В. В. Чичагов, О вероятностях попадания на параллельные прямые с натуральным коэффициентом наклона,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 777–783

https://www.mathnet.ru/mzm5591

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

О ВЕРОЯТНОСТЯХ ПОПАДАНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ С НАТУРАЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ НАКЛОНА

В. В. Чичагов

Задача вычисления вероятностей попадания на параллельные прямые возникает в последовательном анализе [1]. Полное ее решение имеется лишь для коэффициента наклона прямых, равного единице. Этот случай более известен в литературе (см., например, [2]) как задача о нахождении вероятностей разорения игроков, обладающих ограниченными капиталами. Ниже будет приведено решение указанной задачи для произвольного натурального коэффициента наклона прямых.

Пусть наблюдается биномиальное случайное блуждание [3] на плоскости с декартовой системой координат XOY по точкам с целочисленными неотрицательными координатами (x, y) из начала координат 0. За один шаг по времени блуждание перемещается на единицу с вероятностью $p \in (0, 1)$ в направлении оси $0X$ или с вероятностью $q = 1 - p$ в направлении оси $0Y$. При достижении или пересечении одной из двух прямых y_0, y_1, определяемых соответственно уравнениями $y = kx + b_1$, $y = k(x - b_2)$, где величины k, b_1, kb_2 — натуральные числа, блуждание прекращается. При $k \neq 1$ остановка блуждания помимо прямых y_0, y_1 может произойти также на одной из прямых $y_2, y_3, \ldots, y_k$, определяемых соответственно уравнениями $y = k(x - b_2) - 1$, $y = k(x - b_2) - 2, \ldots, y = k(x - b_2) - k + 1$. Необходимо вычислить $V_0, V_1, \ldots, V_k$ — вероятности попадания блуждания на прямые $y_0, y_1, \ldots, y_k$ в предположении, что

$n = b_1 + kb_2 - 1 > k$. Случай $n \leqslant k$ практического интереса не представляет.

Через каждую из точек, обладающих целочисленными неотрицательными координатами и лежащих между прямыми y_0 и y_1, проведем прямую с коэффициентом наклона k. Различных таких прямых окажется ровно $n = b_1 + kb_2 - 1$ штук, определяются они уравнениями $y = kx + b_1 - 1$, $y = kx + b_1 - 2, \ldots, y = kx + b_1 - n$. Обозначим прямые соответственно $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{k+n}$.

Теперь рассматриваемый случайный процесс опишем посредством однородной поглощающей цепи Маркова с $t = n + k + 1$ состояниями — прямыми y_0, y_{k+1}, $y_{k+2}, \ldots, y_{k+n}, y_1, y_2, \ldots, y_k$; переходной матрицей $P = \| p_{i,j} \|_1^t$ с элементами $p_{i,j}$ — вероятностями перехода за один шаг с прямой, определяемой уравнением $y = kx + b_1 - i + 1$, на прямую, определяемую уравнением $y = kx + b_1 - j + 1$, и начальным состоянием — прямой, задаваемой уравнением $y = kx$. Укажем ненулевые элементы матрицы:

$$p_{i,\, i-1} = q, \quad p_{i,\, i+k} = p \; (i = \overline{2, n+1}),$$
$$p_{1,1} = 1, \quad p_{i,\, i} = 1 \; (i = \overline{n+2, t}).$$

Согласно теории однородных цепей Маркова [4, гл. III, § 3.3] вектор-строку $V = (V_0, V_1, \ldots, V_k)$ найдем по формуле

$$V = \pi \, (I - Q)^{-1} R. \tag{1}$$

Здесь $(I - Q)^{-1}$ — фундаментальная матрица описанной цепи Маркова; $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ — вектор начальных вероятностей, единственный ненулевой элемент которого $\pi_{b_1} = 1$; R — матрица вероятностей попадания в поглощающие состояния

$$R = \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{2,\, n+2} & p_{2,\, n+3} & \ldots & p_{2,\, t} \\ p_{3,1} & p_{3,\, n+2} & p_{3,\, n+3} & \ldots & p_{3,\, t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n+1,\, 1} & p_{n+1,\, n+2} & p_{n+1,\, n+3} & \ldots & p_{n+1,\, t} \end{pmatrix}.$$

Ставя целью вычислить компоненты вектора (1), сформулируем вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Для любого натурального числа l значение определителя B_l матрицы $\| b_{i,j} \|_1^l$, ненулевые элементы* *которой*

$$b_{i,i}=1\ (i=\overline{1,l}),\quad b_{i,i-1}=-q\quad (i=\overline{2,l}),$$

$b_{i,i+k}=-p\ (i=\overline{1,l-k})$, *определяется выражением*

$$B_l=\sum_{i=0}^{[l/(k+1)]}(-\varkappa)^i\binom{l-ki}{i},\tag{2}$$

где $[l/(k+1)]$ — *целая часть числа* $l/(k+1)$, $\varkappa=pq^k$.

Доказательство. Разложением по 1-й строке определителя B_l получим соотношение

$$B_l=\begin{cases}B_{l-1}-\varkappa B_{l-(k+1)}, & \text{если}\quad l>k+1,\\ 1-\varkappa, & \text{если}\quad l=k+1,\\ 1, & \text{если}\quad l<k+1,\end{cases}$$

из которого видно, что для $l\leqslant k+1$ утверждение леммы верно. Для завершения доказательства воспользуемся методом математической индукции. Пусть лемма справедлива для $l=m-1$. Покажем, что формула (2) имеет место и для $l=m$. Действительно, проделав преобразования

$$B_m=B_{m-1}-\varkappa B_{m-(k+1)}=\sum_{i=0}^{[m/(k+1)]}(-\varkappa)^i\binom{m-1-ki}{i}+$$
$$+\sum_{i=0}^{[m/(k+1)-1]}(-\varkappa)^{i+1}\binom{m-k-1-ki}{i}=$$
$$=1+\sum_{i=1}^{[m/(k+1)]}(-\varkappa)^i\left\{\binom{m-ki-1}{i}+\binom{m-ki-1}{i-1}\right\}=$$
$$=\sum_{i=0}^{[m/(k+1)]}(-\varkappa)^i\binom{m-ki}{i}$$

при $m\neq(k+1)[m/(k+1)]$,

$$B_m=B_{m-1}-\varkappa B_{m-(k+1)}=$$
$$=\sum_{i=0}^{[m/(k+1)]-1}\left\{(-\varkappa)^i\binom{m-ki-1}{i}+(-\varkappa)^{i+1}\binom{m-k-1-ki}{i}\right\}=$$
$$=1+\sum_{i=1}^{[m/(k+1)]-1}(-\varkappa)^i\left\{\binom{m-ki-1}{i}+\binom{m-ki-1}{i-1}\right\}+$$
$$+(-\varkappa)^{[m/(k+1)]}=\sum_{i=0}^{[m/(k+1)]}(-\varkappa)^i\binom{m-ki}{i}$$

при $m = (k+1)[m/(k+1)]$, получим требуемый результат.

ЛЕММА 2. *Для любого натурального числа* $l > k$ *значение* $B_l(r)$, $1 \leqslant r \leqslant k$ — *определителя, получаемого из* B_l *путем замены в* r*-м столбце элемента* 1*-й строки величиной, равной* q, *а элементов других строк столбца нулями, определяется выражением*

$$B_l(r) = \begin{cases} q^r B_{l-r} & \text{при} \quad r \leqslant l-1, \\ q^l & \text{при} \quad r = l. \end{cases}$$

ЛЕММА 3. *Для любого натурального числа* $l > k$ *значение* $C_l(r)$, $1 \leqslant r \leqslant k$ — *определителя, получаемого из* B_l *путем замены в* $(l - r + 1)$*-м столбце элемента* $(l - k + 1)$*-й строки величиной, равной* p, *а элементов других строк столбца нулями, определяется выражением*

$$C_l(r) = pq^{k-r}B_{l-k}.$$

Доказательство лемм 2 и 3 основано на том факте, что совокупности $B_n(r)$, $r = \overline{1, n}$ и $C_n(r)$, $r = \overline{1, n}$ представляют собой решения систем линейных уравнений с матрицей $(I - Q)$, правые части которых — соответственно первый и второй столбцы матрицы R.

ТЕОРЕМА. *Вероятности попадания на параллельные прямые* $y_0, y_1, \ldots, y_k$, *определяющие границу остановки биномиального блуждания, вычисляются по формулам*

$$V_0 = \frac{q^{b_1} B_{kb_2-1}}{B_{b_1+kb_2-1}}, \tag{3}$$

$$V_s = \frac{\varkappa}{q^{kb_2+s-1}} \left\{ \frac{B_{kb_2-1}}{B_{b_1+kb_2-1}} \cdot B_{b_1+kb_2+s-k-2} - B_{kb_2+s-k-2} \right\}, \quad s = \overline{1, k}, \tag{4}$$

где $B_0 \equiv 1$, $B_l \equiv 0$ *для любого* $l < 0$.

Доказательство. Формула (3) следует из соотношения (1), леммы 2 и правила Крамера. Для доказательства формулы (4) обозначим через Z_j, $j = \overline{1, k}$, вероятность остановки биномиального блуждания на прямой y_j в предположении, что остановка его происходит при достижении или пересечении одной из прямых

y_0, y_j. Для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ верно тождество

$$1 - \frac{q^{b_1} B_{kb_2+j-1}}{B_{b_1+kb_2+j-1}} =$$

$$= Z_j \left(1 - \frac{q^{b_1+kb_2+j-1}}{B_{b_1+kb_2+j-1}}\right) + \left(1 - Z_j - \frac{q^{b_1} B_{kb_2+j-2}}{B_{b_1+kb_2+j-2}}\right).$$

В левой части тождества вероятность недостижения прямой y_0 при биномиальном блуждании, момент остановки которого определяется достижением или пересечением одной из прямых y_0 и y_{j+1}, записана на основе формулы (3). В правой части тождества та же самая вероятность вычислена по формуле полной вероятности относительно полной группы событий, включающей событие A — прямая y_j достигнута — и противоположное событие $\bar{A}$. Из тождества найдем

$$Z_j = \frac{B_{kb_2+j-1} \cdot B_{b_1+kb_2+j-2} - B_{kb_2+j-2} \cdot B_{b_1+kb_2+j-1}}{q^{kb_2+j-1} \cdot B_{b_1+kb_2+j-2}}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Далее заметим, что в случае биномиального блуждания, момент остановки которого определяется достиже, нием или пересечением одной из прямых y_0, y_j, $j \in [1, k]$- прямая y_j достигается лишь одним из следующих j способов: с прямой y_i, $i \in [1, j-1]$; не попадая ни на одну из прямых y_i, $i = \overline{1, j-1}$. Воспользовавшись формулой полной вероятности, леммой 3 и соотношением (1), запишем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} Z_1 = V_1 \\ Z_j = V_j + \sum_{i=1}^{j-1} V_i \dfrac{C_{b_1+kb_2+j-2}(j-i)}{B_{b_1+kb_2+j-2}}, \quad j = \overline{2, k}, \end{cases}$$

решением которой и являются выражения (4). Теорема доказана.

Следствие 1. *В случае коэффициента наклона прямых $k = 1$ имеют место формулы*

$$V_0 = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{b_2} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{b_2} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b_1}}, \quad V_1 = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b_1}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{b_2} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b_1}}. \quad (5)$$

Доказательство. Из соображений симметрии, пользуясь формулой (3) при $k = 1$, запишем тождества

$$\frac{q^{b_1}B_{b_2-1}}{B_{b_1+b_2-1}} + \frac{p^{b_2}B_{b_1-1}}{B_{b_1+b_2-1}} = 1, \qquad \frac{p^{b_1}B_{b_2-1}}{B_{b_1+b_2-1}} + \frac{q^{b_2}B_{b_1-1}}{B_{b_1+b_2-1}} = 1.$$

Из этих тождеств получим систему уравнений

$$\begin{cases} V_0 + V_1 = 1, \\ \left(\frac{p}{q}\right)^{b_1} V_1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{b_2} V_0 = 1, \end{cases}$$

откуда и следует справедливость формул (5).

Отметим, что формулы (5) известны в литературе [2, гл. XIV, § 2] как вероятности разорения 1-го и 2-го игроков соответственно, когда ставки игроков равны единице, начальный капитал первого — b_1, второго — b_2.

Обозначим теперь множество всех точек с целочисленными неотрицательными координатами, лежащих на прямых y_i, $i = \overline{0, k}$, через G. При решении статистических задач, связанных с рассмотрением биномиального плана блужданий Π^G (см. [3]), порождаемого границей остановки G, может оказаться полезным следующее утверждение.

Следствие 2. *Число траекторий* $K[0, \Gamma(x, y)]$ *из начала координат* 0 *в точку* $\Gamma \in G$ *с координатами* (x, y) *при биномиальном плане блужданий* Π^G *может быть вычислено по одной из следующих формул*:

$$K[0, \Gamma(x, y)] = \frac{1}{x!} \frac{\partial^x}{\partial \varkappa^x} \left(\frac{V_0}{q^{b_1}} \right) \Bigg|_{\varkappa=0}, \quad \text{если} \quad \Gamma \in y_0, \tag{6}$$

$$K[0, \Gamma(x, y)] = \frac{1}{(x - x_*)!} \frac{\partial^{x-x_*}}{\partial \varkappa^{x-x_*}} \left(\frac{V_i}{p^{x_*} q^{k(x_*-b_2)-i+1}} \right) \Bigg|_{\varkappa=0}, \tag{7}$$

если $\Gamma \in y_i$, $i \in [1, k]$, x_* — *целое число из* $\left[b_2 + \frac{i-1}{k}, \; b_2 + 1 + \frac{i-2}{k} \right]$.

Доказательство. Установим справедливость формулы (7). Поскольку выражение

$$p^{x_*} q^{k(x_*-b_2)-i+1} \varkappa^{x-x_*} = \\ = p^{x_*} q^{k(x_*-b_2)-i+1} p^{x-x_*} q^{k(x-x_*)} = p^x q^{k(x-b_2)-i+1}$$

определяет вероятность реализации отдельной траектории из начала координат в точку $\Gamma \in y_i$, $i \in [1, k]$, то вероятность попадания на прямую y_i может быть записана в виде ряда

$$V_i = \sum_{x=x_*}^{\infty} K[0, \Gamma(x, y)]\, p^{x_*} q^{k(x_*-b_2)-i+1} \varkappa^{x-x_*}.$$

Из этого соотношения и получаем формулу (7). Формула (6) проверяется аналогично. Следствие доказано.

Пермский государственный университет им. М. Горького

Поступило 15.06.82

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вальд А. Последовательный анализ.— М.: Физматгиз, 1960.
[2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1.— М.: Мир, 1984.
[3] Girshick M. A., Mosteller F., Savage L. I. Unbiased estimation for certain binomial sampling problems with applications.— Ann. Math. Stat., 1946, v. 17, № 1, p. 13—23.
[4] Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова.— М.: Наука, 1970.