqslant 1+[H\lambda_n]}\frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k)}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})},$$

где $13 \leqslant H < p^{-1} - \lambda_n^{-1}$. Нам удобно задать натуральное число K и взять $H = (K-1)\lambda_n^{-1}$. Тогда эта оценка запишется в следующем виде:

$$d(F_W, F_V) \leqslant 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} +$$

$$+\frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1\leqslant k\leqslant K} \frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k)}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})}, \tag{7}$$

где

$$13\lambda_n + 1 \leqslant K < \lambda_n p^{-1}. \tag{8}$$

Используем обозначение $\rho(F, G)$ для расстояния по вариации между распределениями, определяемыми функциями F и G. Согласно оценке метода Чена – Стейна (см. формулу (1.1.23) в [21])

$$\rho(F_V, \mathrm{Po}_{\lambda_n}) \leqslant \frac{1 - e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Так как $d(F, G) \leqslant \rho(F, G)$, $\sum_{i=1}^n p_i^2 \leqslant \lambda_n p$, то из этой оценки следует неравенство

$$d(F_V, \mathrm{Po}_{\lambda_n}) \leqslant p. \tag{9}$$

Из (7), (9) и неравенства треугольника получаем оценку расстояния до сопровождающего пуассоновского распределения (при условии (8)):

$$d(F_W, \mathrm{Po}_{\lambda_n}) \leqslant p + 2e^{-(K-1+\lambda_n)/4} +$$

$$+\frac{e^{2\lambda_n}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_n - 1\}}} \max_{1\leqslant k\leqslant K} \frac{k!(|A^{(k)} - B^{(k)}| + D^{(k)}\lambda_n^k)}{\lambda_n^k(1 - kp\lambda_n^{-1})}. \tag{10}$$

Воспользуемся теперь теоремой 1.C и замечанием 1.1.4 книги [21], из которых следует, что

$$d(\mathrm{Po}_{\lambda_n}, \mathrm{Po}_{\lambda}) \leqslant \rho(\mathrm{Po}_{\lambda_n}, \mathrm{Po}_{\lambda}) \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right\} |\lambda_n - \lambda|. \tag{11}$$

Из (10) и (11) (при условии (8)) получаем (1). Теорема 1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости в предельной теореме для числа решений системы случайных включений

Пусть $\xi(D, A + S, B)$ — число решений системы включений

$$x \in D, \quad Ax + S(x) \in B, \tag{12}$$

где A — случайная матрица из элементов поля $K = GF(q)$ размера $T \times n$, $D \subseteq V^n$ и $B \subset V^T$ — некоторые множества n-мерных и T-мерных векторов над этим полем, $S(x)$ — произвольное отображение V^n в V^T.

Исследованию условий сходимости при $n, T \to \infty$ распределения случайной величины $\xi(D, A+S, B)$ к распределениям пуассоновского типа были посвящены работы [15-18]. Как и в них, будем предполагать, что элементы случайной матрицы $A = (a_{t,j})$ независимы в совокупности и

$$\mathbf{P}\{a_{i,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{i,j}(k)}{2}, \quad k \in K,$$

где $K = GF(q)$, $\sum_{k \in K} \Delta_{i,j}(k) = 0$, $i = 1, \ldots, T$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть

$$\Delta = \max_{i,j,k} |\Delta_{i,j}(k)| < 1. \tag{13}$$

Обозначим через $N(k_1, k_2, k_3, c, D)$ число решений уравнения

$$k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3 = c$$

относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in D^3$, где $k_1, k_2, k_3 \in K \backslash \{0\}$, $c \in V^n$. Пусть

$$N(D) = \max_{k_1, k_2, k_3, c} N(k_1, k_2, k_3, c, D),$$

$$\rho(D) = N(D)/|D|^2. \tag{14}$$

Аналогично определим величину $\rho(B)$.

В [18] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $K = GF(q)$, множество D не содержит подобных векторов, отображение $S(x)$ не зависит от матрицы A, распределение элементов матрицы A удовлетворяет условию* (13), $0^n \notin D$, *и при $n, T \to \infty$ выполнены соотношения*

$$|D| \to \infty, \quad T\Delta \to 0, \quad \rho(D)\rho(B) \to 0, \quad q^{-T}|D||B| \to \lambda \in (0, \infty). \tag{15}$$

Тогда $F_{\xi(D,A+S,B)} \to \mathrm{Po}_\lambda$, причем эта сходимость равномерна относительно отображения $S(x)$.

Наша цель — оценить скорость сходимости в этой теореме.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при любом* $0 < \delta < 1$ *имеет место оценка*

$$\sup_x |F_{\xi(D,A+S,B)}(x) - \mathrm{Po}_\lambda(x)| =$$

$$= O\left(|\mathbf{E}\xi(D, A+S, B) - \lambda| + \left(\frac{1}{|D|}\right)^{(1-\delta)/(4\ln q + 1)} + \right.$$

$$\left. + (\rho(D)\rho(B))^{(1-\delta)/(1 + 4\ln\max\{1, \lambda_*^{-1}\})} + \exp\left\{\frac{(1-\delta)\ln(\Delta T)}{4\ln|\ln(\Delta T)|}\right\}\right). \tag{16}$$

Если $\Delta = 0$, то последнее слагаемое в правой части оценки (16) *отсутствует.*

Перейдем к доказательству теоремы 3, используя для этого теорему 1. Вместо λ_n используем обозначение $\lambda_{n,T}$. Согласно нашим определениям

$$\lambda_{n,T} = \sum_{x \in D,\ b \in B} \mathbf{P}\{Ax = b\}, \quad p = \max_{x \in D,\ b \in B} \mathbf{P}\{Ax = b\}, \tag{17}$$

$$A^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{(v^1,\dots,v^k)\in I_k} \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}\left\{Ax^j = b^j\right\}, \tag{18}$$

$$B^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{(v^1,\dots,v^k)\in I_k} \mathbf{P}\left\{Ax^1 = b^1, ..., Ax^k = b^k\right\}, \tag{19}$$

$$D^{(k)} = \max_{(v^1,\dots,v^r k)\in \bar{J}_k \setminus I_k} \left| \frac{\mathbf{P}\left\{Ax^1 = b^1, ..., Ax^k = b^k\right\}}{\mathbf{P}\left\{Ax^1 = b^1\right\} \cdot ... \cdot \mathbf{P}\left\{Ax^k = b^k\right\}} - 1 \right|. \tag{20}$$

Кроме этого, положим $\lambda_* = |D||B|q^{-T}$.

Согласно лемме 1 из [18]

$$\left(\frac{1-\Delta}{q}\right)^T \leqslant p \leqslant \left(\frac{1+\Delta}{q}\right)^T, \quad \lambda_* \left(1-\Delta\right)^T \leqslant \lambda_{n,T} \leqslant \lambda_* \left(1+\Delta\right)^T.$$

Поэтому в предположениях теоремы 3

$$p = q^{-T}(1+o(1)), \quad \lambda_{n,T} = \lambda_*(1+o(1)). \tag{21}$$

Выражение в правой части (18) оценим с помощью оценки (2.13) из [18]. Применительно к теореме 3, когда $\tilde{J} = J = D \times B$ и $C(n) = 1$, равенство (18) и оценка (2.13) из [18] дают следующее:

$$\frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} A^{(k)} \leqslant \left(\frac{\lambda_*(1+\Delta)^T}{\lambda_{n,T}}\right)^k \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j q^{j(k-j)} |D|^{j-k} <$$

$$< L_A^k \left(\left(1 + \frac{q^k}{|D|}\right)^k - 1 \right) \tag{22}$$

при некотором $0 < L_A < \infty$, причем $L_A = 1 + o(1)$.

Аналогичным образом с помощью соответствующей оценки из [18] для суммы совместных вероятностей в (19) получаем неравенство

$$\frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} B^{(k)} \leqslant \frac{\rho(D)\rho(B)}{\lambda_{n,T}^k} \sum_{j=2}^{k-1} (1+\Delta)^{jT} \lambda_*^j,$$

что в условиях теоремы 3 [18] влечет при достаточно больших n и T соотношение

$$\frac{k!}{\lambda_{n,T}^k} B^{(k)} \leqslant k L_B^k \rho(D)\rho(B), \tag{23}$$

где $L_B = \max\{1, \lambda_*^{-1}\}(1 + o(1))$.

Наконец, используя лемму 1 работы [18], из (20) получаем в условиях теоремы 3 соотношения

$$k! D^{(k)} \leqslant k! \left(\frac{(1+\Delta)^{kT}}{(1-\Delta)^{kT}} - 1\right) = 2k! k \Delta T (1 + o(1)). \tag{24}$$

Ради упрощения вида оценок наложим на выбор параметра K в (1) дополнительное ограничение

$$K < \frac{\lambda_n}{2p}. \tag{25}$$

Тогда
$$1 - kp\lambda_n^{-1} \geqslant \frac{1}{2} \tag{26}$$
при всех $k \leqslant K$.

Теперь, заменив в (1) λ_n на $\lambda_{n,T}$, а $|A^{(k)} - B^{(k)}|$ на $A^{(k)} + B^{(k)}$ и подставив в полученное более грубое неравенство оценки (21) – (24) и (26), получим:
$$d(F_{\xi(D,A+S,B)}, \mathrm{Po}_\lambda) \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right\} |\lambda_{n,T} - \lambda| + p + 2e^{-(K-1+\lambda_{n,T})/4} +$$
$$+ \frac{e^{2\lambda_{n,T}}}{\sqrt{\max\{1, \lambda_{n,T} - 1\}}} \max_{1\leqslant k\leqslant K} \frac{k!(A^{(k)} + B^{(k)} + D^{(k)}\lambda_{n,T}^k)}{\lambda_{n,T}^k(1 - kp\lambda_{n,T}^{-1})} <$$
$$< \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right\} |\lambda_{n,T} - \lambda| + 2q^{-T} + 2e^{-(K-1+\lambda_{n,T})/4} +$$
$$+2e^{2\lambda_{n,T}} \max_{1\leqslant k\leqslant K} \left(\frac{k!}{\lambda_{n,T}^k}(A^{(k)} + B^{(k)}) + k!D^{(k)}\right) <$$
$$< \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right\} |\lambda_{n,T} - \lambda| + 2q^{-T} +$$
$$+2e^{2\lambda_{n,T}}(M_1(K_1) + M_2(K_2) + M_3(K_3)), \tag{27}$$
при достаточно больших n, T, где
$$M_1(K_1) = \max_{1\leqslant k\leqslant K_1} \frac{k!A^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k} + e^{-(K_1-1+\lambda_{n,T})/4}, \tag{28}$$
$$M_2(K_2) = \max_{1\leqslant k\leqslant K_2} \frac{k!B^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k} + e^{-(K_2-1+\lambda_{n,T})/4}, \tag{29}$$
$$M_3(K_3) = \max_{1\leqslant k\leqslant K_3} k!D^{(k)} + e^{-(K_3-1+\lambda_{n,T})/4}, \tag{30}$$
а $K = \min\{K_1, K_2, K_3\}$. Здесь (см. (2.8) и (3.14))
$$13\lambda_{n,T} + 1 \leqslant K_i < \frac{\lambda_{n,T}}{2p}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{31}$$
В случае $\Delta = 0$ полагаем $M_3(H_3) = 0$.

Подставим в (28) оценку (22) и загрубим результат. Считая, что отношение $K_1 q^{K_1}/|D|$ достаточно мало, получим:
$$M_1(K_1) < L_A^{K_1}\left(\left(1 + \frac{q^{K_1}}{|D|}\right)^{K_1} - 1\right) + e^{-(K_1-1+\lambda_{n,T})/4} <$$
$$< \frac{2K_1 L_A^{K_1}}{|D|} q^{K_1} + e^{-(K_1-1+\lambda_{n,T})/4}. \tag{32}$$

Возьмем
$$K_1 = \left[\frac{\ln|D|}{\ln(L_A q)} \frac{4\ln q}{4\ln q + 1}\right],$$

и получим, что первое слагаемое в правой части (32) имеет порядок

$$O\left(\frac{\ln|D|}{|D|^{1/(4\ln q+1)}}\right) = O\left(\ln|D|\exp\left\{-\frac{\ln|D|}{4\ln q+1}\right\}\right),$$

а второе слагаемое имеет порядок

$$O\left(\exp\left\{-\frac{\ln|D|}{\ln(L_A q)}\frac{\ln q}{4\ln q+1}\right\}\right) = O\left(\exp\left\{-\frac{\ln|D|}{4\ln q+1}\frac{\ln q}{\ln(L_A q)}\right\}\right).$$

С учетом соотношения $L_A = 1 + o(1)$ из этих оценок получаем, что при любом $0 < \delta < 1$

$$M_1(K_1) = O\left(\left(\frac{1}{|D|}\right)^{(1-\delta)/(4\ln q+1)}\right). \tag{33}$$

Оценим $M_2(K_2)$. Возьмем

$$K_2 = \left[-\frac{4\ln(\rho(D)\rho(B))}{1+4\ln L_B}\right].$$

Тогда в силу (23)

$$\max_{1\leqslant k\leqslant K_2}\frac{k!B^{(k)}}{\lambda_{n,T}^k} \leqslant K_2 L_B^{K_2}\rho(D)\rho(B) =$$

$$= O\left(|\ln(\rho(D)\rho(B))|\exp\left\{-\frac{4\ln L_B\ln(\rho(D)\rho(B))}{1+4\ln L_B}\right\}\rho(D)\rho(B)\right) =$$

$$= O\left(|\ln(\rho(D)\rho(B))|\exp\left\{\frac{\ln(\rho(D)\rho(B))}{1+4\ln L_B}\right\}\right) =$$

$$= O\left(|\ln(\rho(D)\rho(B))|(\rho(D)\rho(B))^{1/(1+4\ln L_B)}\right).$$

В свою очередь,

$$e^{-(K_2-1+\lambda_{n,T})/4} = O\left(e^{-K_2/4}\right) = O\left((\rho(D)\rho(B))^{1/(1+4\ln L_B)}\right).$$

Поэтому с учетом соотношения $L_B = \max\{1, \lambda_*^{-1}\}(1+o(1))$ получаем оценку

$$M_2(K_2) = O\left((\rho(D)\rho(B))^{(1-\delta)/(1+4\ln\max\{1,\lambda_*^{-1}\})}\right) \tag{34}$$

при любом $0 < \delta < 1$.

Наконец, возьмем произвольное $0 < \delta < 1$ и положим

$$K_3 = \left[(\delta-1)\frac{\ln(\Delta T)}{\ln|\ln(\Delta T)|}\right] = O(\ln(\Delta T)).$$

Получим

$$\max_{1\leqslant k\leqslant K_3} k!D^{(k)} = O\left(|\ln(\Delta T)|\exp\{K_3(\ln K_3 - 1) + O(\ln K_3)\}\Delta T\right) =$$

$$= O\left(\exp\{K_3\ln K_3\}\cdot\Delta T\right) = O\left(\exp\{\delta\ln(\Delta T)\}\right).$$

Кроме этого,

$$e^{-(K_3-1+\lambda_{n,T})/4} = O\left(e^{-K_3/4}\right) = O\left(\exp\left\{\frac{(1-\delta)\ln(\Delta T)}{4\ln|\ln(\Delta T)|}\right\}\right).$$

Значит,

$$M_3(K_3) = O\left(\exp\left\{\frac{(1-\delta)\ln(\Delta T)}{4\ln|\ln(\Delta T)|}\right\}\right). \tag{35}$$

Заметим, что при переходе к пределу значения H_1, H_2, H_3 стремятся к бесконечности. Поэтому условие $H = \min\{H_1, H_2, H_3\} \geqslant 13$, начиная с некоторого момента, выполнено.

Оценим остальные слагаемые в правой части неравенства (35).

Заметим, что $\lambda_{n,T} = \mathbf{E}\xi(D, A+S, B)$, а в силу условия $q^{-T}|D||B| \to \lambda \in (0, \infty)$ имеем

$$q^{-T} = O\left(\frac{1}{|D|}\right).$$

Из этих соотношений, (33) – (35) и (27) следует оценка (16). Теорема 3 доказана.

Авторы признательны А. М. Зубкову за полезные замечания.

Список литературы

1. Севастьянов Б.А., Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. *Теория вероятн. и ее применен.* (1972) **17**, №4, 733–738.
2. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., *Случайные размещения.* Наука, Москва, 1976.
3. Михайлов В.Г., Предельная теорема Пуассона в схеме размещения частиц комплектами. *Теория вероятн. и ее примен.* (1977) **22**, №1, 155–159.
4. Зубков А. М., Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятн. и ее примен.* (1974) **19**, №1, 173–181.
5. Михайлов В.Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с многократными длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятн. и ее примен.* (1974) **19**, №1, 182–187.
6. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний. *Дискретная математика* (1999) **11**, №2, 53–75.
7. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок, образующих латинский прямоугольник. *Дискретная математика* (2000) **12**, №1, 21–46.
8. Клыкова Н.В., Предельное распределение числа совпадающих промежутков. *Теория вероятн. и ее примен.* (2002) **47**, №1, 147–152.
9. Круглов В.И., Предельные распределения числа наборов, удовлетворяющих линейному соотношению. *Дискретная математика* (2008) **20**, №4, 120–135.
10. Михайлов В. Г., *Некоторые предельные теоремы для сумм зависимых случайных величин*, Дисс. на соиск. уч. ст-ни канд. физ.-матем. наук, Москва, МИАН, 1974.
11. Михайлов В.Г., О предельной теореме Б.А.Севастьянова для сумм зависимых случайных индикаторов. *Обозр. прикл. и промышл. матем.* (2003) **10**, №3, 571–578.
12. Гаас В.В., Пуассоновские предельные совместные распределения в схеме случайного размещения частиц двух типов. *Теория вероятн. и ее примен.* (2007) **52**, №2, 351–358.

13. Копытцев В.А., О числе решений систем линейных булевых уравнений в множестве векторов, обладающих заданным числом единиц. *Дискретная математика* (2002) **14**, №4, 87–109.

14. Копытцев В.А., О числе решений системы случайных линейных уравнений. *Дискретная математика* (2006) **18**, №1, 40–62.

15. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения. *Дискретная математика* (2010) **22**, №2, 3–21.

16. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., Теоремы пуассоновского типа для числа решений случайных включений. *Математические вопросы криптографии* (2010) **1**, №4, 63–84.

17. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., О распределении чисел решений случайных включений. *Математические вопросы криптографии* (2011) **2**, №2, 55–80.

18. Копытцев В.А., Михайлов В.Г., Предельные теоремы пуассоновского типа для обобщенного линейного включения. *Дискретная математика* (2012) **24**, №3, 108–121.

19. Михайлов В.Г., Явные оценки в предельных теоремах для сумм индикаторов. *Обозр. прикл. и промышл. матем.* (1994) **1**, №4, 580–617.

20. Зубков А.М., Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения. *Матем. сб.* (1979) **109(151)**, №4(8), 491–532.

21. Barbour A.D., Holst L., Janson S., Poisson Approximation (1992).

Статья поступила 01.10.2013.