5. Далалян С. Г. Многообразия Прима двулистного накрытия гиперэллиптической кривой с двумя точками ветвления//Матем. сб. 1975. **98**, вып. 2. 255—267.
6. Белоколос Е. Д., Бобенко А. И., Матвеев В. Б., Энольский В. З. Алгеброгеометрические принципы суперпозиции конечно-зонных решений интегрируемых нелинейных уравнений//Успехи матем. наук. 1986. **41**, вып. 2 (248). 3—42.

Поступила в редакцию
09.02.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1989. № 2

УДК 513.6

А. В. Пухликов

МАКСИМАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ ФАНО V_6^3

1. В работе В. А. Исковских [1] описана группа бирациональных автоморфизмов многообразия Фано V_6^3 — гладкого полного пересечения квадрики и кубики в $\mathbf{P}^5$. Этот результат, полученный методом выделения и исключения или откручивания максимальных особенностей, является одним из наиболее ярких достижений современной бирациональной геометрии в размерности три. К сожалению, данное в [1] доказательство содержит пробел (в шаге 3 доказательства теоремы 4.8, с. 216—218). Настоящая заметка посвящена его устранению. Не вдаваясь в детали, остановимся на ключевых моментах рассуждений, продемонстрируем общую логику исключения максимальных кривых, стягивающихся в точку.

2. Дадим набросок доказательства следующего утверждения. (Мы находимся в ситуации, описанной в § 4 [1], и пользуемся всеми введенными в [1] понятиями и обозначениями.)

Предложение 1. *Предположим, что*: (i) *всякая прямая на V — общего типа, т. е. ее нормальный пучок изоморфен $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\oplus\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$*, (ii) *на V нет трех прямых, проходящих через одну точку и лежащих в одной плоскости. Тогда если на самом многообразии V нет максимальных кривых и точек, то нет и бесконечно близких максимальных особенностей.*

Замечание. Простой счет констант показывает, что для общего многообразия V_6^3 условия (i) и (ii) выполнены. § 4 работы [1] вместе со сформулированным предложением 1 дает полное доказательство теоремы об образующих и соотношениях группы $\mathrm{Bir}\, V_6^3$.

3. Пусть B_{a-1} — максимальная кривая, стягивающаяся в точку $B_0\in V$.

Предложение 2. *Имеет место один из следующих случаев.*

А. *Не существует прямой на V, проходящей через B_0.*

Б. *Через B_0 проходит по меньшей мере одна прямая на V* и либо (*i*) граф Γ_a содержит только одну вершину-плоскость E_1, т. е. $I_2(S)=\{1\}$, либо (ii) $\#I_2(S)\geqslant 2$, граф Γ_a начинается так: $1\leqslant 2\leqslant\ldots$, где B_1 — точка, $E_2\cong\mathbf{P}^2$ и для любой прямой $Z\subset V$, $B_0\in Z$ имеем $B_1\notin\notin Z^1$ (верхний индекс i у цикла обозначает, как всегда, его собственный прообраз на V_i).

В. $\#I_2(S)\geqslant 2$, существует в точности одна прямая $Z\subset V$, такая, что $B_0\in Z$, $B_1\in Z^1$ (B_1 — точка) и либо (i) $I_2(S)=\{1, 2\}$, т. е. Γ_a содержит только две вершины-плоскости E_1 и E_2, а дальше идут линейчатые поверхности, либо (ii) $\#I_2(S)\geqslant 3$, Γ_a начинается так: $1\leqslant 2\leqslant 3\leqslant\ldots$ (возможно, $1\leqslant 3$), B_2 — точка и $B_2\notin Z^2$.

Г. $\#I_2(S)\geqslant 3$, Γ_a начинается так: $1\leqslant 2\leqslant 3\ldots$ (но не $1\leqslant 3$) и существует (единственная) прямая $Z\subset V$, такая, что $B_i\in Z^i$, $i=0, 1, 2$.

Доказательство — это очевидный перебор возможностей.

Замечание. В работе [1] доказано, что возможность А не реализуется. Однако приведенные далее на с. 216—218 рассуждения не исключают ни один из вариантов Б, В, Г. Мы покажем, как привести данные Б—Г к противоречию. Это исключит максимальную особенность и докажет предложение 1.

4. Лемма 1 (лемма о графе). (1) *В ситуации* Б (ii) *предложения* 2 *имеет место альтернатива: либо* а) *существует подграф графа* Γ_a *вида* Б, (i), *для которого выполнено усиленное неравенство Нетера—Фано* (*т. е. существует максимальная особенность, удовлетворяющая условию* Б, (i)), *либо* б) *существует такой набор положительных целочисленных коэффициентов* r_i^*, $i\in I(S)$, *что* (i) $r_i^*=r_i$ *при* $i\in I_2(S)\setminus\{1\}$, (ii) $\sum\limits_{i\in I(S)} r_i^*\nu_i > \sum\limits_{i\in I(S)} r_i^*\delta_{i-1}n$, (iii) класс $\left(-\sum\limits_{i\in I_2(S)} r_i^*e_i\right)$ неотрицателен по отношению к кривым на V_j, стягивающимся в точку на V, (iv) $\left(-\sum\limits_{i\in I_2(S)} r_i^*e_i\cdot b_{j-1}\right)\geqslant r_j^*$ при $j\in I_1(S)$, (v) $r_1^*\leqslant \sum\limits_{i\in I_2(S)\setminus\{1\}} r_i^*$.

(2) В случае В (ii) имеет место альтернатива: либо а) существует подграф графа Γ_a вида Б, (i) или В, (i), для которого выполнено усиленное неравенство Нетера—Фано, либо б) существует такой набор положительных целочисленных коэффициентов r_i^*, $i\in I(S)$, что (i) $r_i^*=r_i$ при $i\in I_2(S)\setminus\{1, 2\}$, выполнены условия (ii)—(v) пункта б) из (1) и вдобавок (vi) $r_2^*\leqslant \sum\limits_{i\in I_2(S)\setminus\{1,2\}} r_i^*$.

(3) В случае Г $r_1=r_2\leqslant \sum\limits_{i\in I_2(S)\setminus\{1\}} r_i$.

Идея доказательства. (1) Исходный набор коэффициентов r_i удовлетворяет условиям (i)—(iv). Если и (v) справедливо, положим $r_i^*=r_i$, $i\in I(S)$. Если же (v) не выполнено, попытаемся сначала заменить лишь r_1. Положим $r_1^*=\sum\limits_{i\in I_2(S), i\to 1} r_i$. Легко проверить, что при данном r_1^* и $r_i^*=r_i$, $i\in I(S)\setminus\{1\}$, свойства (i)—(v) будут выполнены и наша цель достигнута, если только не существует $k\in I_1(S)$, такого, что $B_{k-1,1}\subset E_1\cong \mathbf{P}^2$ — прямая. Пусть k выбрано минимальным. Тогда для сохранения свойства (iii) r_1^* возьмем большим, равным Σr_j, где суммирование распространено на $j\in I_2(S)$, такие, что $j\geqslant 1$ или $j\geqslant k$ («или» означает объединение). Теперь для сохранения (iv) придется изменить r_k^*, заменив его на $r_k^*=\sum\limits_{i\in I_2(S), i\to k} r_i$. Если бы B_{k-1} была единственной кривой в Γ_a, проектирующейся на прямую в E_1, то с выбранными r_1^*, r_k^* и $r_i^*=r_i$ ($i\neq 1, k$) мы получили бы, что если $\nu_1+\nu_k\leqslant 3n$, то выполнено свойство (ii), т. е. в этом случае лемма доказана. В общем случае рассуждения аналогичны: будем менять r_1 и r_i так, как это делалось выше, для тех $i\in I_1(S)$, для которых $B_{i-1,1}$ — прямая в E_1. В результате можно построить набор r_i^* со всеми свойствами кроме (ii). Препятствием к выполнению (ii) может быть лишь подграф графа Γ_a, описанный в (1), а. Аналогично рассуждаем в части (2). Часть (3) тривиальна.

5. Лемма 2. *Случай* Б, (i) *предложения* 2 *не реализуется.*

Доказательство. Заметим, что класс $(h-e_1)$ неотрицателен. Отсюда легко вывести, что $\#I_1(S)\leqslant 2$.

Лемма 3. *Если выполнено условие* (i) *предложения* 1, *то для любой плоскости* $P\subset \mathbf{P}^5$ *и для общей гиперплоскости* $H\subset \mathbf{P}^5$, *содержащей* P, $V\cap H$ — *неособая поверхность.*

Доказательство получается в результате несложных геометрических рассуждений.

Возьмем теперь плоскость P, проходящую через точку B_0 и соответствующую бесконечно близкой прямой B_1. Ограничивая линейную систему $|h'|$ на $V\cap H$, где $H\supset P$ — общая гиперплоскость, и оценивая ее свободный квадрат (т. е. самопересечение свободной части) с учетом того, что выполнено усиленное неравенство Нетера—Фано, а при $\#I_1(S)=2$ B_2 порождает $\geqslant 2$ бесконечно близких базисных точек кратности ν_3, получаем противоречие.

Лемма 4. *Случай* Б *предложения* 2 *не реализуется.*

Доказательство. Ввиду леммы 2 возможен только случай (1), б леммы 1. Но теперь класс $y^*=\sum\limits_{i\in I_2(S)} r_i^*\left(\frac{1}{2}h-e_i\right)$ неотрицателен. Простые вычисления показывают, что $(h'^2\cdot y^*)<0$. Противоречие.

6. Лемма 5. *Случай* Г *предложения* 2 *не реализуется.*

Доказательство состоит из длинной цепочки оценок. Положим

$$y=\sum_{j\in I_2(S)} r_j\left(\frac{1}{2}h-e_j\right).$$

Лемма 6. *Если для кривой* $H\subset V_i$ *выполнено неравенство* $(h\cdot y)<0$, *то* $H_0=Z$.

Доказательство легко следует из части (3) леммы 1.

Положим $\mathcal{J}=\{1\leqslant j\leqslant N\,|\,B_{j-1,0}=Z\}$, $\Delta=\sum\limits_{j\in\mathcal{J}}(b_{j-1}\cdot h)\nu_j^2$ и $\Sigma_i=\sum\limits_{j\in I_i(S)} r_j$, $i=1,\ 2$.

Лемма 7. *Справедливо неравенство*

$$0\leqslant (h'^2\cdot y)<\left(-\Sigma_1^2+\left(\frac{\Delta}{2n^2}-1\right)(\Sigma_1\Sigma_2+\Sigma_2^2)\right)\cdot c,$$

где $c>0$ — *несущественный множитель.*

Доказательство проводится стандартными вычислениями с использованием леммы 6.

Положим $\theta=\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)$, $\Lambda(t,\ \varepsilon)=6n^2-2t^2-\varepsilon^2+\left(t+\frac{\varepsilon-n}{2}\right)^2$ и $q=\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}>0$.

Лемма 8. *Имеют место следующие три неравенства*:

$$\text{(i) } \Delta\leqslant\Lambda(\theta,\ \nu_3),\quad \text{(ii)) } \theta>\frac{2+q}{1+q}n,\quad \text{(iii) } \nu_3>n+\frac{1}{q}(2n-\theta).$$

Доказательство. Пункт (i) получается так: ограничим линейную систему $|h'|$ на общее гиперплоское сечение $H\cap V$, содержащее прямую Z, и оценим самопересечение ее свободной части с учетом того, что каждая бесконечно близкая к Z базисная кривая B_i, накрывающая Z d_i-листно, порождает на $H\cap V$ d_i бесконечно близких базисных точек кратности ν_{i+1}. Пункты (ii) и (iii) следуют из усиленного

неравенства Нетера—Фано (см. [2, § 5], где используется и подробно обсуждается аналогичная техника).

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Lambda(t, \varepsilon)<0$ при $n<t\leqslant 2n$ и $t\geqslant\varepsilon>n$, имеем $\Delta(\theta, \nu_3)\leqslant\Lambda\left(\theta, n+\frac{1}{q}(2n-\theta)\right)=\lambda(\theta)$, где $\lambda(t)=5n^2-t^2-(2n-t)^2\times\times\left(\frac{1}{q}+\frac{3}{4q^2}\right)$.

Лемма 9. (i). *При* $q\geqslant\frac{1}{2}$ *и* $\theta\geqslant\frac{q+2}{q+1}n$ *имеем* $\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{t=\theta}\leqslant 0$.

(ii). *При* $q\leqslant\frac{1}{2}$ *имеем* $\lambda(\theta)\leqslant\frac{5}{3}n^2$.

Доказательство: непосредственные вычисления.

Теперь противоречие достигается такой цепочкой неравенств: из $\theta>x$ следует, что $\Delta\leqslant\lambda(\theta)<4n^2$, откуда ввиду леммы 7 $q<2$, поэтому по лемме 9 $\Delta\leqslant\lambda(\theta)<3n^2$ и в силу леммы 7 $q<1$, теперь снова по лемме 9 $\Delta\leqslant\lambda(\theta)<2\frac{5}{16}n^2$, по лемме 7 $q<\frac{1}{2}$, откуда, наконец, $\Delta<2n^2$, и мы получаем противоречие с неравенством леммы 7, исключающее случай Г.

7. Случай В предложения 2 — промежуточный между случаями Б и Г, для его исключения необходимо скомбинировать аргументы из пп. 5 и 6 настоящей заметки. Случай В,(i) исключается, как Б,(i), если кривая B_2 не пересекает Z^2, и как случай Г, если $B_2\cap Z^2\neq\varnothing$. Случай В,(ii) исключается с помощью леммы 1, (2): положим $y^*=\sum\limits_{i\in I_2(S)} r_i^*\left(\frac{1}{2}h-e_i\right)$, тогда все рассуждения п. 6 проходят, причем с упрощениями, так как из неравенств (v), (vi) леммы 1 (2) можно вывести более сильную, чем в лемме 7, оценку:

$$0\leqslant(h'^2\cdot y^*)<\left(-\Sigma_1^{*2}+\left(\frac{\Delta}{4n^2}-1\right)(\Sigma_1^*\Sigma_2^*+\Sigma_2^{*2})\right)\cdot c,\ \text{где}\ \Sigma_i^*=\sum_{j\in I_i(S)} r_j^*,$$

$i=1, 2$ (c — опять некоторый положительный множитель). Разбор случая В завершает доказательство предложения 1.

8. В заключение отметим, что описанный способ рассуждений идеологически весьма близок к подходу, проведенному в работе автора [2]. Познакомившись с чрезвычайно подробным изложением в статье [2] и следуя предложенной здесь схеме, читатель без труда восстановит все пропущенные детали.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий//Современные проблемы математики. Т. 12. М., 1979. 159—236.
2. Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью//Матем. сб. 1988. **135 (177)**, № 4. 272—296.

Поступила в редакцию
11.11.87