



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Красовская, С. А. Мазаник, Асимптотическая эквивалентность  
линейных дифференциальных систем системам с бесконечно диффе-  
ренцируемыми коэффициентами,  
*Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 2, 193–201

<https://www.mathnet.ru/de11224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

23 апреля 2025 г., 11:51:58



УДК 517.926.4

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СИСТЕМАМ С БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2005 г. Т. Г. Красовская, С. А. Мазаник

Ранее в работах [1–3] было показано, что линейная система дифференциальных уравнений может быть заменена линейной системой с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами с сохранением некоторых асимптотических свойств решений. Целью настоящей работы является доказательство существования для любой линейной системы с ограниченными локально интегрируемыми коэффициентами эквивалентной ей в смысле преобразования Ляпунова линейной системы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, имеющими ограниченные на полуоси  $[0, +\infty)$  производные любого порядка.

### 1. Вспомогательные результаты.

**Лемма 1.1.** Для любых действительных чисел  $a > 0$ ,  $0 < l \leq (\ln 2)/(16a)$  справедливы следующие неравенства:

$$2al \exp(8al/3) \leq 1 - \exp(-8al/3) \leq 3al, \quad (1.1)$$

$$al \leq 1 - \exp(-2al). \quad (1.2)$$

**Доказательство** требуемых неравенств непосредственно следует из свойств показательной и линейной функций, рассматриваемых как функции аргумента  $l$  на отрезке  $[0, (\ln 2)/(16a)]$  при каждом фиксированном значении  $a$ .

На интервале  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию  $G(t; 0, \Delta)$ , равную нулю и единице соответственно на интервалах  $(-\infty, 0)$  и  $(\Delta, +\infty)$  и строго возрастающую на отрезке  $[0, \Delta]$ ,  $\Delta > 0$ . Легко видеть, что определенная на  $\mathbb{R}$  таким образом функция  $G$  ограничена вместе со своими производными всех порядков, т.е.

$$\forall n \in \mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \exists M_n < +\infty : \sup_{t \in \mathbb{R}} |G^{(n)}(t; 0, \Delta)| \leq M_n. \quad (1.3)$$

Отметим, что в качестве функции  $G$  можно взять функцию (см., например, [4, с. 54])  $G(t; 0, \Delta) = \exp(-t^{-2} \exp(-(t - \Delta)^{-2}))$ .

Далее определим функцию  $G(t; \sigma, \Delta)$ , полагая  $G(t; \sigma, \Delta) = G(t - \sigma; 0, \Delta)$ ,  $t, \sigma, \Delta \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta > 0$ .

Положим для  $t, \sigma, \Delta \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta > 0$

$$H(t; \sigma, \Delta) = G(t; \sigma, \Delta) - G(t; \sigma + 3\Delta, \Delta). \quad (1.4)$$

Через  $\mathbf{P}_\alpha(\mathbb{R}_+)$  обозначим совокупность локально интегрируемых на  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$  функций  $p$  таких, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |p(t)| \leq \alpha, \quad (1.5)$$

а через  $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$  – множество бесконечно дифференцируемых на  $\mathbb{R}$  функций  $q$  таких, что  $\forall n \in \mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \exists M_n(q) < +\infty : \sup_{t \in \mathbb{R}} |q^{(n)}(t)| \leq M_n(q)$ . Сужение функций из  $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$  на  $\mathbb{R}_+$

обозначим через  $\mathbf{Q}^+(\mathbb{R}_+)$ . Обозначим  $\mathcal{S}(\xi, \eta, l) = \{0, \dots, (\eta - \xi)/l - 1\}$ , если  $\xi$  и  $\eta$  - числа, кратные  $l$ , и  $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_0$ , если  $\eta$  - символ  $+\infty$ , а также

$$I(f; s, t) = \int_s^t f(u) du, \quad I^+(f, g; s, t, d) = \int_s^t (f(u) - g(u)) du + \int_t^{t+d} f(u) du,$$

$$I^-(f, g; s, t, d) = \int_s^t (f(u) - g(u)) du + \int_{s-d}^s f(u) du, \quad E(f; s, t) = \exp \int_s^t f(v) dv,$$

где  $s, t, d \in \mathbb{R}$ ,  $d \geq 0$ .

Непосредственно из определения функции  $G(t; \sigma, \Delta)$  следует

**Лемма 1.2.** Для любых  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta > 0$  справедливо равенство

$$I(G(u; \sigma, \Delta); \sigma, \sigma + \Delta) = I(G(u; 0, \Delta); 0, \Delta). \tag{1.6}$$

**Лемма 1.3.** Для любых действительных положительных  $\alpha$ ,  $l$ , любого  $k \in \mathbb{Z}_0$  и любой функции  $p \in \mathbf{P}_\alpha(\mathbb{R}_+)$  существует такая функция  $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ , что неравенство

$$|I(p - q; kl, t)| \leq 4\alpha l \tag{1.7}$$

выполняется для всех  $t \in [kl, \eta)$ , где  $\eta = nl$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > k$ , либо  $\eta$  - символ  $+\infty$ .

**Доказательство.** Для  $t \in \mathbb{R} \setminus [kl, \eta)$  в качестве функции  $q$  можно взять любую функцию из  $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ , для которой  $q^{(m)}(kl) = 0$  (и  $q^{(m)}(nl) = 0$  при  $\eta = nl$ ) для всех  $m \in \mathbb{Z}_0$ . Далее требуемую функцию  $q$  построим последовательно на промежутках длины  $l$ , начиная с  $[kl, kl + l]$ , следующим образом: для  $t \in [kl + sl, kl + sl + l]$ ,  $s \in \mathcal{S}(kl, \eta, l)$ , положим

$$q(t) = \begin{cases} 4\alpha H(t; kl + sl, \Delta)/3, & \text{если } 0 \leq I_s^+(p, q; k, l) \leq 2\alpha l, \\ -4\alpha H(t; kl + sl, \Delta)/3, & \text{если } -2\alpha l \leq I_s^+(p, q; k, l) < 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

где  $\Delta = l/4$ ,  $I_s^+(p, q; k, l) = I^+(p, q; kl, kl + sl, l)$ . В силу (1.3) и (1.4) функция  $q$  и ее производные будут ограничены на  $[kl, \eta)$ , т.е.  $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ .

Заметим, что при таком построении функции  $q$  будет справедливо равенство

$$|I(q; (k + s)l, (k + s + 1)l)| = \alpha l \quad \forall s \in \mathcal{S}(kl, \eta, l). \tag{1.9}$$

Действительно, для  $t \in [v, v + l] = [kl + sl, kl + sl + l]$  из определения функций  $G$ ,  $H$  и леммы 1.2 следует равенство

$$\begin{aligned} |I(q; v, v + 4\Delta)| &= 4\alpha(I(H(u; v, \Delta); v, v + \Delta) + I(H; v + \Delta, v + 3\Delta) + I(H; v + 3\Delta, v + l))/3 = \\ &= 4\alpha(I(G(u; v, \Delta); v, v + \Delta) + I(1; v + \Delta, v + 3\Delta) + I(G(u; v, \Delta) - G(u; v + 3\Delta, \Delta); v + 3\Delta, v + l))/3 = \\ &= 4\alpha(I(G(u; 0, \Delta); 0, \Delta) + 2\Delta + I(1; v + 3\Delta, v + l) - I(G(u; 0, \Delta); 0, \Delta))/3 = 4\alpha\Delta = \alpha l. \end{aligned}$$

Поскольку очевидно, что неравенство

$$|I(p - q; kl, kl + sl)| \leq \alpha l \tag{1.10}$$

выполнено для  $s = 0$ , то из его выполнения при  $s = m$  из (1.5) следует неравенство  $|I_m^+(p, q; k, l)| \leq 2\alpha l$ , откуда в силу (1.8) и (1.9) получаем  $|I(p - q; kl, kl + (m + 1)l)| \leq \alpha l$ . Следовательно, по индукции неравенство (1.10) выполнено для всех  $s \in \mathcal{S}(kl, \eta, l)$ . Это означает, что определение функции  $q$  корректно и при этом для любого  $t \in [kl + sl, kl + sl + l]$ ,  $s \in \mathcal{S}(kl, \eta, l)$ , будет выполнено неравенство

$$|I(p - q, kl, t)| \leq |I(p - q, kl, kl + sl)| + |I(p, kl + sl, t)| + |I(-q, kl + sl, t)| \leq \alpha l + \alpha l + 4\alpha l/3 \leq 4\alpha l,$$

что и доказывает требуемое утверждение. Лемма доказана.

**Лемма 1.4.** Для любых действительных  $L \geq 1$ ,  $a > 0$ ,  $0 < l \leq (\ln 2)/(16a)$ ,  $\gamma$ ,  $|\gamma| \leq al \exp(8al/3)$ , любых  $k \in \mathbb{Z}_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k < n$ , и любой функции  $p \in \mathbf{P}_\alpha(\mathbb{R}_+)$ ,  $0 < \alpha < a/12$ , существует такая функция  $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ , что для всех  $t \in [kl, nl]$  выполняется неравенство

$$|\gamma + LI(p - q; t, nl)| \leq L(0.75 - 0.75 \exp(-8al/3) - al/4). \tag{1.11}$$

**Доказательство.** Для  $t \in \mathbb{R} \setminus (kl, nl)$  в качестве функции  $q$  можно взять любую функцию из  $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ , для которой  $q^{(m)}(kl) = q^{(m)}(nl) = 0$  при всех  $m \in \mathbb{Z}_0$ . Положим  $M = 0.75(1 - \exp(-8al/3)) - 0.5al$ . Требуемую функцию  $q$  построим последовательно на промежутках длины  $l$ , начиная с  $[nl - l, nl]$ , следующим образом: для значений  $t \in [nl - sl - l, nl - sl]$ ,  $s \in \mathcal{S}(kl, nl, l)$ , положим

$$q(t) = \begin{cases} 4\alpha H(t; (n - s - 1)l, \Delta)/3, & \text{если } 0 \leq I_{\gamma s}^-(p, q; n, l) \leq M + \alpha l, \\ -4\alpha H(t; (n - s - 1)l, \Delta)/3, & \text{если } -M - \alpha l \leq I_{\gamma s}^-(p, q; n, l) < 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

где  $\Delta = l/4$ ,  $I_{\gamma s}^-(p, q; n, l) = \gamma L^{-1} + I^-(p, q; nl - sl, nl, l)$ . В силу (1.3) и (1.4) функция  $q$  и ее производные будут ограничены на  $[kl, nl]$ , т.е.  $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ . Кроме того, как показано в лемме 1.3, будет выполнено равенство

$$|I(q; kl + sl, kl + (s + 1)l)| = \alpha l \quad \forall s \in \mathcal{S}(kl, nl, l). \tag{1.13}$$

Из неравенств (1.1) следует, что  $|\gamma| - M \leq al \exp(8al/3) - 0.75(1 - \exp(-8al/3)) + 0.5al \leq 1.5al \exp(8al/3) - 0.75(1 - \exp(-8al/3)) \leq 0.75(2al \exp(8al/3) - (1 - \exp(-8al/3))) \leq 0$ . Поэтому неравенство

$$|\gamma L^{-1} + I(p - q; nl - sl, nl)| \leq M \tag{1.14}$$

выполнено для  $s = 0$ . Из его выполнения при  $s = m$ ,  $0 \leq m \leq n - k - 2$ , и (1.5) следует, что  $|I_{\gamma m}^-(p, q; n, l)| \leq M + \alpha l$ , откуда в силу (1.12) и (1.13) получаем  $|\gamma L^{-1} + I(p - q; (n - m - 1)l, nl)| \leq \max\{\alpha l, M\}$ . Так как из неравенств (1.1) и  $\alpha < a$  следует, что  $\max\{\alpha l, M\} = M$ , то по индукции неравенство (1.14) выполнено для всех  $s \in \mathcal{S}(kl, nl, l)$ . Это означает, что определение функции  $q$  корректно, и так как  $\alpha < a/12$ , то при этом для любого  $t \in [nl - sl - l, nl - sl]$  будет выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |\gamma + LI(p - q, t, nl)| &\leq |\gamma + LI(p - q, nl - sl, nl)| + L|I(p, t, nl - sl)| + L|I(-q, t, nl - sl)| \leq \\ &\leq L(M + \alpha l + 4\alpha l/3) \leq L(M + 3\alpha l) \leq L(M + 0.25al), \end{aligned}$$

что и доказывает требуемое утверждение. Лемма доказана.

**Теорема 1.1.** Для любого натурального  $N$ , любых действительных  $a > 0$ ,  $0 < l_0 \leq (\ln 2)/(16a)$ , и любых функций  $p_1, p_2 \in \mathbf{P}_a(\mathbb{R}_+)$ ,  $p \in \mathbf{P}_\alpha(\mathbb{R}_+)$ ,  $0 < \alpha \leq a^2 l_0/(4N)$ , существуют такие функции  $q_1, q_2, q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ , что для всех  $t \in \mathbb{R}_+$  функция

$$F(t) = E(q_1 - q_2; 0, t)I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t)$$

удовлетворяет неравенству

$$|F(t)| \leq 6al_0/N. \tag{1.15}$$

**Доказательство.** Обозначим  $l = l_0/N$ . Рассмотрим две произвольные функции  $p_1, p_2 \in \mathbf{P}_a(\mathbb{R}_+)$ , для которых на промежутках  $[kl_0, kl_0 + l_0]$ ,  $k \in \mathbb{Z}_0$ , в соответствии с леммой 1.3 построим бесконечно дифференцируемые ограниченные функции  $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ . Заметим, что при таком построении функций  $q_1$  и  $q_2$  на интервалах  $(kl_0, kl_0 + l_0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_0$ , разность  $q_1 - q_2$  имеет фиксированный знак. Промежутки, содержащие только интервалы, на которых  $q_1(t) - q_2(t) \leq 0$ , назовем промежутками первого типа, а содержащие только интервалы, на которых  $q_1(t) - q_2(t) > 0$ , - второго. Эти промежутки, вообще говоря, чередуются. Рассмотрим интервал  $(\xi, \eta)$ , где  $\xi \in \mathbb{R}_+$ , а  $\eta \in \mathbb{R}_+$  или  $\eta$  - символ  $+\infty$ ,  $\eta - \xi \geq l$ .

Будем говорить, что в точке  $\xi$  выполнено

**Условие А**, если  $I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, \xi) = \gamma E(q_2 - q_1; 0, \xi)$ , где  $|\gamma| \leq al \exp(8al/3)$ .  
**Условие Б**, если

$$|I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, \xi) + I(pE(q_2 - q_1; 0, u); \xi, \eta)| \leq 2aI(E(q_2 - q_1; 0, u); \xi, \xi + l).$$

Существование требуемой функции  $q$  докажем последовательным построением ее на промежутках первого и второго типов по следующей схеме.

I. В случае если  $(\xi, \eta)$  является промежутком первого типа, а следующий за ним промежуток  $(\eta, \zeta)$  – промежутком второго типа, то, предполагая, что в точке  $\xi$  выполнено условие А, строим требуемую функцию  $q$  на  $(\xi, \eta)$  так, чтобы в точке  $\eta$  было выполнено условие Б.

II. В случае если  $(\xi, \eta)$  является промежутком второго типа, а следующий за ним промежуток  $(\eta, \zeta)$  – промежутком первого типа, то, предполагая, что в точке  $\xi$  выполнено условие Б, строим требуемую функцию  $q$  на  $(\xi, \eta)$  так, чтобы в точке  $\eta$  было выполнено условие А.

III. Установим, что если нуль – начало промежутка первого типа, то в нуле выполнено условие А, а если нуль – начало промежутка второго типа, то в нуле выполнено условие Б.

Таким образом, мы последовательно построим требуемую функцию  $q$  на всем множестве  $\mathbb{R}_+$  так, что на левых концах всех промежутков первого типа будет выполнено условие А, а на левых концах всех промежутков второго типа – условие Б. Для  $t \in (-\infty, 0]$  положим  $q(t) = 0$ .

I. Пусть  $(t_0, t_1)$  является промежутком первого типа, где  $t_0 = kl = n_0l_0$ ,  $k = Nn_0$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}_0$ , а  $t_1$  – или число (и тогда  $t_1 = nl = n_1l_0$ ,  $n = Nn_1$ ,  $n_1 \in \mathbb{N}$ ,  $n_1 > n_0$ ), или символ  $+\infty$ . Так как  $(t_0, t_1)$  – промежуток первого типа, то на нем функции  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  определены таким образом, что на каждом из интервалов  $(t_0 + il, t_0 + il + l)$ ,  $i \in \mathcal{S}(t_0, t_1, l)$ , выполнено неравенство  $q_2(t) - q_1(t) \geq 0$ .

Предположим, что на отрезке  $[0, t_0]$  уже построена требуемая функция  $q(t) \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ ,  $q^{(m)}(t_0) = 0$  при всех  $m \in \mathbb{Z}_0$ , причем так, что в точке  $t_0$  выполняется условие А, т.е.

$$I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_0) = \gamma E(q_2 - q_1; 0, t_0). \quad (1.16)$$

Тогда для  $t \geq t_0$  имеем  $F(t) = \gamma E(q_1 - q_2; t_0, t) + E(q_1 - q_2; t_0, t)I((p - q)E(q_2 - q_1; t_0, u); t_0, t)$ . В силу неотрицательности разности  $q_2(t) - q_1(t)$  на  $(t_0, t_1)$  положительная функция  $E(q_2 - q_1; t_0, t)$  возрастает на этом интервале. Поэтому, применяя к интегралу во втором слагаемом теорему о среднем [5, с. 119], получаем

$$F(t) = \gamma E(q_1 - q_2; t_0, t) + I(p - q; \hat{t}, t), \quad (1.17)$$

где  $t_0 \leq \hat{t} \leq t$ .

Рассмотрим два возможных случая: 1)  $t_1 = +\infty$  и 2)  $t_1 = nl$ .

1) Если  $t_1 = +\infty$ , то строим функцию  $q$  на  $[t_0, +\infty)$  в соответствии с леммой 1.3. Тогда справедлива оценка  $|F(t)| = |\gamma E(q_1 - q_2; t_0, t) + I(p - q; t_0, t) - I(p - q; t_0, \hat{t})| \leq |\gamma| + 4al + 4al \leq al \exp(8al/3) + 8al$ . Поскольку очевидно, что  $\alpha < a/4$  и в силу (1.1)  $\exp(8al/3) \leq 1.5$ , то получаем  $|F(t)| \leq 3.5al < 6al$  для всех  $t \geq t_0$ . Следовательно, в этом случае требуемая функция  $q$  будет построена на всем  $\mathbb{R}_+$ .

2) Пусть  $t_1 = nl = n_1l_0$  и  $(t_1, t_2)$  – промежуток второго типа, где  $t_2$  – или число (и тогда  $t_2 = ri = n_2l_0$ ,  $r = Nn_2 \in \mathbb{N}$ ,  $r > n$ ), или символ  $+\infty$ . Так как  $(t_1, t_2)$  – промежуток второго типа, то на нем функции  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  построены в соответствии с леммой 1.3 так, что

$$q_1(t) = \frac{4}{3}a \sum_{i \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l_0)} H\left(t; t_1 + il_0, \frac{l_0}{4}\right) \leq \frac{4}{3}a, \quad q_2(t) = -q_1(t). \quad (1.18)$$

Обозначим

$$I_s(t_1) = I(E(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l), \quad s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l), \quad (1.19)$$

$$I^0(t_1, t_2) = I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_1) + I(pE(q_2 - q_1; 0, u); t_1, t_2). \quad (1.20)$$

Построим требуемую функцию  $q$  на промежутке  $(t_0, t_1)$  так, чтобы в точке  $t_1$  было выполнено условие Б, т.е.

$$|I^0(t_1, t_2)| \leq 2aI_0(t_1). \tag{1.21}$$

Так как  $I_s(t_1) = E(q_2 - q_1; 0, t_1)E(q_2 - q_1; t_1, t_1 + sl)I(E(q_2 - q_1; t_1 + sl, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l)$ , то в силу (1.18) имеем оценку

$$\begin{aligned} I_s(t_1) &\geq E(q_2 - q_1; 0, t_1)E(q_2 - q_1; t_1, t_1 + sl)I(\exp(-8a(u - t_1 - sl)/3); t_1 + sl, t_1 + sl + l) = \\ &= E(q_2 - q_1; 0, t_1)E(q_2 - q_1; t_1, t_1 + sl) \cdot 3(1 - \exp(-8al/3))/(8a), \quad s \in S(t_1, t_2, l). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Для доказательства неравенства (1.21) достаточно показать, что

$$|f(t_1)| = |I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_1)| \leq 2aI_0(t_1) - alE(q_2 - q_1; 0, t_1)/4, \tag{1.23}$$

$$|g(t_2)| = |I(pE(q_2 - q_1; 0, u); t_1, t_2)| \leq alE(q_2 - q_1; 0, t_1)/4. \tag{1.24}$$

По предположению для уже построенной на отрезке  $[0, t_0]$  функции  $q$  выполнено условие (1.16), поэтому (как бы ни была определена функция  $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$  на  $[t_0, t_1]$ ) имеем

$$\begin{aligned} f(t_1) &= I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_0) + I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); t_0, t_1) = \\ &= E(q_2 - q_1; 0, t_0)(\gamma + I((p - q)E(q_2 - q_1; t_0, u); t_0, t_1)). \end{aligned}$$

Применяя теорему о среднем [5, с. 119] (функция  $E(q_2 - q_1; t_0, t)$  возрастает), получаем, что  $f(t_1) = E(q_2 - q_1; 0, t_0)(\gamma + E(q_2 - q_1; t_0, t_1)I(p - q; \hat{t}, t_1))$ , где  $t_0 \leq \hat{t} \leq t_1$ .

Поскольку легко видеть, что  $\alpha < a/12$  и  $E(q_2 - q_1; t_0, t_1) \geq 1$ , то строим теперь требуемую функцию  $q$  на промежутке  $(t_0, t_1)$  в соответствии с леммой 1.4, тогда в силу (1.11) для любого  $t_0 \leq \hat{t} \leq t_1$  будет выполнено неравенство

$$|\gamma + E(q_2 - q_1; t_0, t_1)I(p - q; \hat{t}, t_1)| \leq E(q_2 - q_1; t_0, t_1)(3 - 3\exp(-8al/3) - al)/4. \tag{1.25}$$

Поэтому  $|f(t_1)| \leq E(q_2 - q_1; 0, t_1)(3 - 3\exp(-8al/3) - al)/4$ . Используя неравенство (1.22) при  $s = 0$ , получаем требуемое неравенство (1.23).

Оценим величину  $g(t_2)$ , учитывая равенства (1.9), (1.18):

$$\begin{aligned} I(E(q_2 - q_1; 0, u); t_1, t_2) &= \sum_{s \in S(t_1, t_2, l_0)} E(q_2 - q_1; 0, t_1 + sl_0)I(E(q_2 - q_1; t_1 + sl_0, u); t_1 + sl_0, t_1 + sl_0 + l_0) \leq \\ &\leq E(q_2 - q_1; 0, t_1) \sum_{s \in \mathbb{Z}_0} \exp(-2al_0s)I(E(q_2 - q_1; t_1 + sl_0, u); t_1 + sl_0, t_1 + sl_0 + l_0) \leq \\ &\leq l_0(1 - \exp(-2al_0))^{-1}E(q_2 - q_1; 0, t_1). \end{aligned}$$

Из неравенства  $1 - \exp(-2al_0) \geq al_0$  (см. (1.2)) получаем

$$I(E(q_2 - q_1; 0, u); t_1, t_2) \leq a^{-1}E(q_2 - q_1; 0, t_1). \tag{1.26}$$

Теперь из условия  $\alpha \leq a^2l_0/(4N) = a^2l/4$  следует требуемое неравенство (1.24)  $|g(t_2)| = |I(pE(q_2 - q_1; 0, u); t_1, t_2)| \leq \alpha a^{-1}E(q_2 - q_1; 0, t_1) \leq alE(q_2 - q_1; 0, t_1)/4$ .

Таким образом, на отрезке  $[t_0, t_1]$  построена такая функция  $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ , что в точке  $t_1$  выполнено условие Б и при этом в силу (1.1), (1.17) и (1.25) для всех  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\hat{t} \in [t_0, t]$  будет выполнено неравенство (1.15):  $|F(t)| \leq |\gamma| + |I(p - q; \hat{t}, t)| = |\gamma| + |\gamma E(q_1 - q_2; t_0, t_1) + I(p - q; \hat{t}, t_1) - (\gamma E(q_1 - q_2; t_0, t_1) + I(p - q; t, t_1))| \leq |\gamma| + |\gamma E(q_1 - q_2; t_0, t_1) + I(p - q; \hat{t}, t_1)| + |\gamma E(q_1 - q_2; t_0, t_1) + I(p - q; t, t_1)| \leq al \exp(8al/3) + 2(0.75 - 0.75 \exp(-8al/3) - al/4) \leq \leq 1.5al + 4al < 6al$ .

II. Рассмотрим теперь построение требуемой функции  $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$  на промежутке  $(t_1, t_2)$ , который является промежутком второго типа. При этом предполагаем, что в точке  $t_1$  выполнено условие Б, т.е. имеет место неравенство (1.21). Как и ранее, считаем, что  $t_2$  – или число (и тогда  $t_2 = rl = n_2l_0 > n_1l_0 = nl = t_1$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_0$ ), или символ  $+\infty$ .

Обозначим для  $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$

$$I^{s+1}(t_1, t_2) = I^s(t_1, t_2) - I(qE(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l), \tag{1.27}$$

где  $I^0(t_1, t_2)$  определено формулой (1.20).

Если

$$|I^s(t_1, t_2)| \leq 2aI_s(t_1) \quad \forall s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l), \tag{1.28}$$

то функцию  $q$  будем строить последовательно на отрезках  $[t_1 + sl, t_1 + sl + l]$ ,  $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$ , по формулам

$$q(t) = \begin{cases} a\Gamma_s(t; t_1), & \text{если } 0 \leq I^s(t_1, t_2) \leq 2aI_s(t_1), \\ -a\Gamma_s(t; t_1), & \text{если } -2aI_s(t_1) \leq I^s(t_1, t_2) < 0, \end{cases} \tag{1.29}$$

где

$$\Gamma_s(t; t_1) = \frac{H(t; t_1 + sl, l/4)I(E(q_2 - q_1; t_1 + sl, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l)}{I(H(u; t_1 + sl, l/4)E(q_2 - q_1; t_1 + sl, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l)}.$$

Так как неравенство (1.28) по предположению выполнено при  $s = 0$  (условие Б в точке  $t_1$ ), то функция  $q$  будет корректно определена на  $[t_1, t_1 + l]$ . Для последующего корректного построения функции  $q$  индукцией по  $s$  докажем, что неравенство (1.28) выполнено для всех  $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$ . Действительно, из (1.29) следует, что

$$I(qE(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l) = \begin{cases} aI_s(t_1), & \text{если } 0 \leq I^s(t_1, t_2) \leq 2aI_s(t_1), \\ -aI_s(t_1), & \text{если } -2aI_s(t_1) \leq I^s(t_1, t_2) < 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Поэтому если неравенство (1.28) выполнено для  $s = m$ , то

$$|I^{m+1}(t_1, t_2)| = |I^m(t_1, t_2) - I(qE(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + ml, t_1 + ml + l)| \leq aI_m(t_1). \tag{1.31}$$

Поскольку  $q_2(t) - q_1(t) < 0$  для  $t \in (t_1 + ml, t_1 + ml + l)$  при всех  $m \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$ , то

$$I_m(t_1) = E(q_2 - q_1; 0, t_1)I(E(q_2 - q_1; t_1, u); t_1 + ml, t_1 + ml + l) \leq E(q_2 - q_1; 0, t_1 + ml)l. \tag{1.32}$$

С другой стороны, в силу (1.18) и (1.22) для всех  $m + 1 \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l) \setminus \{0\}$  имеем

$$\begin{aligned} I_{m+1}(t_1) &\geq E(q_2 - q_1; 0, t_1 + ml)E(q_2 - q_1; t_1 + ml, t_1 + ml + l) \cdot 3(1 - \exp(-8al/3))/(8a) \geq \\ &\geq E(q_2 - q_1; 0, t_1 + ml) \exp(-8al/3) \cdot 3(1 - \exp(-8al/3))/(8a). \end{aligned}$$

Из неравенства (1.1) следует, что  $I_{m+1}(t_1) \geq 0.75E(q_2 - q_1; 0, t_1 + ml)l$ , откуда, учитывая оценку (1.32), получаем  $I_m(t_1) \leq 4I_{m+1}(t_1)/3 < 2I_{m+1}(t_1)$ , что и дает в силу (1.31) требуемое неравенство (1.28) при  $s = m + 1$ . Тем самым (1.28) выполнено для всех  $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$  и, кроме того, (1.31) выполнено для всех  $m \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$ .

Итак, функция  $q$  корректно определяется формулами (1.29) последовательно на всех промежутках  $[t_1 + sl, t_1 + sl + l]$ ,  $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$ . При этом для любого  $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$  и всех  $t \in [t_1 + sl, t_1 + sl + l]$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t) = \\ &= I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_1 + sl) + I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t) = \\ &= I^s(t_1, t_2) - I(pE(q_2 - q_1; 0, u); t, t_2) - I(qE(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t). \end{aligned}$$

Оценим интеграл  $I(pE(q_2 - q_1; 0, u); t, t_2)$ . Пусть  $s$  таково, что  $sl \in [\kappa l_0, \kappa l_0 + l_0)$ , тогда, используя оценку (1.26), заменяя  $t_1$  на  $t_1 + \kappa l_0$ , получаем

$$I(E(q_2 - q_1; 0, u); t, t_2) \leq I(E(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + \kappa l_0, t_2) \leq a^{-1}E(q_2 - q_1; 0, t_1 + \kappa l_0).$$

Поэтому, так как  $\alpha \leq a^2 l_0 / (4N) = a^2 l / 4$ , имеем

$$|I(pE(q_2 - q_1; 0, u); t, t_2)| \leq \alpha I(E(q_2 - q_1; 0, u); t, t_2) \leq alE(q_2 - q_1; 0, t_1 + \kappa l_0) / 4.$$

Кроме того, в силу (1.28) и (1.30) имеем  $|I^s(t_1, t_2)| \leq 2aI_s(t_1)$  и  $|I(qE(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t)| \leq I(|q|E(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t) \leq I(|q|E(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l) = aI_s(t_1)$ . Таким образом,

$$|\varphi(t)| \leq 3aI_s(t_1) + alE(q_2 - q_1; 0, t_1 + \kappa l_0) / 4 \leq$$

$$\leq E(q_2 - q_1; 0, t_1 + sl)(3aI(E(q_2 - q_1; t_1 + sl, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l) + alE(q_1 - q_2; t_1 + \kappa l_0, t_1 + sl) / 4) \leq \\ \leq E(q_2 - q_1; 0, t_1 + sl)(3al + 0.25al \exp(8al_0/3)).$$

Поскольку  $\exp(8al_0/3) \leq 1.5$  (см. (1.1)), то  $|\varphi(t)| \leq 4alE(q_2 - q_1; 0, t_1 + sl)$ . Тогда для модуля функции  $F(t)$  справедлива оценка

$$|F(t)| = |\varphi(t)E(q_1 - q_2; 0, t)| = |\varphi(t)|E(q_1 - q_2; 0, t_1 + sl)E(q_1 - q_2; t_1 + sl, t) \leq \\ \leq |\varphi(t)|E(q_1 - q_2; 0, t_1 + sl) \exp(8al/3) \leq 4al \exp(8al/3).$$

Используя неравенство (1.1), окончательно получаем, что неравенство  $|F(t)| \leq 6al$  выполняется для всех  $t \in [t_1, t_2]$ .

Следовательно, если  $t_2 = +\infty$ , то требуемая функция  $q$  будет построена на всем  $\mathbb{R}_+$ . Если же  $t_2 = rl$ , то в силу (1.31) при  $m = \max \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$  имеем

$$|I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_2)| \leq aI(E(q_2 - q_1; 0, u); t_2 - l, t_2) = \\ = aE(q_2 - q_1; 0, t_2)E(q_1 - q_2; t_2 - l, t_2)I(E(q_2 - q_1; t_2 - l, u); t_2 - l, t_2) \leq aE(q_2 - q_1; 0, t_2) \exp(8al/3)l.$$

Итак,  $I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_2) = \gamma E(q_2 - q_1; 0, t_2)$ , где  $|\gamma| \leq al \exp(8al/3)$ , т.е. требуемая функция  $q$  построена на отрезке  $[t_1, t_2]$  так, что в точке  $t_2$  выполнено условие А.

**III.** Осталось проверить выполнение условий А и Б в нуле. Если  $(0, \eta)$  – промежуток первого типа, то очевидно выполнение условия А в нуле. Если же  $(0, \eta)$  – промежуток второго типа, то из (1.22) и (1.24) при  $t_1 = 0$  следует, что

$$|I(pE(q_2 - q_1; 0, u); 0, \eta)| = |I^0(0, \eta)| \leq 2aI_0(0) = 2aI(E(q_2 - q_1; 0, u); 0, l),$$

т.е. условие Б выполнено в нуле.

Таким образом, мы можем последовательно строить на  $\mathbb{R}_+$  требуемую функцию  $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$  поочередно на промежутках первого и второго типа. Теорема доказана.

**2. Основной результат.** Рассмотрим две системы линейных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.2}$$

где элементы матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  – локально интегрируемые ограниченные на  $\mathbb{R}_+$  функции. Систему (2.1) будем называть треугольной, если  $a_{ij}(t) = 0$  для всех  $t \in \mathbb{R}_+$  при  $i > j$ .

Следуя [6], системы (2.1) и (2.2) назовем асимптотически эквивалентными, если существует такая матрица Ляпунова  $S$ , что преобразование

$$x = Sy, \quad \max\left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|S(t)\|, \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|S^{-1}(t)\|, \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|\dot{S}(t)\| \right\} < +\infty,$$

переводит систему (2.1) в систему (2.2).



**Теорема 2.1.** Для любой треугольной системы (2.1) с локально интегрируемыми ограниченными на  $\mathbb{R}_+$  коэффициентами существует асимптотически эквивалентная система (2.2) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными на  $\mathbb{R}_+$  коэффициентами, производные которых также ограничены (каждая своим числом) на  $\mathbb{R}_+$ .

**Доказательство.** Пусть коэффициенты системы (2.1) принадлежат множеству  $\mathbf{P}_a(\mathbb{R}_+)$ . Обозначим  $N = [256n \exp(8al_0)] + 1$  ( $[\alpha]$  – целая часть  $\alpha$ ),  $l_i = N^{i-n}l_0$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ),  $\lambda = a \exp(-8al_0)l_0/(8N^{n-1}) < 1$ ,  $c_j = \lambda^{j-1}c_1$  ( $j = 2, \dots, n$ ), где  $c_1$  и  $l_0$  – некоторые положительные действительные числа, причем  $l_0 \leq (\ln 2)/(16a)$ . Пусть  $X, Y$  – фундаментальные нормированные в нуле матрицы решений систем (2.1) и (2.2) соответственно, а постоянная невырожденная матрица  $C = \text{diag}\{c_1, \dots, c_n\}$ . Тогда матрица перехода от (2.1) к (2.2) имеет вид  $S(t) = X(t)CY^{-1}(t)$ , т.е. будет треугольной и ее ненулевые элементы  $S_{ij}$ ,  $i \leq j$ , могут быть представлены в виде (см., например, [7])

$$S_{ii}(t) = c_i E(a_{ii} - b_{ii}; 0, t), \quad S_{ij}(t) = c_i E(a_{ii} - b_{ii}; 0, t) F_{ij}(t), \tag{2.3}$$

где

$$F_{i,i+1} = E(b_{ii} - b_{i+1,i+1}; 0, t) \times \\ \times I \left( \left( \frac{c_{i+1}}{c_i} a_{i+1,i+1} E(a_{i+1,i+1} - b_{i+1,i+1} + b_{ii} - a_{ii}; 0, u) - b_{i,i+1} \right) E(b_{i+1,i+1} - b_{ii}; 0, u); 0, t \right), \\ F_{ij}(t) = E(b_{ii} - b_{jj}; 0, t) I \left( \left( \sum_{k=i+1}^{j-1} \left( \frac{c_k}{c_i} a_{ik} E(a_{kk} - b_{kk} + b_{ii} - a_{ii}; 0, u) F_{kj} - b_{kj} F_{ik} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_j}{c_i} a_{ij} E(a_{jj} - b_{jj} + b_{ii} - a_{ii}; 0, u) - b_{ij} \right) E(b_{jj} - b_{ii}; 0, u); 0, t \right), \quad j - i \geq 2.$$

В силу леммы 1.3 для каждой функции  $a_{ii} \in \mathbf{P}_a(\mathbb{R}_+)$  существует такая функция из  $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ , что для ее сужения  $b_{ii}$  на  $\mathbb{R}_+$  выполняется неравенство

$$|I(a_{ii} - b_{ii}; 0, t)| \leq 4al_0, \tag{2.4}$$

откуда

$$S_{ii}(t) \leq c_i \exp(4al_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.5}$$

Так как функция  $F_{i,i+1}$  имеет вид функции  $F$  в теореме 1.1 и

$$|c_{i+1}c_i^{-1}a_{i,i+1}E(a_{i+1,i+1} - b_{i+1,i+1} + b_{ii} - a_{ii}; 0, u)| \leq \lambda a \exp(8al_0) = a^2l_0/(8N^{n-1}) = a^2l_0/(4 \cdot 2N^{n-1}),$$

то для каждого  $i = 1, \dots, n - 1$  из теоремы 1.1 следует существование такой функции из  $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ , что для ее сужения  $b_{i,i+1}$  на  $\mathbb{R}_+$  выполнено неравенство  $|F_{i,i+1}(t)| \leq 6al_0/(2N^{n-1}) \leq \leq 6al_0/(N^{n-1}) = 6al_1$ , откуда в силу (2.3) и (2.4)

$$|S_{i,i+1}(t)| \leq 6al_1c_i \exp(4al_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

Заметим, что из доказательства теоремы 1.1 следует, что  $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |b_{i,i+1}(t)| \leq 8a/3$ .

Предположим теперь, что для всех  $i, j$ , таких, что  $j - i = 1, 2, \dots, m - 1 < n - 1$ , уже построены функции  $b_{ij} \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R}_+)$  так, что  $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |b_{ij}(t)| \leq 8a/3$  и выполнены неравенства

$$|F_{ij}(t)| \leq 6al_{j-i}, \quad j - i = 1, 2, \dots, m - 1 < n - 1. \tag{2.7}$$

Опять-таки, поскольку функции  $F_{ij}$  имеют вид функции  $F$  в теореме 1.1 и

$$\left| \sum_{k=i+1}^{j-1} \left( \frac{c_k}{c_i} a_{ik} E(a_{kk} - b_{kk} + b_{ii} - a_{ii}; 0, t) F_{kj} - b_{kj} F_{ik} \right) + \frac{c_j}{c_i} a_{ij} E(a_{jj} - b_{jj} + b_{ii} - a_{ii}; 0, t) \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=i+1}^{j-1} (6a^2 \exp(8al_0) \lambda^{k-i} l_{j-k} + 16a^2 l_{k-i}) + \lambda^{j-i} a \exp(8al_0) \leq \\
&\leq 16a^2 \exp(8al_0) \sum_{k=i+1}^{j-1} (l_{j-k} + l_{k-i}) + \lambda a \exp(8al_0) \leq 32a^2 \exp(8al_0) n l_{j-i-1} + a^2 l_0 / (8N^{n-1}) = \\
&= \frac{32 \exp(8al_0) n}{N} \frac{a^2 l_0}{N^{n-j+i}} + \frac{a^2 l_0}{8N^{n-1}} \leq \frac{a^2 l_0}{8N^{n-j+i}} + \frac{a^2 l_0}{8N^{n-j+i}} = \frac{a^2 l_0}{4N^{n-j+i}},
\end{aligned}$$

то в силу теоремы 1.1 для всех  $i, j$  ( $j - i = m$ ) существуют такие функции из  $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ , что для их сужений  $b_{ij}$  на  $\mathbb{R}_+$  выполнены неравенства  $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |b_{ij}(t)| \leq 8a/3$  и

$$|F_{ij}(t)| \leq 6al_0 / N^{n-j+i} = 6al_{j-i}, \quad j - i = m, \quad (2.8)$$

откуда в силу (2.3) и (2.5)

$$|S_{ij}(t)| \leq 6al_{j-i} c_i \exp(4al_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.9)$$

для всех  $i, j$ , таких, что  $j - i = m$ . Таким образом, индукцией по  $j - i$  показано, что (2.8), а следовательно, и (2.9) выполнены для всех  $i, j$ .

Из (2.5)–(2.9) следует, что все элементы матрицы  $S$  ограничены на  $\mathbb{R}_+$ . Ограниченность матрицы  $S^{-1}$  на  $\mathbb{R}_+$  следует теперь из отделенности от нуля в силу (2.4) определителя  $\det S(t) = E(\sum_{i=1}^n (a_{ii} - b_{ii}); 0, t) \det C \geq \exp(-4al_0 n) \det C \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ . Ограниченность же производной  $\dot{S}(t)$  следует из очевидного тождества  $\dot{S}(t) = A(t)S(t) - S(t)B(t)$ .

Таким образом, матрица  $S$  является матрицей Ляпунова и, следовательно, система (2.1) асимптотически эквивалентна системе (2.2) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Теорема доказана.

**Теорема 2.2.** *Для любой линейной системы (2.1) с локально интегрируемыми ограниченными на  $\mathbb{R}_+$  коэффициентами существует асимптотически эквивалентная ей система (2.2) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными вместе со своими производными коэффициентами из множества  $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R}_+)$ .*

**Доказательство** теоремы следует из теоремы Перрона о триангуляции (см., например, [8, с. 263] и теоремы 2.1.

Заметим, что основное отличие полученного результата от теоремы 29.2.1 [8, с. 400] состоит в принадлежности коэффициентов системы (2.2) множеству  $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R}_+)$ , т.е. в ограниченности не только самих коэффициентов, но и всех их производных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовская Т.Г., Храпцов О.В. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 2. С. 31–34.
2. Красовская Т.Г. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 1. С. 45–49.
3. Красовская Т.Г. // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3. С. 88–90.
4. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М., 1967.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб., 1997.
6. Богданов Ю.С. // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707–716.
7. Мазаник С.А. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 923–926.
8. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.

Белорусский государственный университет,  
г. Минск

Поступила в редакцию  
16.05.2004 г.