



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

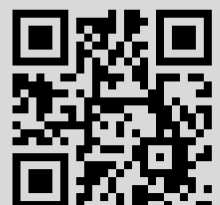
В. Э. Петров, О точных решениях уравнений Ганкеля, *Алгебра и анализ*, 2018, том 30, выпуск 1, 170–207

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

26 марта 2025 г., 13:53:11



## О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГАНКЕЛЯ

© В. Э. ПЕТРОВ

Для оператора Ганкеля на полуоси предъявляются новые случаи явной диагонализации; указываются соответствующие интегральные преобразования и собственные функции непрерывного спектра. В единую методическую схему вложены также известные случаи явной диагонализации. Кроме этого, предъявлен обширный список уравнений Ганкеля, которые в терминах образов соответствующих преобразований сводятся к различным точно решаемым задачам — задаче Римана, задаче Карлемана, обыкновенному дифференциальному уравнению и т.д.

### Введение

В работе [1] предложен коммутаторный метод исследования оператора Ганкеля на полуоси

$$A[u](y) = \int_0^{\infty} a(x+y) u(x) dx. \quad (0.1)$$

Автор рассматривает дифференциальный оператор

$$L = -\frac{d}{dx}(x^2 + \gamma x) \frac{d}{dx} + \alpha x^2 + \beta x \quad (0.2)$$

при  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \geq 0$  и замечает, что известные к настоящему времени явно диагонализуемые операторы Ганкеля коммутируют с оператором  $L$  при некотором подборе параметров.

Точнее, в [1] доказана теорема: если функция  $a$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-(x + \gamma)a''(x) - 2a'(x) + (\alpha x + \beta)a(x) = 0, \quad (0.3)$$

то

$$(AL - LA)f = 0$$

---

*Ключевые слова:* оператор Ганкеля, интегральные преобразования, собственные функции непрерывного спектра.

на всех функциях  $f \in C^2(0, \infty)$ , удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Таким образом, решения уравнения (0.3) при тех или иных наборах параметров дают ядра операторов Ганкеля, диагонализующихся интегральными преобразованиями, ядра которых являются собственными функциями оператора  $L$ . В силу полноты системы собственных функций оператора  $L$ , отсюда следует эквивалентность уравнения Ганкеля и его диагонализированного представления. Эта схема в [1] названа коммутаторной. Для некоторых известных случаев операторов Ганкеля, которые ранее были диагонализированы, в [1] были предъявлены соответствующие наборы параметров; кроме этого, на основе еще одного явного решения уравнения (0.3) был получен новый случай явно диагонализующегося оператора Ганкеля.

В настоящей статье мы предъявляем решения уравнения (0.3) для всех значений параметров, и, на основе этого, вкладываем в коммутаторную схему известные случаи явной диагонализации оператора Ганкеля

$$a(x) = K_0(x) \pm K_1(x); \quad a(x) = \frac{\sin x}{x},$$

изученные ранее другими способами (см. [20, 2]), и не перечисленные в коллекции [1]. Кроме этого, мы получаем новый пример явной диагонализации

$$a(x) = x^{-1}M_{\omega, 1/2}(2ix),$$

имеющий ту же общность, что и пример Розенблюма [15]. Попутно доказано, что примеры явной диагонализации операторов Ганкеля на основе уравнения (0.3) исчерпаны.

Также мы получаем новые случаи диагонализующихся операторов Ганкеля с ядрами

$$a(x) = x^{-1}K_0(x), \quad a(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}, \quad a(x) = \Phi_1(1, \beta, \beta + 2; -1; x),$$

которые не являются решениями уравнения (0.3). Кроме этого, мы предъявляем обширный перечень случаев, когда уравнение Ганкеля явно решается без диагонализации оператора.

В основном, в статье рассматриваются сингулярные операторы, ядра которых на бесконечности и (или) в начале имеют порядок  $a(x) \sim x^{-1}$ . Несколько примеров связаны с неограниченными операторами, ядра которых имеют асимптотики  $a(x) \sim x^{-1} \ln x$ , и совсем не рассматриваются растущие ядра с большей сингулярностью.

Выбранная в [1] схема исследования уравнения Ганкеля на основании теории оператора  $L$  базируется на “какой-либо самосопряженной реализации” этого оператора и, следовательно, вещественности коэффициентов. Однако требование вещественности коэффициентов значительно сужает применимость метода. Например, если мы сумели диагонализировать оператор с ядром  $x^{-1}e^{-x}$ , то очевидными заменами переменной мы сумеем диагонализировать и оператор с ядром  $x^{-1}e^{-\theta x}$ , если  $\theta > 0$ . Однако если  $\theta$  — комплексное число (из правой полуплоскости), то коэффициенты оператора  $L$  перестают быть вещественными, либо оператор следует рассматривать не на вещественной полуоси. В то же время, при любом  $\theta : \operatorname{Re} \theta \geq 0$  (даже при чисто мнимом) оператор диагонализуется.

Наш подход опирается на метод интегральных преобразований. Его применение к диагонализации интегральных операторов будет основано на следующих положениях.

Пусть на некоторых (одномерных) множествах  $\Omega \subset \mathbb{R}$ ,  $Q \subset \mathbb{C}$  заданы функциональные пространства  $\mathcal{H}(\Omega)$  и  $\mathcal{G}(Q)$ . Конкретно в настоящей работе мы встретимся со следующими случаями:

$$\Omega = [0, \infty), [0, 1), (-1, 1); \quad Q = [0, \infty), (-\infty, \infty), (ic - \infty, ic + \infty).$$

Пространства  $\mathcal{H}(\Omega)$  и  $\mathcal{G}(Q)$  — это некоторые нормированные линейные пространства измеримых (по Лебегу) функций в  $\Omega$  и  $Q$  соответственно (их выбор всегда конкретен). Интегральное преобразование — это непрерывный оператор  $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$  с ядром  $\varphi(\xi, y)$ , где  $y \in \Omega$ ,  $\xi \in Q$ , заданный формулой:

$$\Phi[f](\xi) = F(\xi) = \int_{\Omega} f(y)\varphi(\xi, y) dy. \quad (0.4)$$

Пусть, далее, известно обратное преобразование  $\Phi^{-1} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  с ядром  $\psi(x, \xi)$ , действующее по формуле:

$$\Phi^{-1}[F](x) = f(x) = \int_Q F(\xi)\psi(x, \xi) d\xi. \quad (0.5)$$

Подчеркнем, что для одного и того же интегрального преобразования  $\Phi$  можно выбрать различные функциональные реализации, однако, не это является предметом настоящей работы, и для наших целей их выбор безразличен. Мы предполагаем, что ядра преобразований не вырождаются внутри областей и могут обращаться в нуль разве лишь на границах. Взаимную однозначность и взаимнообратность введенных преобразований

можно записать следующим формальным образом (условия полноты и ортогональности):

$$\int_Q \psi(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi = \delta(x - y), \quad (0.6)$$

и

$$\int_\Omega \varphi(\xi, x) \psi(x, \omega) dx = \delta(\xi - \omega). \quad (0.7)$$

Фактически, это явная запись равенств

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\Phi &= I_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}}, \\ \Phi\Phi^{-1} &= I_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим на  $\Omega$  интегральный оператор  $\mathbf{K}$  с ядром  $K(x, y)$ ,  $x, y \in \Omega$ :

$$\mathbf{K}[u](x) = \int_\Omega K(x, y) u(y) dy, \quad u \in \mathcal{H},$$

а на  $Q$  — интегральный оператор  $\mathbf{T}$  с ядром  $T(\xi, \eta)$ ,  $\xi, \eta \in Q$ :

$$\mathbf{T}[U](\xi) = \int_Q T(\xi, \eta) U(\eta) d\eta, \quad U \in \mathcal{G}.$$

Мы будем говорить, что оператор  $\mathbf{K}$  диагонализует преобразованием  $\Phi$ , если в  $\Phi$ -представлении он становится оператором умножения на функцию, то есть

$$\Phi\mathbf{K}[u](\xi) = V(\xi) \Phi[u](\xi) \equiv V(\xi) U(\xi), \quad u \in \mathcal{H}, \quad U \in \mathcal{G}.$$

С точностью до оправдания замен порядка интегрирования, справедлива следующая теорема.

**Теорема 0.1.** *Интегральное преобразование  $\Phi$  диагонализует интегральный оператор  $\mathbf{K}$  тогда и только тогда, когда ядро  $K(x, y)$  имеет интегральное представление*

$$K(x, y) = \int_Q V(\xi) \varphi(\xi, y) \psi(x, \xi) d\xi, \quad (0.8)$$

*Интегральное преобразование  $\Phi^{-1}$  диагонализует интегральный оператор  $\mathbf{T}$  тогда и только тогда, когда ядро  $T(\xi, \eta)$ , имеет интегральное*

представление

$$T(\xi, \eta) = \int_{\Omega} v(x) \psi(x, \eta) \varphi(\xi, x) dx, \quad (0.9)$$

то есть

$$\Phi^{-1} \mathbf{T}[U](x) = v(x) \Phi^{-1}[U](x) \equiv v(x) u(x).$$

Теорема 0.1 — это явная запись того факта, что

$$\mathbf{K} = \Phi^{-1} V \Phi,$$

а

$$\mathbf{T} = \Phi v \Phi^{-1}.$$

Подчеркнем, что утверждение имеет характер критерия: если мы каким-либо образом установили, что некоторый оператор  $\mathbf{K}$  диагонализуется преобразованием  $\Phi$ , то существует такая функция  $V(\xi)$ ,  $\xi \in Q$ , что ядро этого оператора имеет вид (0.8).

Ядро  $\psi(x, \eta)$  обратного преобразования является “собственной функцией непрерывного спектра” оператора  $\mathbf{K}$ , при этом спектр — это “область значений функции  $V(\eta)$ ”:

$$\int_{\Omega} \psi(y, \eta) K(x, y) dy = V(\eta) \psi(x, \eta), \quad \forall \eta \in Q. \quad (0.10)$$

Кавычки здесь означают то, что  $\psi(x, \eta)$ , как функция от  $x$  и нумерованная параметром  $\eta$ , не обязана принадлежать пространству  $\mathcal{H}$ , так же как значение функции  $V(\eta)$  в точке может быть не определено. Отметим, что иногда мы будем говорить о диагонализации уравнения, имея в виду преобразование интегрального уравнения к алгебраическому.

Следующие две теоремы касаются применения теории интегральных преобразований к решению интегральных уравнений. Для простоты предположим достаточную дифференцируемость по  $\xi$  функций<sup>1</sup>  $V(\xi)$ ,  $\varphi(\xi, y)$ ,  $\psi(x, \xi)$ .

**Теорема 0.2.** *Рассмотрим однородное интегральное уравнение*

$$\lambda u_0(x) - \int_{\Omega} u_0(y) K(x, y) dy = 0 \quad (0.11)$$

с ядром (0.8). Пусть для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C}$  уравнение  $\lambda - V(\xi) = 0$  имеет ровно  $N$  изолированных корней  $\xi_k$  кратности  $\alpha_k \in \mathbb{N}$ . В том числе,

<sup>1</sup>В настоящей статье эти функции будут даже аналитическими по  $\xi$ .

не исключается случай  $N = \infty$ . Тогда уравнение (0.11) имеет  $\sum_{k=1}^N \alpha_k$  линейно независимых решений:

$$u_{k,m}(x) = \left. \frac{d^m}{d\xi^m} \psi(x, \xi) \right|_{\xi=\xi_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, (\alpha_k - 1),$$

а общее решение однородного уравнения будет их линейной комбинацией:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{\alpha_k-1} \gamma_{km} \left. \frac{d^m}{d\xi^m} \psi(x, \xi) \right|_{\xi=\xi_k}. \quad (0.12)$$

**Доказательство.** Действительно,  $\Phi$ -образ уравнения (0.11) в силу теоремы 0.1 имеет вид:

$$(\lambda - V(\xi))U_0(\xi) = 0, \quad \xi \in Q. \quad (0.13)$$

Если

$$\lambda - V(\xi) \sim c(\xi - \xi_k)^{\alpha_k}, \quad \xi \rightarrow \xi_k,$$

то решениями уравнения (0.13) (в смысле обобщенных функций) будут функции

$$U_{k,m}(\xi) = (-1)^m \delta^{(m)}(\xi - \xi_k), \quad m = 0, \dots, (\alpha_k - 1).$$

Стало быть, решениями уравнения (0.11) будут функции

$$u_{k,m}(x) = \int_Q U_{k,m}(\xi) \psi(x, \xi) d\xi = \left. \frac{d^m}{d\xi^m} \psi(x, \xi) \right|_{\xi=\xi_k}, \quad m = 0, \dots, (\alpha_k - 1).$$

Естественно, все введенные величины ( $N, \xi_k, \alpha_k, u_{k,m}(x)$ ) зависят от числа  $\lambda$ .  $\square$

**Теорема 0.3.** Пусть выполнены условия теоремы 0.2. Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение

$$\lambda u(x) - \int_{\Omega} u(y) K(x, y) dy = f(x). \quad (0.14)$$

Для существования решения этого уравнения необходимо и достаточно выполнение равенств

$$F^{(m)}(\xi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, (\alpha_k - 1).$$

В этом случае частное решение уравнения (0.14) представляется в виде:

$$u(x) = \lambda^{-1} \left( f(x) + \int_{\Omega} f(y) \int_Q R(\xi) \varphi(\xi, y) \psi(x, \xi) d\xi dy \right), \quad (0.15)$$

где  $R(\xi) = V(\xi)/(\lambda - V(\xi))$ .

### Дифференцируемость функции

$$F(\xi) = \Phi[f](\xi)$$

обычно следует из уже предположенной дифференцируемости ядра прямого преобразования. Если же производную нельзя вносить под знак интеграла, то дифференцируемость надо предполагать.

Настоящая статья имеет выраженный формульный характер. Все функциональные вопросы, связанные с существованием тех или иных интегралов (фактически, задание пространств  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{G}$ ) детально рассматриваются в соответствующих руководствах по интегральным преобразованиям и здесь вообще не обсуждаются.

В ходе изложения мы будем использовать множество различных интегральных преобразований. Для каждого из них предложить свое уникальное обозначение невозможно. Мы будем пользоваться следующими договоренностями. По умолчанию, для преобразования, рассматривающегося в данный момент:

- будет использоваться обозначение  $\Phi$ ; исключения сделаны только для преобразования Меллина  $\mathcal{M}$  (см. [24] и формулу (1.9) настоящей статьи) и для преобразования на отрезке  $\mathcal{P}$  (см. [16] и формулу (3.4) настоящей статьи);
- ядра прямого и обратного преобразования будут обозначаться  $\varphi(\xi, y)$  и  $\psi(x, \xi)$  соответственно;
- прообраз и образ обозначаются строчной и прописной буквами.

В статье приняты стандартные обозначения специальных функций, соответствующие справочникам [3, 4]. Например,  $K_\nu(z)$  — модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда);  $W_{\beta, \mu}(x)$ ,  $M_{\beta, \mu}(x)$  — функции Уиттекера;  $Ei(z)$  — интегральная экспонента;  $\Phi_1(\alpha, \beta, \beta'; x, y)$  — вырожденная гипергеометрическая функция двух переменных и т.д.

### §1. Эквивалентные записи уравнения Ганкеля

В этом параграфе мы преобразуем уравнение Ганкеля

$$\lambda u(x) - \int_0^\infty a(x+y) u(y) dy = f(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (1.1)$$

к более удобным для исследования формам на полуоси и на отрезке. Пусть для функции  $a(x)$  существует плотность  $w(\tau)$  такая, что

$$a(x) = \int_0^\infty w(\tau) e^{-x\tau} d\tau. \quad (1.2)$$



Подставим это представление в уравнение (1.1), применим преобразование Лапласа и обозначим Лаплас-образ шляпкой:

$$\widehat{u}(p) = \int_0^{\infty} u(y) e^{-py} dy.$$

Тогда на функцию  $\widehat{u}(p)$  получим уравнение:

$$\lambda \widehat{u}(p) - \int_0^{\infty} \widehat{u}(\tau) w(\tau) \left( \int_0^{\infty} e^{-x(p+\tau)} dx \right) d\tau = \widehat{f}(p)$$

или

$$\lambda \widehat{u}(p) - \int_0^{\infty} \widehat{u}(\tau) w(\tau) \frac{1}{\tau + p} d\tau = \widehat{f}(p), \quad 0 < p < \infty. \quad (1.3)$$

Особо отметим, что, найдя  $\widehat{u}(p)$ , нам нет нужды применять обратное преобразование, чтобы найти  $u(x)$ , поскольку уравнение (1.1) с учетом представления (1.2) может быть записано в виде:

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} \widehat{u}(\tau) w(\tau) e^{-\tau x} d\tau = f(x). \quad (1.4)$$

Отсюда видно, что для восстановления функции  $u(x)$  достаточно найти  $\widehat{u}(p)$  только при  $p \in \text{supp } w$ . При  $\lambda = 0$  указанный трюк не применим. В этом случае придется фактически обращать преобразование Лапласа. Из (1.4) с использованием равенства (0.10) следует также простой способ определения “собственных функций” оператора Ганкеля (0.1). Действительно, пусть оператор

$$B[\widehat{u}](p) = \int_0^{\infty} \frac{\widehat{u}(\tau) w(\tau)}{\tau + p} d\tau$$

диагонализуется преобразованием  $\Phi$ , т.е.

$$B = \Phi^{-1} V \Phi.$$

Как и в условии теоремы 0.2, предположим, что уравнение  $\lambda - V(\xi) = 0$  имеет ровно  $N = N(\lambda)$  различных корней  $\xi_1, \dots, \xi_N$  кратностей  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  соответственно. Если для преобразования  $\Phi$  известно обратное, т.е., известно ядро  $\psi(\tau, \xi)$ , то собственные функции оператора Ганкеля (0.1),

соответствующие собственному числу  $\lambda \neq 0$ , можно записать в виде интегрального представления

$$u_{k,m}(x; \lambda) = \int_0^{\infty} w(\tau) \frac{\partial^m \psi(\tau, \xi)}{\partial \xi^m} \Big|_{\xi=\xi_k} e^{-\tau x} d\tau,$$

$$k = 1, \dots, N(\lambda), \quad m = 0, 1, \dots, (\alpha_k - 1).$$

Полагая  $\xi = (1-p)/(1+p)$ , можно свести уравнение (1.3) на отрезок:

$$\lambda v(\xi) - \int_{-1}^1 v(\eta) \frac{q(\eta)}{1-\xi\eta} d\eta = g(\xi), \quad (1.5)$$

где

$$v(\xi) = \hat{u} \left( \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) \frac{1}{1+\xi}, \quad q(\xi) = w \left( \frac{1-\xi}{1+\xi} \right), \quad g(\xi) = \hat{f} \left( \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) \frac{1}{1+\xi}.$$

Ядра такого типа, как в уравнении (1.5), возникают в теории смешанных краевых задач (например, уравнения Трикоми, Геллерстедта и Лаврентьева–Бицадзе, см. [14, 13, 16]). Разлагая  $(1-\xi\eta)^{-1}$  в степенной ряд, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda v_m - \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} v_k = g_m, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (1.6)$$

где

$$v_m = \int_{-1}^1 v(\xi) q(\xi) \xi^m d\xi, \quad g_m = \int_{-1}^1 f(\xi) q(\xi) \xi^m d\xi, \quad c_m = \int_{-1}^1 q(\xi) \xi^m d\xi.$$

Еще один способ сведения уравнения Ганкеля к бесконечной линейной алгебраической системе будет указан ниже (см. п. 5.1).

Представление уравнения Ганкеля (1.1) в виде (1.3) дает нам новые возможности. В частности, если задача состоит в решении уравнения, а не в диагонализации оператора. Но прежде покажем, как в эту схему вписываются примеры из работы [1]. При этом ядра будут именованы в

соответствии с историческими сведениями, приведенными в [1]:

$a(x)$	Промежуток	Название
$x^{-1}$	$0 < x < \infty$	Ядро Карлемана
$x^{-1}$	$1 < x < \infty$	Ядро Мелера
$(x+2)^{-1}$	$0 < x < \infty$	Ядро Мелера в записи Яфаева
$x^{-1}e^{-x}$	$0 < x < \infty$	Ядро Магнуса
$x^{-1}W_{-\beta, 1/2}(2x)$	$0 < x < \infty$	Ядро Розенблюма
$\sqrt{8/x} K_1(\sqrt{8x})$	$0 < x < \infty$	Ядро Яфаева

**1.1. Ядро Карлемана.** Пусть  $w(\tau) = 1$ . Тогда  $a(x) = x^{-1}$ , и мы видим, что уравнение Карлемана вида (1.3)

$$\lambda \widehat{u}(p) - \int_0^{\infty} \frac{\widehat{u}(\tau)}{\tau + p} d\tau = \widehat{f}(p) \quad (1.7)$$

переходит снова в уравнение Карлемана вида (1.1):

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} \frac{u(y)}{x+y} dy = f(x). \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) сводится к алгебраическому преобразованием Меллина

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[u](\xi) = U(\xi) &= \int_0^{\infty} y^{i\xi-1/2} u(y) dy; \\ u(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} x^{-i\xi-1/2} U(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где постоянную  $ic$  выбирают в полосе аналитичности обращаемого Меллин-образа. При этом пользуются следующими свойствами преобразования Меллина:

$$\mathcal{M} \left[ \int_0^{\infty} \frac{1}{y} g\left(\frac{x}{y}\right) f(y) dy \right] (\xi) = F(\xi) G(\xi), \quad \mathcal{M} \left[ \frac{1}{y+1} \right] (\xi) = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi}. \quad (1.10)$$

В силу (1.10) постоянную  $c$ , участвующую в записи обратного преобразования, следует выбирать в интервале  $-1/2 < c < 1/2$  (в этой полосе аналитична функция  $\pi / \operatorname{ch} \pi \xi$ ). В частности, можно положить  $c = 0$ .

Меллин-образ уравнения (1.8) имеет вид:

$$U(\xi) \left( \lambda - \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} \right) = F(\xi). \quad (1.11)$$

Если уравнение однородное, то следует найти корни уравнения

$$\lambda - \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} = 0, \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

Прежде всего, очевидно, что при  $\lambda \notin [0, \pi]$  корней нет. При  $\lambda \in [0, \pi]$  мы имеем две ветви корней:

$$\xi_k^{(1)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arsh} \pi \lambda^{-1} + 2ik, \quad \xi_k^{(2)} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arsh} \pi \lambda^{-1} + 2ik, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В общем случае, поскольку ширина полосы аналитичности равна 1, а период последовательностей корней равен 2, то для данного  $\lambda$  возможны варианты:

(i) в полосе два различных корня, (ii) в полосе один двукратный корень, (iii) в полосе нет корней, (iv) корень одного семейства принадлежит полосе, а второго — нет. В нашем случае корни выписаны явно, и последние два случая невозможны, а оба случая (i) и (ii) могут быть реализованы. Это означает, что спектр двукратный: для любого  $\lambda$ , для которого есть хотя бы один корень из полосы, есть обязательно и второй и, значит, любому такому  $\lambda$  соответствует ровно две собственные функции. По теореме 0.2 можно выписать решения во всех этих случаях (в [1] также выписаны эти собственные функции, однако, не учтен случай (ii)):

$$(i) \quad u_{0,1}(x) = x^{-1/2-i\xi_0}, \quad u_{0,2}(x) = x^{-1/2+i\xi_0}, \quad \xi_0 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arsh} \pi \lambda^{-1}, \quad \lambda \neq \pi;$$

$$(ii) \quad u_{0,1}(x) = x^{-1/2}, \quad u_{0,2}(x) = x^{-1/2} \ln x, \quad \lambda = \pi.$$

## 1.2. Ядра Мелера и Магнуса.

- Пусть  $w(\tau) = \theta(\tau - 1)$ , где  $\theta$  — функция Хевисайда. Тогда

$$a(x) = x^{-1} e^{-x}.$$

Следовательно, уравнение Мелера вида (1.3)

$$\lambda \widehat{u}(p) - \int_1^{\infty} \frac{\widehat{u}(\tau)}{\tau + p} d\tau = \widehat{f}(p), \quad (1.12)$$

переходит в уравнение Магнуса вида (1.1):

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} u(y) \frac{e^{-(x+y)}}{x+y} dy = f(x). \quad (1.13)$$

• Пусть  $w(\tau) = e^{-2\tau}$ . Тогда  $a(x) = (x+2)^{-1}$ . В этом случае уравнение Мелера (в записи Яфаева) вида (1.1)

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} u(y) \frac{1}{x+y+2} dy = f(x) \quad (1.14)$$

соответствует уравнению

$$\lambda \hat{u}(p) - \int_0^{\infty} \hat{u}(\tau) \frac{e^{-2\tau}}{\tau+p} d\tau = \hat{f}(p),$$

которое переходит в уравнение Магнуса для функции  $u_1(p) = \hat{u}(p)e^{-p}$ :

$$\lambda u_1(p) - \int_0^{\infty} u_1(\tau) \frac{e^{-(\tau+p)}}{\tau+p} d\tau = \hat{f}(p)e^{-p} = f_1(p). \quad (1.15)$$

Сведение уравнения Мелера (1.12) к алгебраическому проводится преобразованием Мелера–Фока:

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \int_1^{\infty} u(y) P_{-1/2+i\xi}(y) dy, \\ u(x) &= \int_0^{\infty} \xi \operatorname{th} \pi \xi U(\xi) P_{-1/2+i\xi}(x) d\xi, \end{aligned} \quad (1.16)$$

и основано на знаменитой формуле Мелера:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\tau+p} P_{-1/2+i\xi}(\tau) d\tau = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} P_{-1/2+i\xi}(p). \quad (1.17)$$

Обозначим через  $\hat{U}(\xi)$  и  $\hat{F}(\xi)$  образы Мелера–Фока функций  $\hat{u}(p)$  и  $\hat{f}(p)$  соответственно. Тогда уравнение (1.12) диагонализуеться:

$$\hat{U}(\xi) \left( \lambda - \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} \right) = \hat{F}(\xi), \quad 0 < \xi < \infty. \quad (1.18)$$

Полагая  $\widehat{f}(\tau) = 0$ , получаем, что спектр оператора Мелера простой и заполняет промежуток  $\lambda \in [0, \pi]$ . Таким образом, в силу (1.16), по теореме 0.2 получаем выражение для собственной функции, соответствующей собственному числу  $\lambda$ :

$$\widehat{u}_\lambda(p) = P_{-1/2+i\xi(\lambda)}(p), \quad \xi(\lambda) = \pi^{-1} \operatorname{arch}(\pi\lambda^{-1}), \quad \lambda \in [0, \pi].$$

Диагонализацию уравнения Магнуса (1.13) удобно провести для наглядности двумя способами. Первый основан на готовой диагонализации уравнения (1.12). Действительно, искомый оператор является композицией преобразования Лапласа и преобразования Мелера–Фока, то есть его ядро можно записать в виде (см. [8, 2.17.7.1]):

$$\varphi(\xi, y) = \int_1^\infty P_{-1/2+i\xi}(\tau) e^{-\tau y} d\tau = y^{-1/2} K_{i\xi}(y). \quad (1.19)$$

Второй способ основан на теореме 0.1. Рассмотрим преобразование Конторовича–Лебедева:

$$U(\xi) = \int_0^\infty y^{-1} K_{i\xi}(y) u(y) dy, \quad u(x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \xi \operatorname{sh} \pi\xi K_{i\xi}(x) U(\xi) d\xi. \quad (1.20)$$

В этом преобразовании:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, y) &= y^{-1} K_{i\xi}(y), \\ \psi(x, \xi) &= 4\pi^{-2} \xi \operatorname{sh} \pi\xi K_{i\xi}(x). \end{aligned}$$

В силу теоремы 0.1, это преобразование диагонализует интегральные операторы, ядра которых имеют интегральные представления

$$k(x, y) = \frac{4}{\pi^2 y} \int_0^\infty V(\xi) \xi \operatorname{sh} \pi\xi K_{i\xi}(x) K_{i\xi}(y) d\xi.$$

Пользуясь формулой (см. [7, 2.16.52.10])

$$\frac{4}{\pi^2 y} \int_0^\infty \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi\xi} \xi \operatorname{sh} \pi\xi K_{i\xi}(x) K_{i\xi}(y) d\xi = 2\sqrt{\frac{x}{y}} \frac{e^{-x-y}}{x+y}, \quad (1.21)$$

получим, что уравнение Магнуса, записанное на функцию  $x^{1/2}u(x)$ , диагонализуется преобразованием (1.20), что в точности означает формулу (1.19).

**1.3. Аналитическое продолжение.** Покажем, как развиваемая техника “работает” в случае комплексных параметров. Рассмотрим ядро

$$a(x) = x^{-1}e^{-\theta x}, \quad \operatorname{Re} \theta \geq 0.$$

Пусть сначала  $\operatorname{Re} \theta > 0$ . Без ограничения общности будем везде ниже считать

$$|\theta| = 1, \quad \theta = e^{i\rho}, \quad -\pi/2 < \rho < \pi/2.$$

Будем пользоваться следующими взаимнообратными формулами для преобразования Конторовича–Лебедева<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \int_0^{\infty} y^{-1} K_{i\xi}(\theta y) u(y) dy, \\ u(x) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \xi \operatorname{sh} \pi \xi K_{i\xi}(\theta x) U(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Эти формулы оправданы — для обратного преобразования (равенство (0.7)) в работе [12], а для прямого преобразования (равенство (0.6)) в работе [11]. Банаховы пространства, где справедливы взаимнообратные и взаимно-однозначные равенства (1.22), имеют весьма нетривиальные описания и указаны в упомянутых выше работах. Для нас важно, что можно применить теорему 0.1 к преобразованию (1.22) и использовать равенство (1.21) не только при вещественных  $x, y$ , но и во всей области, указанной в формуле [7, 2.16.52.10]:  $|\arg x|, |\arg y| < \pi$ , то есть везде, кроме отрицательной полуоси. Тем более, это будет справедливо для  $x, y$  из правой полуплоскости. Делая замены  $x \mapsto \theta x, y \mapsto \theta y$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2 y} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} \xi \operatorname{sh} \pi \xi K_{i\xi}(\theta x) K_{i\xi}(\theta y) d\xi &= 2 \sqrt{\frac{x}{y}} \frac{e^{-\theta(x+y)}}{x+y}, \\ x, y &\in (0, \infty), \quad \operatorname{Re} \theta > 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Таким образом, уравнение

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} u(y) \frac{e^{-\theta(x+y)}}{x+y} dy = f(x) \tag{1.24}$$

<sup>2</sup>Преобразования, ядра которых — цилиндрические функции с мнимым значком, называются преобразованиями Конторовича–Лебедева.

приводится к алгебраическому виду преобразованием

$$U(\xi) = \int_0^{\infty} y^{-1/2} K_{i\xi}(\theta y) u(y) dy, \quad (1.25)$$

$$u(x) = \frac{4}{\pi^2} x^{-1/2} \int_0^{\infty} \xi \operatorname{sh} \pi \xi K_{i\xi}(\theta x) U(\xi) d\xi.$$

Имеет смысл отдельно выделить вопрос о чисто мнимых значениях параметра  $\theta$ . В этом случае удобно использовать преобразование (которое также относится к классу преобразований Конторовича–Лебедева, см. [13]):

$$U(\xi) = \int_0^{\infty} y^{-1} u(y) H_{i\xi}^{(2)}(y) dy, \quad (1.26)$$

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \xi \operatorname{sh} \pi \xi e^{\pi \xi} H_{i\xi}^{(2)}(x) U(\xi) d\xi,$$

где  $H_{i\xi}^{(2)}(y)$  — вторая функция Ганкеля (см. [4]). Формально это преобразование соответствует равенствам (1.22) при  $\theta = i$ , а функциональные пространства  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$  здесь могут быть указаны явно:

$$\mathcal{H} = y^{-1/2} L_1(0, \infty), \quad \mathcal{G} = \xi^{1/2} e^{3\pi \xi/2} L_1(0, \infty).$$

Вместе с тем, равенство (1.23) справедливо при  $\theta = i$  и, будучи записанным в терминах функции Ганкеля, приобретает вид:

$$\frac{1}{y} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} \xi \operatorname{sh} \pi \xi e^{\pi \xi} H_{i\xi}^{(2)}(x) H_{i\xi}^{(2)}(y) d\xi = 2 \sqrt{\frac{x}{y}} \frac{e^{-i(x+y)}}{x+y}, \quad (1.27)$$

$$x, y \in (0, \infty).$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} \frac{1}{x+y+2\theta} u(y) dy = f(x), \quad |\arg \theta| < \frac{\pi}{2}, \quad (1.28)$$

и докажем, что оно диагонализуется преобразованием

$$U(\xi) = \Phi[u](\xi) = \theta^{-1} \int_0^{\infty} u(y) P_{-1/2+i\xi}(y\theta^{-1} + 1) dy. \quad (1.29)$$



Действительно, так как

$$\frac{1}{x+2\theta} = \int_0^{\infty} e^{-2\theta\tau} e^{-x\tau} d\tau,$$

то нам достаточно рассмотреть уравнение (1.3) вида

$$\lambda \widehat{u}(p) - \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\theta\tau}}{\tau+p} \widehat{u}(\tau) d\tau = \widehat{f}(p).$$

Обозначая  $u_1(p) = e^{-\theta p} \widehat{u}(p)$ ,  $f_1(p) = e^{-\theta p} \widehat{f}(p)$ , получаем:

$$\lambda u_1(p) - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\theta(p+\tau)}}{p+\tau} u_1(\tau) d\tau = f_1(p). \quad (1.30)$$

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (1.24) и, следовательно, диагонализуется преобразованием (1.25). Стало быть, имеем:

$$U_1(\xi) = \int_0^{\infty} p^{-1/2} u_1(p) K_{i\xi}(\theta p) dp = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} p^{-1/2} K_{i\xi}(\theta p) e^{-p(\theta+x)} dp \right) u(x) dx;$$

$$u_1(\tau) = \frac{4}{\pi^2} \tau^{-1/2} \int_0^{\infty} \xi \operatorname{sh} \pi \xi K_{i\xi}(\theta \tau) U_1(\xi) d\xi,$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} u_1(p) e^{p(x+\theta)} dp.$$

Вычисляя все интегралы в соответствии с формулами [7, 2.16.6.3] и [3, 5.15 (23)], получим следующую теорему.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\rho \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Тогда следующие преобразования взаимнообратны:

$$U(\xi) = e^{i\rho} \int_0^{\infty} P_{-1/2+i\xi}(ye^{i\rho} + 1) u(y) dy,$$

$$u(x) = \int_0^{\infty} \xi \operatorname{th} \pi \xi P_{-1/2+i\xi}(xe^{i\rho} + 1) U(\xi) d\xi.$$

#### 1.4. Ядро Яфаева. Связь с ядром Магнуса.

- Пусть  $w(\tau) = \exp(-2/\tau)$ . Тогда (см. [6, 2.3.16.1])

$$a(x) = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{2}{\tau} - \tau x\right\} d\tau = \sqrt{\frac{8}{x}} K_1(\sqrt{8x}). \quad (1.31)$$

Следовательно, уравнение (1.1) — это уравнение с ядром Яфаева, а уравнение (1.3) имеет вид

$$\lambda \widehat{u}(p) - \int_0^{\infty} \widehat{u}(\tau) \exp\left\{-\frac{2}{\tau}\right\} \frac{1}{\tau + p} d\tau = \widehat{f}(p),$$

которое заменами

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &= \zeta, \\ p^{-1} &= q, \\ v(q) &= p e^{-1/p} \widehat{u}(p), \\ g(q) &= p e^{-1/p} \widehat{f}(p) \end{aligned}$$

сводится к уравнению Магнуса:

$$\lambda v(q) - \int_0^{\infty} v(\zeta) \frac{e^{-(q+\zeta)}}{q + \zeta} d\zeta = g(q).$$

Найдем преобразование, диагонализующее уравнение Ганкеля с ядром (1.31), пользуясь только что выведенной связью ядра Магнуса и ядра Яфаева: ядро искомого преобразования будет композицией ядра преобразования Лапласа, замены переменной и ядра (1.19). Имеем (см. [7, 2.16.9.4]):

$$\varphi(\xi, y) = \int_0^{\infty} q^{-3/2} e^{-q-y/q} K_{i\xi}(q) dq = \sqrt{\frac{4\pi}{y}} K_{2i\xi}(y). \quad (1.32)$$

Из общей формулы (1.20) легко выписать формулу обратного к (1.32) преобразования:

$$\sqrt{x} u(x) = \frac{8}{\pi^{5/2}} \int_0^{\infty} \xi \operatorname{sh} 2\pi\xi K_{2i\xi}(x) U(\xi) d\xi.$$

**1.5. Ядро Розенблюма и матрица Гильберта.** Немного сложнее исследуется ядро Розенблюма (см. [6, 2.3.6.6])

$$\begin{aligned} a(x) &= \Gamma(\beta + 1) x^{-1} W_{-\beta, 1/2}(2x) \\ &= \int_1^{\infty} \left( \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right)^{\beta} e^{-\tau x} d\tau, \quad \operatorname{Re} \beta > -1. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Отметим здесь, что в [1] оператор Ганкеля с ядром Розенблюма рассмотрен при всех вещественных значениях параметра  $\beta$ , тогда как мы рассматриваем и комплексные значения параметра, но накладываем ограничение  $\operatorname{Re} \beta > -1$ . Оба ограничения имеют методические причины. Наше условие обусловлено требованием сходимости интегрального представления функции Уиттекера. Уравнение (1.3) приобретает вид:

$$\lambda \widehat{u}(p) - \int_1^{\infty} \left( \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right)^{\beta} \frac{\widehat{u}(\tau)}{\tau + p} d\tau = \widehat{f}(p), \quad (1.34)$$

и является обобщением уравнения Мелера (1.12). Его диагонализация проводится с помощью обобщенного преобразования Мелера–Фока (см. [23]) и формулы:

$$\int_1^{\infty} \left( \frac{p - 1}{p + 1} \right)^{\beta/2} \frac{1}{p + \tau} P_{-1/2+i\xi}^{-\beta}(p) dp = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} \left( \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right)^{-\beta/2} P_{-1/2+i\xi}^{-\beta}(\tau).$$

Для ее доказательства надо представить

$$(p + \tau)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-x(p+\tau)} dx$$

и последовательно воспользоваться формулами [8, 2.17.7.4 и 2.19.4.5].

Следовательно, применяя к (1.34) преобразование

$$U(\xi) = \int_1^{\infty} \left( \frac{p - 1}{p + 1} \right)^{\beta/2} \widehat{u}(p) P_{-1/2+i\xi}^{-\beta}(p) dp,$$

получаем:

$$U(\xi) \left( \lambda - \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} \right) = F(\xi).$$

Обратное преобразование имеет вид (см. [23]):

$$\begin{aligned} \widehat{u}(p) &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{p-1}{p+1} \right)^{-\beta/2} \\ &\times \int_0^{\infty} \xi \operatorname{sh} \pi \xi \Gamma(-\beta + 1/2 + i\xi) \Gamma(-\beta + 1/2 - i\xi) U(\xi) P_{-1/2+i\xi}^{-\beta}(p) d\xi. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Следуя [15], отметим, что рассмотренный случай имеет непосредственное отношение к решению бесконечной линейной алгебраической системы с матрицей Гильберта. Сделаем в уравнении (1.34) замены:

$$\begin{aligned} q &= \frac{p-1}{p+1}, \\ \zeta &= \frac{\tau-1}{\tau+1}, \\ u_1(q) &= (p+1)\widehat{u}(p), \\ f_1(q) &= (p+1)\widehat{f}(p). \end{aligned}$$

В новых переменных уравнение примет вид:

$$\lambda u_1(q) - \int_0^1 \frac{\zeta^\beta u_1(\zeta)}{1-q\zeta} d\zeta = f_1(q). \quad (1.36)$$

Последнее, очевидно, соответствует алгебраической системе

$$\lambda v_m - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{m+n+1+\beta} = g_m, \quad m = 0, 1, \dots$$

где

$$v_m = \int_0^1 u_1(q) q^{m+\beta} dq, \quad g_m = \int_0^1 f_1(q) q^{m+\beta} dq. \quad (1.37)$$

Таким образом, решение системы (1.37) можно дать в виде интегрального представления

$$v_m = \int_1^{\infty} \widehat{u}(p) (p-1)^{m+\beta} (p+1)^{-(m+\beta+1)} dp,$$

где  $\widehat{u}(p)$  определено формулой (1.35).

В [1] отмечено, что ядро Магнуса является частным случаем ядра Розенблюма при  $\beta = 0$ , так как

$$x^{-1}W_{0,1/2}(2x) = x^{-1}e^{-x}.$$

Приведем здесь еще два частных случая ядра Розенблюма для значений  $\beta = \pm 1/2$ :

$$\Gamma\left(1 \mp \frac{1}{2}\right)x^{-1}W_{\pm 1/2,1/2}(2x) = K_1(x) \pm K_0(x). \quad (1.38)$$

Это следует из интегрального представления (1.33) и интегральных представлений функций Макдональда (см. [4])

$$K_0(x) = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - 1}} e^{-\tau x} d\tau, \quad K_1(x) = \int_1^\infty \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}} e^{-\tau x} d\tau. \quad (1.39)$$

Упомянем еще, что эти ядра с большой полнотой исследованы в работах Ю. М. Раппопорта (см. [20, 21]) в связи с исследованиями интегральных преобразований Лебедева–Скальской [19, 23]. Именно, операторы Ганкеля с ядрами (1.38) в силу теоремы 0.1 диагонализуются преобразованиями

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_+(\xi) \\ U_-(\xi) \end{Bmatrix} &= \int_0^\infty u(y) \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} K_{1/2+i\xi}(y) \\ \operatorname{Im} K_{1/2+i\xi}(y) \end{Bmatrix} dy, \\ u(x) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} \pi\xi \operatorname{Re} K_{1/2+i\xi}(x) U_+(\xi) \\ \operatorname{sh} \pi\xi \operatorname{Im} K_{1/2+i\xi}(x) U_-(\xi) \end{Bmatrix} d\xi, \end{aligned}$$

поскольку (см. [7, 2.16.55])

$$\int_0^\infty \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} K_{1/2+i\xi}(y) \operatorname{Re} K_{1/2+i\xi}(x) \\ \operatorname{Im} K_{1/2+i\xi}(y) \operatorname{Im} K_{1/2+i\xi}(x) \end{Bmatrix} d\xi = \frac{\pi}{4} (K_1(x+y) \pm K_0(x+y)).$$

## §2. Интегральные представления ядер Яфаева

Представление ядра (1.2) и конкретные значения плотности, перечисленные в предыдущем разделе, отнюдь не случайны. На самом деле, все они — частные случаи общих решений уравнения (0.3). Это уравнение было выведено в [1], как результат коммутирования операторов  $A$  и  $L$ . Замечательно то, что все его решения можно выписать в квадратурах. Некоторые из получаемых решений могут быть применены к процедуре замены уравнения (1.1) на уравнение (1.3), а некоторые — нет. Подчеркнем, что ограничения на параметры, принятые в [1] (например,  $\alpha \geq 0$ ),

привели к потере многих интересных примеров явной диагонализуемости. В этом разделе ядра, удовлетворяющие уравнению (0.3), будем называть ядрами Яфаева. Здесь мы дадим интегральные представления всех ядер Яфаева, а приложение полученных формул к задаче решения уравнения Ганкеля будет дано в следующем разделе. Известно (см., например, [3]), что дифференциальное уравнение с линейными коэффициентами может быть проинтегрировано методом Лапласа. Будем искать решение уравнения (0.3) в виде

$$a(x) = \int_{\mu}^{\nu} w(\tau) e^{-\tau x} d\tau, \quad (2.1)$$

где значения пределов интегрирования и плотность подлежат определению. Интегрируя по частям, получаем, что плотность  $w(\tau)$  удовлетворяет уравнению

$$\int_{\mu}^{\nu} \left( (-\tau^2 + \alpha) w'(\tau) + (-\gamma\tau^2 + \beta) w(\tau) \right) e^{-x\tau} d\tau + e^{-\nu x} w(\nu) (\nu^2 - \alpha) - e^{-\mu x} w(\mu) (\mu^2 - \alpha) = 0.$$

Пределы  $\mu$  и  $\nu$  выбираются из условий равенства нулю внеинтегральных членов. Плотность же должна обнулить интегральный член. Следовательно, возможны следующие варианты (все интегральные представления даны с точностью до произвольных постоянных множителей):

- первый ( $\alpha = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\nu = \infty$ ),

$$-\tau^2 w'(\tau) + (-\gamma\tau^2 + \beta) w(\tau) = 0; \quad (2.2)$$

решение уравнения (2.2) имеет вид:

$$w(\tau) = C \exp \left\{ -\gamma\tau - \frac{\beta}{\tau} \right\},$$

$$a(x) = C \int_0^{\infty} \exp \left\{ -(\gamma + x)\tau - \frac{\beta}{\tau} \right\} d\tau. \quad (2.3)$$

- второй ( $\alpha > 0$ ,  $\mu = \sqrt{\alpha}$ ,  $\nu = \infty$ ),

$$(-\tau^2 + \alpha) w'(\tau) + (-\gamma\tau^2 + \beta) w(\tau) = 0, \quad \tau > \sqrt{\alpha}, \quad (2.4)$$

а решение имеет вид:

$$\begin{aligned} w(\tau) &= C e^{-\gamma\tau} \left( \frac{\tau - \sqrt{\alpha}}{\tau + \sqrt{\alpha}} \right)^{\frac{\beta - \gamma\alpha}{2\sqrt{\alpha}}}, \\ a(x) &= C \int_{\sqrt{\alpha}}^{\infty} \left( \frac{\tau - \sqrt{\alpha}}{\tau + \sqrt{\alpha}} \right)^{\frac{\beta - \gamma\alpha}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-(\gamma+x)\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

• третий ( $\alpha > 0$ ,  $\mu = -\sqrt{\alpha}$ ,  $\nu = \sqrt{\alpha}$ ),

$$(-\tau^2 + \alpha) w'(\tau) + (-\gamma\tau^2 + \beta)w(\tau) = 0, \quad -\sqrt{\alpha} < \tau < \sqrt{\alpha}. \quad (2.6)$$

Решение уравнения (2.6) имеет вид:

$$\begin{aligned} w(\tau) &= C e^{-\gamma\tau} \left( \frac{\sqrt{\alpha} - \tau}{\tau + \sqrt{\alpha}} \right)^{\frac{\beta - \gamma\alpha}{2\sqrt{\alpha}}}, \\ a(x) &= C \int_{-\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{\sqrt{\alpha} - \tau}{\tau + \sqrt{\alpha}} \right)^{\frac{\beta - \gamma\alpha}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-(\gamma+x)\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.7)$$

• четвертый ( $\alpha < 0$ ,  $\mu = -i\sqrt{|\alpha|}$ ,  $\nu = i\sqrt{|\alpha|}$ ). Сделаем замену переменной  $\tau = i\zeta$ ,  $w_1(\zeta) = w(\tau)$ . Уравнение приобретет вид

$$-i(\zeta^2 - |\alpha|) w_1'(\zeta) + (\gamma\zeta^2 + \beta)w_1(\zeta) = 0, \quad -\sqrt{|\alpha|} < \zeta < \sqrt{|\alpha|}. \quad (2.8)$$

Его решением будет:

$$w_1(\zeta) = C i e^{-i\gamma\zeta} \left( \frac{\sqrt{|\alpha|} - \zeta}{\zeta + \sqrt{|\alpha|}} \right)^{-i\frac{\beta + \gamma|\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}}}, \quad -\sqrt{|\alpha|} < \zeta < \sqrt{|\alpha|}$$

а ядро  $a(x)$  имеет следующее интегральное представление (см. [3, 6.11.3 (16)]):

$$\begin{aligned} a(x) &= C i \int_{-\sqrt{|\alpha|}}^{\sqrt{|\alpha|}} \left( \frac{\sqrt{|\alpha|} - \zeta}{\zeta + \sqrt{|\alpha|}} \right)^{i\frac{\beta + \gamma|\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}}} e^{i(\gamma+x)\zeta} d\zeta \\ &= \frac{C}{x + \gamma} \cdot \frac{\omega}{\sin \pi\omega} M_{\omega, 1/2} \left( 2i\sqrt{|\alpha|} (x + \gamma) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $M_{\omega, \mu}(x)$  — функция Уиттекера,

$$\omega = i(\beta + \gamma|\alpha|)/(2\sqrt{|\alpha|}).$$

Из сходимости интеграла (2.9) имеем ограничение  $|\operatorname{Re} \omega| < 1$ . Таким образом, мы видим, что первые два варианта решения уравнения (0.3) и являются полным перечнем примеров, указанных в [1]. Легко заметить, что третий вариант не может быть реализован, так как (2.7) является экспоненциально растущим ядром.

Может показаться, что решение уравнения (0.3) также описывается по классической схеме метода Лапласа, то есть, представляется контурным интегралом, где контур охватывает особенности плотности. Однако это не так. Действительно, рассмотрим случай общего положения:  $w(\tau)$  определяется формулой (2.7), а контур замкнут и, следовательно, внеинтегральные члены равны нулю. Заметим, что особые точки плотности — это  $\pm\sqrt{\alpha}$  и, значит, для однозначного определения плотности необходимо провести разрез между этими особыми точками. При этом, если  $\operatorname{Re} \alpha \neq 0$ , то одна из особых точек обязательно находится в левой полуплоскости. Следовательно, контур, не пересекающий разрез, а охватывающий его, обязательно какой-то своей частью будет находиться в левой полуплоскости и, стало быть, такое представление решения приведет к растущему ядру.

Таким образом, новым случаем явной диагонализации, укладывающимся в схему “коммутаторного метода”, является ядро (2.9). Для решения уравнения Ганкеля с этим ядром воспользуемся интегральным преобразованием на отрезке (см. [16, 17]).

### §3. Уравнение Ганкеля с ядром (2.9)

Положим  $\gamma = 0$ . Тогда  $a(x) = cx^{-1}M_{\omega, 1/2}(2ix)$  и уравнение Ганкеля (без ограничения общности, положим  $|\alpha| = 1$ ) приобретает вид:

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} u(y) \int_{-1}^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{\omega} e^{i\tau(x+y)} d\tau dy = f(x), \quad |\operatorname{Re} \omega| < 1. \quad (3.1)$$

Заметим, что оператор самосопряжен в случае чисто мнимого  $\omega = i\kappa$ , поскольку

$$\begin{aligned} \overline{\int_{-1}^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{i\kappa} e^{i\tau(x+y)} d\tau} &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{-i\kappa} e^{-i\tau(x+y)} d\tau \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{i\kappa} e^{i\tau(x+y)} d\tau. \end{aligned}$$



Ниже мы ограничимся этим случаем. Применим к уравнению (3.1) оператор  $\mathbf{T}$ , действующий по правилу

$$\mathbf{T}[u](p) = \int_0^{\infty} u(x) e^{ipx} dx, \quad -1 < p < 1,$$

и на функцию  $\tilde{u}(p) = T[u](p)$  получим уравнение:

$$\lambda \tilde{u}(p) - \int_{-1}^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{i\mathfrak{x}} \tilde{u}(\tau) \int_0^{\infty} e^{ix(\tau+p)} dx d\tau = \tilde{f}(p), \quad -1 < p < 1.$$

Внутренний интеграл существует в смысле обобщенных функций:

$$\int_0^{\infty} e^{ix(\tau+p)} dx = \pi \delta(p+\tau) + \frac{i}{p+\tau},$$

где  $(p+\tau)^{-1}$  понимается в смысле главного значения. Таким образом, получаем уравнение:

$$\lambda \tilde{u}(p) - \pi \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^{-i\mathfrak{x}} \tilde{u}(-p) - i \int_{-1}^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{i\mathfrak{x}} \frac{\tilde{u}(\tau)}{p+\tau} d\tau = \tilde{f}(p). \quad (3.2)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} u_1(p) &= \tilde{u}(p) \sqrt{1-p^2}, \\ f_1(p) &= \tilde{f}(p) \sqrt{1-p^2}, \end{aligned}$$

получим уравнение:

$$\begin{aligned} \lambda u_1(p) - \pi \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^{-i\mathfrak{x}} u_1(-p) \\ - i \int_{-1}^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{i\mathfrak{x}} \frac{u_1(\tau)}{1-\tau^2} \frac{\sqrt{(1-\tau^2)(1-p^2)}}{p+\tau} d\tau = f_1(p). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Воспользуемся теперь преобразованием  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} U_1(\xi) = \mathcal{P}[u_1](\xi) &= \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{1-\tau^2} \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^{i\xi} d\tau, \\ u_1(p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} U_1(\xi) \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^{-i\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

основные свойства которого подробно изложены в работе [16] (см., также [25], где изучено спектральное разложение интеграла типа Коши на отрезке; фактически, построено преобразование  $\mathcal{P}$  несколько в другом виде). В частности, правила  $\mathcal{P}$ -свертки и  $\mathcal{P}$ -антисвертки имеют вид:

$$\mathcal{P} \left[ \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\tau^2} u(\tau) v \left( \frac{p-\tau}{1-p\tau} \right) d\tau \right] (\xi) = U(\xi) V(\xi),$$

и

$$\mathcal{P} \left[ \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\tau^2} u(\tau) v \left( \frac{p+\tau}{1+p\tau} \right) d\tau \right] (\xi) = U(-\xi) V(\xi).$$

С учетом равенств (см. [16, 17])

$$\frac{\sqrt{1 - \left( \frac{p+\tau}{1+p\tau} \right)^2}}{\frac{p+\tau}{1+p\tau}} = \frac{\sqrt{(1-p^2)(1-\tau^2)}}{p+\tau}, \quad \mathcal{P} \left[ \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau} \right] (\xi) = \pi i \operatorname{th} \pi \xi,$$

получаем:

$$\lambda U_1(\xi) - \pi U_1(\varkappa - \xi) + \pi \operatorname{th} \pi \xi U_1(\varkappa - \xi) = F_1(\xi). \quad (3.5)$$

Это уравнение рассматривается в полосе аналитичности

$$\{-1/2 < \operatorname{Im} \xi < 1/2\}.$$

Поэтому без ущерба для общности в обратном преобразовании (3.4) можно положить  $c = 0$ . Меняя переменные  $\xi \rightarrow (\varkappa - \xi)$ , получаем на значения  $U_1(\varkappa - \xi)$  и  $U_1(\xi)$  систему  $2 \times 2$ , откуда:

$$U_1(\xi) = \frac{\lambda F_1(\xi) + \pi(1 - \operatorname{th} \pi \xi) F_1(\varkappa - \xi)}{\lambda^2 - \pi^2(1 - \operatorname{th} \pi(\varkappa - \xi))(1 - \operatorname{th} \pi \xi)}. \quad (3.6)$$

Положив  $F_1 = 0$ , можно сделать вывод о спектре оператора Ганкеля и найти собственные функции. Для этого мы должны приравнять нулю определитель системы, то есть знаменатель выражения (3.6):

$$\lambda^2 = \pi^2 \frac{(1 - \operatorname{th} \pi \varkappa)(1 - z^2)}{1 - z \operatorname{th} \pi \varkappa}, \quad z = \operatorname{th} \pi \xi. \quad (3.7)$$

Отсюда видно, что спектр находится в промежутке<sup>3</sup>

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2} \leq \frac{e^{-\pi \varkappa}}{\operatorname{ch}^2(\pi \varkappa/2)}, \quad -\frac{2\pi}{1 + e^{\pi \varkappa}} \leq \lambda \leq \frac{2\pi}{1 + e^{\pi \varkappa}}. \quad (3.8)$$

<sup>3</sup>Максимум правой части (3.7), как функции переменной  $z$  достигается при значении  $z_0 = \operatorname{th} \frac{\pi \varkappa}{2}$ .

Для любого  $\lambda$  из этого промежутка из квадратного уравнения (3.7) находим два корня:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \theta \operatorname{th} \frac{\pi \varkappa}{2} \pm \sqrt{1 + \theta^2 \operatorname{th}^2 \frac{\pi \varkappa}{2} - \theta \frac{\operatorname{ch} \pi \varkappa}{\operatorname{ch}^2(\pi \varkappa/2)}} \\ &= \theta \operatorname{th} \frac{\pi \varkappa}{2} \pm \sqrt{(1 - \theta) \left(1 - \theta \operatorname{th}^2 \frac{\pi \varkappa}{2}\right)}, \end{aligned}$$

где в силу (3.8) мы обозначили

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2} = \theta \frac{e^{-\pi \varkappa}}{\operatorname{ch}^2(\pi \varkappa/2)}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Следовательно, внутри промежутка (3.8) мы имеем ровно два различных корня (легко удостовериться, что  $|z_{1,2}| < 1$ ).<sup>4</sup> А на краю спектра ( $\theta = 1$ ) мы имеем кратный корень. Определитель, как квадратный трехчлен, имеет только два корня и, в то же время, они связаны между собой сдвигом. Поэтому, обозначая

$$\xi_{1,2} = \pi^{-1} \operatorname{arth} z_{1,2},$$

с учетом  $\xi_2 = \varkappa - \xi_1$  получаем  $\mathcal{P}$ -образ собственной функции уравнения (3.3):

$$U_{1,0}(\xi) = \gamma_1 \delta(\xi - \xi_1) + \gamma_2 \delta(\xi - \varkappa + \xi_1). \quad (3.9)$$

При этом, в отличие от ситуации в теореме 0.2, коэффициенты не независимы. Для определения их связи между собой следует подставить функцию (3.9) в уравнение (3.5). Отсюда получаем:

$$\gamma_2 = \frac{\pi}{\lambda} (1 - \operatorname{th} \pi(\varkappa - \xi_1)) \gamma_1.$$

Далее, в силу формулы обращения (3.4), находим:

$$u_1(p) = \frac{1}{\pi} \left( \gamma_1 \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^{-i\xi_1} + \gamma_2 \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^{-i(\varkappa - \xi_1)} \right)$$

<sup>4</sup> Дело сводится к неравенству  $\sqrt{(1-\theta)(1-\theta \operatorname{th}^2 \frac{\pi \varkappa}{2})} < 1 \pm \theta \operatorname{th} \frac{\pi \varkappa}{2}$  или  $\pm 2 \operatorname{th} \frac{\pi \varkappa}{2} < 1 + \operatorname{th}^2 \frac{\pi \varkappa}{2}$ .

и  $\tilde{u}_0(p) = u_1(p)(1-p^2)^{-1/2}$ . Непосредственно из уравнения (3.1), пользуясь определением функции  $\tilde{u}(p)$ , получаем для  $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \lambda^{-1} \int_{-1}^1 \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^{i\kappa} \tilde{u}_0(p) e^{ipx} dp \\ &= \frac{\lambda^{-1}}{\sqrt{x}} \left( \frac{\gamma_1}{\operatorname{ch} \pi(\kappa - \xi_1)} M_{i(\kappa - \xi_1), 0}(2ix) + \frac{\gamma_2}{\operatorname{ch} \pi \xi_1} M_{i\xi_1, 0}(2ix) \right). \end{aligned}$$

Значение  $\lambda = 0$  входит в спектр (поскольку спектр — замкнутое множество), но собственная функция, соответствующая этому значению, тривиальна. Действительно, если мы в уравнении (3.5) положим  $\lambda = 0$ ,  $F_1 = 0$ , то мы получим:

$$(1 - \operatorname{th} \pi(\kappa - \xi)) U_1(\xi) = 0.$$

Поскольку  $1 - \operatorname{th} \pi(\kappa - \xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$ , то  $U_1 = 0$ .

Если корень кратный, то  $\xi_1 = \xi_2 = \kappa/2$ . Это соответствует краю спектра  $\theta = 1$  или  $\lambda = \pm 2\pi/(1 + e^{\pi\kappa})$ . В этом случае слагаемые, относящиеся к  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , совпадают, и мы ищем решение в виде

$$U_1(\xi) = \gamma_1 \delta(\xi - \kappa/2) + \gamma_2 \delta'(\xi - \kappa/2).$$

Подставляя это выражение в (3.5), получаем, что при  $\lambda = +2\pi/(1 + e^{\pi\kappa})$  необходимо  $\gamma_2 = 0$  а при  $\lambda = -2\pi/(1 + e^{\pi\kappa})$  необходимо  $\gamma_1 = 0$ . Отсюда имеем следующие собственные функции:

$$\begin{aligned} u_{0,+}(x) &= \frac{\gamma_1}{\sqrt{x}} M_{i\kappa/2, 0}(2ix), \\ u_{0,-} &= \frac{\gamma_2}{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (1 - \operatorname{th} \pi(\kappa - \xi)) M_{i(\kappa - \xi), 0}(2ix) \right) \Big|_{\xi = \kappa/2} \end{aligned}$$

Отметим, что при  $\omega = \kappa = 0$  имеем ядро (2.9) вида  $a(x) = x^{-1} \sin x$ . Это ядро (в дискретной записи) рассмотрено в [2]. В этом случае спектр заполняет промежуток  $[-\pi, \pi]$ . Введенные выше величины приобретают вид:

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2}}, \quad \xi_{1,2} = \pi^{-1} \operatorname{arth} z_{1,2}, \quad \gamma_2 = \left( \frac{\pi}{\lambda} - \sqrt{\frac{\pi^2}{\lambda^2} - 1} \right) \gamma_1.$$

Собственная функция при  $\lambda \neq 0$ :

$$u_0(x) = \frac{\gamma_1}{\sqrt{x}} \left( M_{i\xi_1, 0}(2ix) + \left( \frac{\pi}{\lambda} - \sqrt{\frac{\pi^2}{\lambda^2} - 1} \right) M_{-i\xi_1, 0}(2ix) \right).$$

Наконец, приведем два несамосопряженных примера

$$a(x) = J_0(x) \pm iJ_1(x).$$

Действительно, в силу интегрального представления функции Бесселя [4]:

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} e^{ixt} dt = J_0(x),$$

известного соотношения  $J_0'(x) = -J_1(x)$ , и представления (2.9) получаем:

$$J_0(x) \pm iJ_1(x) = \int_{-1}^1 \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{\mp 1/2} e^{ixt} dt = \frac{\pi}{2x} M_{\pm 1/2, 1/2}(2ix).$$

#### §4. Решение некоторых уравнений Ганкеля путем диагонализации, не связанной с уравнением (0.3)

**4.1. Ядро**  $a(x) = x^{-1}(1 - e^{-x})$ . Это ядро можно записать в виде интегрального представления

$$a(x) = \int_0^1 e^{-\tau x} d\tau, \quad w(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau \leq 1, \\ 0, & 1 < \tau < \infty. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение (1.3) примет вид:

$$\lambda \widehat{u}(p) - \int_0^1 \frac{\widehat{u}(\tau)}{\tau + p} d\tau = \widehat{f}(p), \quad 0 < p < 1. \quad (4.1)$$

Делая замены  $p = q^{-1}$ ,  $u_1(q) = p\widehat{u}(p)$ ,  $f_1(q) = p\widehat{f}(p)$ , получаем уравнение Мелера (1.12):

$$\lambda u_1(q) - \int_1^\infty \frac{u_1(\zeta)}{\zeta + q} d\zeta = f_1(q).$$

Это уравнение диагонализуется преобразованием Мелера–Фока (1.16). В итоге приходим к следующему результату: уравнение Ганкеля

$$\lambda u(x) - \int_0^\infty u(y) \frac{1 - e^{-x-y}}{x+y} dy = f(x)$$

приводится интегральным преобразованием с ядром

$$\varphi(\xi, y) = \int_1^\infty e^{-y/q} \frac{1}{q} P_{-1/2+i\xi}(q) dq \quad (4.2)$$

к виду

$$U(\xi) \left( \lambda - \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} \right) = F(\xi), \quad U(\xi) = \int_0^{\infty} u(x) \varphi(\xi, x) dx.$$

При этом

$$\widehat{u}(p) = p^{-1} \int_0^{\infty} U(\xi) \xi \operatorname{th} \pi \xi P_{-1/2+i\xi}(p^{-1}) d\xi, \quad 0 < p < 1,$$

а решение самого уравнения Ганкеля получается по правилу (1.4). Ниже этот пример будет значительно обобщен.

**4.2. Ядро**  $a(x) = (\beta + 1)^{-1} \Phi_1(1, \beta, \beta + 1; -1, x)$ . Здесь мы имеем интегральное представление (см. [6, 2.3.8.1]):

$$a(x) = \int_0^1 \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)^\beta e^{-\tau x} d\tau, \quad \operatorname{Re} \beta > -1, \quad w(\tau) = \left( \frac{1-\tau}{1+\tau} \right)_+^\beta.$$

Очевидно, при  $\beta = 0$  получим предыдущий случай. Теми же заменами, что и в п. 4.1, уравнение

$$\lambda u(x) - \frac{1}{\beta + 1} \int_0^{\infty} \Phi_1(1, \beta, \beta + 1; -1, x + y) u(y) dy = f(x)$$

сводится к уравнению Розенблюма (см. п. 1.5) и, следовательно, диагонализуются интегральным преобразованием на полуоси с ядром

$$\varphi(\xi, y) = \int_1^{\infty} \frac{1}{q} \left( \frac{q-1}{q+1} \right)^{\beta/2} e^{-y/q} P_{-1/2+i\xi}^{-\beta}(q) dq \quad (4.3)$$

и становится алгебраическим:

$$U(\xi) \left( \lambda - \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \xi} \right) = F(\xi), \quad U(\xi) = \int_0^{\infty} u(y) \varphi(\xi, y) dy.$$

К сожалению, точно вычислить ядра (4.2) и (4.3) в терминах известных специальных функций не удалось, что, конечно, не отменяет сам факт диагонализации.

**4.3. Ядро**  $a(x) = x^{-1}K_0(x)$ . Подчеркнем, что, поскольку

$$K_0(x) \sim |\ln x|, \quad x \rightarrow 0,$$

то оператор Ганкеля с таким ядром неограничен. Имеет место соотношение (см. [6, 2.6.25.1]):

$$a(x) = x^{-1}K_0(x) = \int_1^{\infty} \ln(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}) e^{-\tau x} d\tau.$$

Таким образом, исходному уравнению Ганкеля

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} \frac{K_0(x+y)}{x+y} u(y) dy = f(x) \quad (4.4)$$

соответствует уравнение вида (1.3):

$$\lambda \hat{u}(p) - \int_1^{\infty} \ln(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}) \frac{\hat{u}(\tau)}{\tau + p} d\tau = \hat{f}(p). \quad (4.5)$$

Далее, сделаем замены переменных:

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{ch} \pi q, \\ \tau &= \operatorname{ch} \pi \zeta, \\ u_1(q) &= \hat{u}(p), \\ f_1(q) &= \hat{f}(p). \end{aligned}$$

В результате уравнение (4.5) приобретет вид:

$$\lambda u_1(q) - \pi^2 \int_0^{\infty} u_1(\zeta) \zeta \operatorname{sh} \pi \zeta \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \zeta + \operatorname{ch} \pi q} d\zeta = f_1(q). \quad (4.6)$$

Мы докажем, что интегральный оператор в уравнении (4.6) диагонализуются *обратным* преобразованием Контровича–Лебедева (ср. (1.20)):

$$\begin{aligned} U_1(\xi) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} q \operatorname{sh} \pi q K_{iq}(\xi) u_1(q) dq, \\ u_1(\zeta) &= \int_0^{\infty} \xi^{-1} U_1(\xi) K_{i\zeta}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В соответствии с теоремой 0.1, ядро оператора на полуоси, который диагонализуется *обратным* преобразованием, имеет вид:

$$k(q, \zeta) = \frac{4}{\pi^2} \zeta \operatorname{sh} \pi \zeta \int_0^{\infty} \frac{V(\xi)}{\xi} K_{i\zeta}(\xi) K_{iq}(\xi) d\xi. \quad (4.8)$$

Положим в выражении (4.8)  $V(\xi) = \xi^s$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$ . В этом случае интеграл явно вычисляется и имеет вид (см. [7, 2.16.33.2]):

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \xi^{s-1} K_{i\zeta}(\xi) K_{iq}(\xi) d\xi \\ &= \frac{2^{s-3}}{\Gamma(s)} \Gamma \left[ \frac{s+i(q+\zeta)}{2}, \frac{s-i(q+\zeta)}{2}, \frac{s+i(q-\zeta)}{2}, \frac{s-i(q-\zeta)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Полагая  $s = 1$ , получим:

$$k(q, \zeta) = \frac{\zeta \operatorname{sh} \pi \zeta}{\operatorname{ch} \pi \frac{q+\zeta}{2} \operatorname{ch} \pi \frac{q-\zeta}{2}} = \frac{2\zeta \operatorname{sh} \pi \zeta}{\operatorname{ch} \pi q + \operatorname{ch} \pi \zeta},$$

т.е. в точности ядро интегрального оператора в уравнении (4.6).

Таким образом, мы получили следующее утверждение: уравнение Ганкеля (4.4) сводится к алгебраическому

$$U_1(\xi) \left( \lambda - \frac{\pi^2}{2} \xi \right) = F_1(\xi), \quad 0 < \xi < \infty,$$

с помощью интегрального преобразования с ядром

$$T(\xi, x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} q \operatorname{sh} \pi q K_{iq}(\xi) e^{-x \operatorname{ch} \pi q} dq.$$

Для восстановления функции  $u(x)$  применим к равенству

$$U_1(\xi) = \int_0^{\infty} u(x) T(\xi, x) dx \quad (4.9)$$

прямое преобразование Конторовича–Лебедева и запишем (4.9) в виде:

$$\int_0^{\infty} U_1(\xi) \frac{1}{\xi} K_{iq}(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} u(x) e^{-x \operatorname{ch} \pi q} dx.$$



Теперь применим к этому равенству cos-преобразование Фурье и воспользуемся равенствами (см. [7, 2.16.48.19])

$$\int_0^{\infty} \cos \pi \omega q K_{iq}(\xi) dq = \frac{\pi}{2} e^{-\xi \operatorname{ch} \pi \omega}, \quad \int_0^{\infty} \cos \pi \omega q e^{-x \operatorname{ch} \pi q} dq = \pi^{-1} K_{i\omega}(x).$$

Имеем:

$$\int_0^{\infty} u(x) K_{i\omega}(x) dx = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{\infty} U_1(\xi) \frac{1}{\xi} e^{-\xi \operatorname{ch} \pi \omega} d\xi.$$

Применяя, наконец, обратное преобразование Конторовича–Лебедева, получаем, что формула обращения преобразования (4.9) имеет вид:

$$x u(x) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} T(x, \xi) U_1(\xi) d\xi.$$

### §5. Решение некоторых уравнений Ганкеля, не связанное с диагонализацией

Если мы ставим перед собой цель решения уравнения (1.1), то одним из способов этого может являться диагонализация интегрального оператора. Диагонализация дает возможность свести интегральное уравнение к алгебраическому, а затем обратным преобразованием получить решение исходного уравнения. Однако, кроме алгебраических, есть другие уравнения и задачи, которые могут быть явно решены. Например, краевые задачи Римана и Карлемана теории функции комплексной переменной, обыкновенные дифференциальные уравнения, интегральные уравнения с вырожденным ядром. Ниже мы предъядим некоторые новые случаи функции  $a(x)$ , когда уравнение (1.1) сводится к явно решаемым задачам. При этом решение этих задач не является предметом настоящей работы (в частности, потому, что данные этих задач будут зависеть от большого числа параметров, и полное исследование обычно весьма громоздко).

Ниже через  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $c_k$ ,  $b$  обозначены некоторые (вообще говоря, комплексные) постоянные.

**5.1. Ядро**  $a_n(x) = x^{n-1/2} K_{n+1/2}(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . При  $n = 0$  мы получаем ядро Магнуса. Чтобы увидеть структуру функции  $a_n(x)$ , воспользуемся явной записью функции Макдональда полуцелого значка [4]:

$$K_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)! k!} (2x)^{-k}.$$

Следовательно,

$$a_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{x} 2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{(n-k)! k!} (2x)^k.$$

Это означает, что  $a_n(x+y) = (2n-1)!! a_0(x+y) +$  вырожденное ядро, поскольку каждое слагаемое  $e^{-x-y}(x+y)^m$  вырождено.

Таким образом, интегральное преобразование с ядром (1.19)

$$U(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{u(y)}{\sqrt{y}} K_{i\xi}(y) dy,$$

диагонализующее оператор Ганкеля с ядром  $a_0(x+y)$ , сводит уравнение Ганкеля с ядром  $a_n(x+y)$  к интегральному уравнению с вырожденным ядром. Отметим, что (см. [18]) если для ядра  $k(x,y)$  известна резольвента, то резольвенту для ядра  $k(x,y) +$  вырожденное можно построить явно. Более общо, указанный прием означает, что точно решается уравнение с ядром

$$K(x+y) = \frac{e^{-x-y}}{x+y} P_n(x+y)$$

с произвольным многочленом  $P_n$ .

Еще одно “красивое” обобщение ядра Магнуса получается из формулы для неполной гамма-функции с целым параметром (см. [4]):

$$\Gamma(n+1, x) = n! e^{-x} \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}.$$

Следовательно,  $x^{-1}\Gamma(1, x) = x^{-1}e^{-x}$ , и мы получаем:

$$(x+y)^{-1}\Gamma(n+1, x+y) = n!(x+y)^{-1}e^{-x-y} + n!e^{-x-y} \sum_{m=1}^n \frac{(x+y)^{m-1}}{m!}.$$

Аналогично, уравнение с ядром

$$a_n(x) = x^{n-1/2} K_{n+1/2}(\theta x), \quad n = 0, 1, \dots, \operatorname{Re} \theta > 0,$$

сводится к интегральному уравнению с вырожденным ядром преобразованием (1.25). Если  $\theta = i$ , и ядро

$$a_n(x) = x^{n-1/2} H_{n+1/2}^{(2)}(x),$$

то используется преобразование (1.26). Отметим также, что, умея диагонализировать уравнение с ядром

$$a_0(x) = x^{-1} \sin x,$$

мы сможем решить и уравнение с ядром

$$a_n(x) = x^{n-1/2} J_{n+1/2}(x),$$

если использовать явное выражение для сферической функции Бесселя [4, 7.11 (1)].

Упомянем здесь также уравнение, рассмотренное в [1]:

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} u(y) e^{-(y+x)/2} L_n^1(x+y) dy = f(x), \quad (5.1)$$

где  $L_n^s(x)$  — многочлен Лагерра. Уравнение (5.1) имеет вырожденное ядро. При этом его решение может быть доведено до простейших квадратур. Действительно (см. [4]), имеет место равенство:

$$L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y) = \sum_{k=0}^n L_k^{\alpha}(x) L_{n-k}^{\beta}(y).$$

Следовательно, полагая  $\alpha = \beta = 0$ , уравнение (5.1) запишем в виде:

$$\lambda u(x) - \sum_{k=0}^n e^{-x/2} L_k(x) \int_0^{\infty} u(y) e^{-y/2} L_{n-k}(y) dy = f(x).$$

Умножив последнее на  $e^{-x/2} L_m(x)$ , проинтегрировав по полуоси и воспользовавшись ортогональностью многочленов Лагерра, получим:

$$\lambda u_m - u_{n-m} = f_m, \quad u_m = \int_0^{\infty} u(y) e^{-y/2} L_m(y) dy,$$

$$f_m = \int_0^{\infty} f(y) e^{-y/2} L_m(y) dy.$$

Отсюда

$$u_m = \frac{\lambda f_m + f_{n-m}}{\lambda^2 - 1},$$

$$u(x) = \lambda^{-1} \left( f(x) + e^{-x/2} \sum_{m=0}^n u_{n-m} L_m(x) \right).$$

Этот же прием можно применять для сведения к алгебраической системе

уравнений Ганкеля вида

$$\lambda u(x) - \int_0^{\infty} u(y) e^{-(x+y)/2} g(x+y) dy = f(x), \quad (5.2)$$

где  $g(x)$  разложима в ряд по многочленам Лагерра  $L_m^1(x)$ :

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m L_m^1(x), \quad \{g_m\} \in l_2. \quad (5.3)$$

Дословно повторяя предыдущее рассуждение, получим:

$$\lambda u_m - \sum_{k=0}^{\infty} g_{m+k} u_k = f_m, \quad u_m = \int_0^{\infty} u(x) e^{-x/2} L_m(x) dx.$$

**5.2. Ядро**  $a(x) = \frac{\mu e^{-x} + \nu}{x}$ . Этот случай обобщает пример Мелера и пример п. 4.1. Рассмотрим представление (1.2) с плотностью

$$w(\tau) = c_1 \theta(\tau - 1) + c_2 \theta(1 - \tau).$$

В этом случае

$$a(x) = c_1 \int_1^{\infty} e^{-\tau x} d\tau + c_2 \int_0^1 e^{-\tau x} d\tau = \frac{(c_1 - c_2)e^{-x} + c_2}{x}.$$

Уравнение (1.3) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\lambda \hat{u}(p) - \left( c_2 \int_0^1 \frac{1}{\tau + p} \hat{u}(\tau) d\tau + c_1 \int_1^{\infty} \frac{1}{\tau + p} \hat{u}(\tau) d\tau \right) = \hat{f}(p). \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) — это, по терминологии [10] — уравнение с двумя ядрами для преобразования Меллина. Для его решения представим искомую функцию, как сумму двух “односторонних”:

$$\hat{u}(p) = v_+(p) + v_-(p), \quad (5.5)$$

где  $v_-(p) = 0$ ,  $p > 1$ , а  $v_+(p) = 0$ ,  $0 < p < 1$ . Исследование основано на том, что преобразование Меллина от функции  $v_+(p)$  (соответственно,  $v_-(p)$ ) аналитически продолжается в верхнюю (соответственно, нижнюю) полуплоскость. Таким образом, преобразование Меллина (1.9) сводит уравнение (5.4) к следующей задаче Римана на вещественной оси:

$$V^-(\xi) \left( \lambda - \frac{\pi c_2}{\operatorname{ch} \pi \xi} \right) + V^+(\xi) \left( \lambda - \frac{\pi c_1}{\operatorname{ch} \pi \xi} \right) = F(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.6)$$

где

$$V^{\pm}(\xi) = \int_0^{\infty} v_{\pm}(p) p^{i\xi-1/2} dp, \quad F(\xi) = \int_0^{\infty} \widehat{f}(p) p^{i\xi-1/2} dp.$$

Мы воспользовались здесь свойствами (1.10) преобразования Меллина. Задача Римана состоит в нахождении кусочно-аналитической функции на комплексной плоскости по заданному скачку, определяемому краевым условием (5.6). Решение задачи Римана (5.6) стандартно (см. [10]), хотя и громоздко, поскольку определяется значениями постоянных. Как и было сказано выше, мы не будем его проводить.

**5.3. Ядро**  $a(x) = \mu x^{-1} - \nu e^{bx} Ei(-bx)$ . Пусть

$$w(\tau) = \frac{c_1\tau + c_2}{c_3\tau + c_4}.$$

В этом случае

$$a(x) = \mu x^{-1} - \nu e^{bx} Ei(-bx), \quad \mu = \frac{c_1}{c_3}, \quad \nu = \frac{c_2}{c_3} - \frac{c_1 c_4}{c_3^2}, \quad b = \frac{c_4}{c_3}.$$

Уравнение (1.3) имеет вид

$$\lambda \widehat{u}(p) - \int_0^{\infty} \frac{c_1\tau + c_2}{c_3\tau + c_4} \frac{\widehat{u}(\tau)}{\tau + p} d\tau = \widehat{f}(p).$$

Обозначим  $v(p) = (c_3p + c_4)^{-1} \widehat{u}(p)$  и запишем уравнение в виде:

$$\lambda(c_3p + c_4) v(p) - \int_0^{\infty} \frac{(c_1\tau + c_2) v(\tau)}{\tau + p} d\tau = \widehat{f}(p).$$

Применим преобразование Меллина (1.9) и получим краевую задачу Карлемана (см. [10]) в полосе комплексной плоскости  $-1/2 < \text{Im } \xi < 1/2$ :

$$\begin{aligned} & \lambda \left( c_4 V_1(\xi + i/2) + c_3 V_1(\xi - i/2) \right) \\ & - \frac{\pi}{\text{ch } \pi \xi} \left( c_2 V_1(\xi + i/2) + c_1 V_1(\xi - i/2) \right) = F(\xi), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$V(\xi) = \int_0^{\infty} v(p) p^{-1/2+i\xi} dp, \quad V_1(\xi) = V(\xi - i/2).$$

Задача Карлемана состоит в нахождении функции  $V_1(\xi)$ , аналитической и ограниченной в указанной полосе комплексной плоскости по краевому условию (5.7). Она также имеет решение в квадратурах (см. [10]) и, как

и прежде, ее решение зависит от значений входящих в ее условие параметров.

**5.4. Плотность**  $w(\tau) = \frac{c_1 \ln \tau + c_2}{c_3 \ln \tau + c_4}$ . Исследование этого случая основано на очевидном свойстве преобразования Меллина: умножение оригинала на  $i \ln p$  соответствует дифференцированию Меллин-образа. Обозначим

$$u_1(p) = (c_3 \ln p + c_4)^{-1} \widehat{u}(p)$$

и запишем уравнение (1.3) в виде:

$$\lambda(c_3 \ln p + c_4)u_1(p) - \int_0^{\infty} \frac{(c_1 \ln \tau + c_2) u_1(\tau)}{\tau + p} d\tau = \widehat{f}(p).$$

Применив преобразование Меллина, получим:

$$-i U_1'(\xi) \left( \lambda c_3 - \frac{\pi c_1}{\operatorname{ch} \pi \xi} \right) + U_1(\xi) \left( \lambda c_4 - \frac{\pi c_2}{\operatorname{ch} \pi \xi} \right) = \widehat{F}(\xi).$$

По традиции, не будем проводить решения этого уравнения, но отметим частный случай  $c_1 = c_4 = 1$ ,  $c_2 = c_3 = 0$ , т. е. (см. [6, 2.6.22.4])

$$w(\tau) = \ln \tau, \quad a(x) = \int_0^{\infty} \ln \tau e^{-\tau x} d\tau = -\frac{\mathbf{C} + \ln x}{x}, \quad (5.8)$$

где  $\mathbf{C}$  — постоянная Эйлера. Оператор неограничен (поскольку и в нуле, и в бесконечности ядро имеет асимптотику  $x^{-1} \ln x$ ), его спектр заполняет всю ось. Собственная функция, соответствующая собственному числу  $\lambda$ , имеет интегральное представление:

$$u(x; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\pi^{-2} \operatorname{sh} \pi \xi} \frac{1}{\Gamma(1/2 + i\xi)} x^{-1/2+i\xi} d\xi.$$

### Список литературы

- [1] Яфаев Д. Р., *Коммутаторный метод диагонализации оператора Ганкеля*, Функц. анал. и его прил. **44** (2010), №4, 65–79.
- [2] Kostykin V., Makarov K., *On Krein's example*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 6, 2067–2071.
- [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, Т. 1, Наука, М., 1965.
- [4] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, Т. 2, Наука, М., 1974.
- [5] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Таблицы интегральных преобразований*, Т. 1, Наука, М., 1969.
- [6] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.

- [7] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983.
- [8] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Специальные функции. Дополнительные главы*, Наука, М., 1986.
- [9] Диткин В. А., Прудников А. П., *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Наука, М., 1961.
- [10] Гахов Ф. Д., Черский Ю. И., *Уравнения типа свертки*, Наука, М., 1978.
- [11] Гомилко А. М., *Об обращении интегрального преобразования Конторовича-Лебедева*, Мат. заметки **51** (1992), №5, 27–34.
- [12] Конторович М. И., Лебедев Н. Н., *Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем*, Ж. эксперим. и теор. физ. **8** (1938), №10–11, 1192–1206.
- [13] Забрёйко П. П. и др., *Интегральные уравнения*, Наука, М., 1968.
- [14] Смирнов М. М., *Уравнения смешанного типа*, Наука, М., 1970.
- [15] Rosenblum M., *On the Hilbert matrix*, II, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 581–585.
- [16] Петров В. Э., *Интегральное преобразование на отрезке*, Пробл. мат. анализ. **31** (2005), 67–95.
- [17] Петров В. Э., *Обобщенное сингулярное интегральное уравнение Трикоми, как уравнение свертки*, Докл. РАН **411** (2006) №2, 173–177.
- [18] Полянин А. Д., Манжиров А. В., *Методы решения интегральных уравнений*, Факториал, М., 1999.
- [19] Лебедев Н. Н., Скальская И. П., *Некоторые интегральные преобразования, родственные преобразованию Конторовича-Лебедева*, Вопросы мат. физики, Наука, Л., 1976, с. 68–79.
- [20] Раппопорт Ю. М., *О модифицированных интегральных преобразованиях Конторовича-Лебедева и некоторых их приложениях*, ВЦ АН СССР, М., 1979.
- [21] Rappoport J. M., *On some integrals from modified Bessel functions*, Progress in analysis, Proc. of the 8th ISAAC congress (22–27 August, 2011), Vol. 1, Peoples' Friendship Univ., Moscow, 2012.
- [22] Уфлянд Я. С., *Интегральные преобразования в теории упругости*, Наука, Л., 1967.
- [23] Yakubovich S. V., *Index transforms*, World. Sci. Publ., Singapore, 1996.
- [24] Снеддон Я., *Преобразования Фурье*, Мир, М., 1957.
- [25] Гатальская Т. И., Зверович Э. И., *Спектральное разложение оператора сингулярного интегрирования по отрезку*, Вестник Белорус. гос. ун-та. Сер. физ. мат. информ. **1** (2005), 75–79.

ООО “ТВЭЛЛ”,  
ул. Швецова, 12,  
198006, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: petrov@twell.ru

Поступило 17 июля 2017 г.