

КРИСТАЛЛЫ КАК НЕПРЕРЫВНАЯ СРЕДА¹

А. В. ШУБНИКОВ

(Представлено академиком В. И. Вернадским)

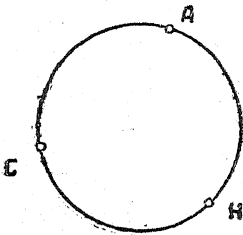
Организационное бюро настоящей конференции, посвященной вопросам строения молекул, просило меня сделать обзорный доклад на тему о строении кристаллов, резонно полагая, что вопросы строения кристаллов теснейшим образом связаны с вопросами строения молекул, поскольку кристалл можно рассматривать как совокупность бесконечного множества молекул или как одну бесконечно большую молекулу. В ответ на это предложение я, не чувствуя себя вполне готовым к выполнению такой ответственной роли, выдвинул свое более скромное предложение — осветить, если хотите, диаметрально противоположный вопрос о кристалле, как непрерывной среде, в которой роль молекул или атомов играют математические точки, лишенные размеров, и, тем не менее, без промежутков выполняющие все пространство. Естественно спросить, в какой мере уместна эта тема на конференции, интересующейся строением молекулы и потому как бы наперед отрицающей возможность непрерывного строения вещества. Ответом на этот вопрос будет сам мой доклад, который я начну с небольшой исторической справки.

Вопросами строения вещества издавна занималась философия; занималась ими химия и физика, и в зависимости от того, как разрешались эти вопросы, возникали различные течения и в других науках, в частности математике, биологии и т. д. В философии атомы появились 2300 лет тому назад в атомистической теории Демокрита; его атомы состояли из сплошного вещества и плавали в пустоте, которая, надо полагать, была также непрерывна. Но если философы первые открыли атомы, то они же первые встали на путь их отрицания, и к 1800 г. Кант полностью разрушил

¹ Доложено на VIII Всесоюзной конференции по физико-химическим вопросам 15 дек. 1931 г.

атомистическую теорию. После Канта в философии начинается новый период приспособления атомистической теории к теории сплошного строения материи (Фехнер 1864). В химии атомистическая теория завоевывает себе прочное положение как раз в то время, когда в философии она перестает существовать. Как известно Дальтон опубликовал свою теорию в 1808 г., т. е. через два года после смерти Канта. Далее в конце XIX столетия возникают сомнения (Оствальд) в правильности и полезности атомистической теории. В неявной форме эти сомнения продолжают существовать и теперь и выражаются в усиленном интересе химиков к коллоидной химии и к химии

неопределенных и нестойких соединений. Но если научная химия, как и философия, начинает свое существование с момента установления атомистической теории (Дальтон и Лавуазье были современниками), то физика за сто лет до рождения научной химии могла пышно развиваться только на почве признания непрерывного строения материи. Корпускулы Ньютона и монады Лейбница не могли выдержать конкуренции с *lex continui* того же



Фиг. 1.

Лейбница и не могли задержать победоносного шествия дифференциального и интегрального исчисления, изобретенного ими же и наилучшим образом отражавшего общую тенденцию физики. Атомистическая теория по настоящему овладевает физикой только во второй половине XIX в. с появлением кинетической теории, квантовой теории, с открытием радиоактивности и т. д. Синтез обеих точек зрения начинается в физике только в XX в. с возникновением волновой механики. Сказанное можно было бы иллюстрировать следующей схемой (фиг. 1). Начертим окружность и отметим на ней три точки *A*, *H* и *C*, которые должны соответственно обозначить атомистическую теорию, теорию непрерывного строения материи и синтез обеих теорий; тогда вращение по часовой стрелке из точки *A*, или *AHC*, будет изображать исторический путь философии и химии в отношении строения материи, а обратное вращение из точки *H* — путь физики. Других путей нет и быть не может, ибо синтезу двух идей должны предшествовать сами идеи.

Итак мы видели как развивалось учение о строении материи в философии, физике и химии, но для нас в настоящий момент представляет особый интерес, как воспринимала это учение наука о кристаллах или кристаллография в широком значении этого слова. Рожденные в один и тот же 1669 г. две сестры — геометрическая кристаллография (закон Стенона)

и кристаллооптика (двойное лучепреломление в кальците, открытое Бартолином) по разному отнеслись к строению материи. Кристаллооптика и вообще кристаллофизика целиком привяла непрерывность материи, присоединившись к физике и держалась этой позиции до конца XIX в., вернее сказать атомистическая теория не оказала никакого влияния на развитие кристаллооптики, а геометрическая кристаллография заняла выжидательное положение, накапливала фактический материал и, по существу, едва ли была настоящей наукой в течение первых ста лет своего существования. Лишь с открытием закона целых чисел Гаюи (1784), по времени почти точно совпавшим с открытием закона кратных отношений Дальтона, геометрическая кристаллография приобрела свое настоящее лицо и свое определенное отношение к строению материи, близкое к воззрениям химии.

Эту солидарность с химией геометрическая кристаллография сохранила до сих пор и только во второй половине XIX в. наметился некоторый ее сдвиг в сторону непрерывности. Главнейшие исторические этапы геометрической кристаллографии даны в следующей таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Годы	Автор	Открытие
1669	Стенон	Закон постоянства углов
1784	Гаюи	Закон целых чисел
1804—1809	Вейсс	Закон зон
1825	Миллер	Индексы граней
1830	Гессель	32 класса симметрии
1850	Бравэ	14 пространственных решеток
1868—1869	Жордан	Непрерывные пространственные группы первого рода
1879	Зонке	Прерывные пространственные группы первого рода
1891	Федоров и Шенфлис	Прерывные пространственные группы обоих родов

Из этого перечня мы видим, что понятие непрерывных пространственных групп введено впервые Жорданом во второй половине XIX в. Но последний был чистым математиком и потому сам не мог оценить того значения, которое могла бы иметь его работа для кристаллографии и физики. В свою очередь кристаллографы не обратили должного внимания на работу Жордана и после работы Федорова и Шенфлиса продолжали заниматься отделкой деталей созданного ими грандиозного здания. Таковы работы Александра, Херманна, Херрманна, Хееша, Вебера, Ниггли, Вейссенберга, Хильтона, Шибольда, Поляна, Гюнцбурга и многих других, не исключая и самих Федорова и Шенфлиса. Блестящее открытие Лауэ дифракции рент-

реновых лучей кристаллами, подтвердившее атомистическую теорию строения кристаллов Федорова и Шенфлиса, казалось, окончательно отвлекло внимание исследователей от пути, начатого Жорданом. Возникла новая наука — рентгенография кристаллов, объединившая в себе тысячи исследований по атомистическому строению кристаллов. По мере расширения этой науки в область ее исследований стали проникать сначала кристаллические порошки, далее жидкости, волокнистые структуры, жидкие кристаллы и т. д., т. е. такие среды, которые, по крайней мере статистически, можно было рассматривать как среды непрерывные. От отрицания непрерывности рентгенология пришла к отрицанию этого отрицания.

Следующим неизбежным этапом развития геометрической кристаллографии должен быть вывод непрерывных групп обоих родов, т. е. групп движений и групп движений с зеркальными отражениями. Этой задачей довелось заняться нам. С разрешением этой задачи геометрическая кристаллография вступает на уготованный ей историей путь для того, чтобы далее стать геометрией анизотропных сред непрерывных или прерывных — все равно. Ставши на этот путь, геометрическая кристаллография теснейшим образом сливается с геометрией, с кристаллографией физической, а через нее с физикой и химией вообще.

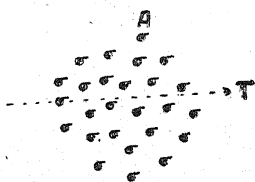
В настоящем докладе я постараюсь в самых общих чертах охарактеризовать учение о непрерывных однородных средах, не вдаваясь в доказательство относящихся к нему теорем. Как и всякая другая геометрия, теория непрерывных сред может быть одномерной, двумерной, трехмерной и т. д. Нас сейчас будет интересовать только трехмерная геометрия; изложение мы начнем с определения элементов пространства — точки. Под точкой мы будем понимать то же, что понимают под этим термином в эвклидовой геометрии; только мы лишим эвклидову точку ее неизменного и всегда молчаливо приписываемого ей атрибута — шаровой симметрии. Нашим точкам мы будем приписывать все возможные мыслимые симметрии — симметрии точечных групп. Вместо самого разумного для эвклидовой геометрии способа изображать точки шариками (или для плоскости кружочками) мы будем применять способ изображения точек маленькими многогранниками, а для плоскости — многоугольниками, ни на одну минуту не забывая, что размеры наших многогранников бесконечно малы. Можно также понимать под нашей точкой просто некую совокупность элементов симметрии, пересекающихся в эвклидовой точке (точечная группа элементов симметрии), отчего последняя, конечно, уже перестает быть обыкновенной эвклидовой точкой.

Чтобы окончить с определением точки, заметим, что элементы симметрии точки мы мыслим себе одновременно как элементы симметрии самой среды, ибо, коль скоро окружающие данную точку другие точки распределены около данной точки по законам, не отвечающим симметрии данной точки, то и данная точка меняет приписываемую ей симметрию. Отсюда отнюдь нельзя утверждать обратного, а именно, что все элементы симметрии среды должны содержаться среди элементов симметрии точек, ибо существуют элементы симметрии, присущие исключительно бесконечным фигурам (оси трансляций T_n , винтовые оси L_n^t , плоскости скользящего отражения P_t^t), а непрерывная среда мыслится нами в противоположность точкам как фигура беспредельно большая. Итак, с одной стороны, мы лишили точки их неизменности, с другой — отказались рассматривать их вне зависимости от других точек.¹ Далее мы ограничили себя, из соображений экономии мысли и целесообразности, рассмотрением исключительно однородных непрерывных сред, понимая под ними такие среды, которые сплошь состоят из равноценных точек или, иначе, точек одинаковой симметрии. После этих предположений наша проблема формально математически может быть сформулирована следующим образом. Мы желаем найти, описать и классифицировать все такие непрерывные среды, которые удовлетворяют требованию однородности и непрерывности. Так как наши точки являются для непрерывных сред такими же структурными элементами, как узлы пространственных решеток являются структурными элементами решеток, то нашу задачу мы можем рассматривать как задачу изучения всевозможных структур непрерывных сред. Это формально, а по существу мы ставим себе целью дать теорию структуры таких встречающихся в природе непрерывных однородных или статистически однородных средин, которые не укладываются в понятие пространственных решеток или правильных систем точек.

Мы не будем излагать здесь полного вывода всех случаев симметрии однородных сред; этот вывод хотя и схематически, но до конца сделан и опубликован в *Zeitschrift für Kristallographie* 72, 271, 1929; и 73, 430, 1930. Мы ограничимся указанием того пути, которым мы при этом шли. Возьмем произвольную точку A , лишенную какой-либо симметрии. Формально такая точка, как и всякая асимметрическая фигура обладает бесконечным множеством произвольно направленных осей симметрии первого

¹ В этой реформе понятия евклидовой точки содержится наша основная идея вывода однородных непрерывных сред. В цитированных ниже немецких работах идея эта умышленно была скрыта нами в математических символах и в совершенно явной форме высказывается здесь впервые.

порядка, ибо, поворачивая такую фигуру около произвольной прямой на угол в 360° , мы приводим фигуру в совмещение с ней самой. Симметрия нашей точки, следовательно, относится к 32 классу симметрии кристаллов и обозначается C_1 (цифлическая симметрия с осями 1-го порядка). Подвергнем теперь нашу точку всевозможным непрерывным трансляциям параллельно трем произвольно выбранным и не лежащим в одной плоскости осями трансляций (T'''). При этих условиях наша точка побывает во всех точках пока еще евклидова пространства и сообщит им по нашему приказанию свою собственную симметрию. Теперь евклидово пространство нами превращено в однородную непрерывную среду, которую мы обозначим

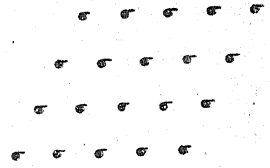


Фиг. 2.

в соответствии с методом ее получения $C_1 T'''$. Для того, чтобы понять всю глубину различия выведенной нами непрерывной среды от евклидова пространства и от соответствующего нашему случаю кристаллографической группы Шенфлиса C_1^1 , обратимся к рассмотрению двумерной статистической модели нашей среды (фиг. 2). Исходная точка A изображена здесь запятой, чтобы показать отсутствие в ней элементов симметрии;

припишем далее запятой «лицо» и «изнанку», чтобы не возникало никаких сомнений относительно отсутствия в ней плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью чертежа. Кроме этой точки A изобразим на плоскости множество других равноценных ей точек, которые также обозначим запятыми, тождественными первой и расположенными ей параллельно. Плотность распределения точек или количество точек, приходящихся на единицу поверхности, пусть будет во всех местах постоянна, или, если уже быть совсем строгим, пусть эта плотность меняется от места к месту, следуя закону распределения Гаусса. Пусть далее наши структурные единицы и средние расстояния между ними будут так малы, что мы не в состоянии исследовать их индивидуально, но можем получать только суммарные впечатления от их бытия. Покажем, что при этих данных наша среда может служить прекрасной моделью двумерной анизотропной однородной и непрерывной среды. Представим себе, что некоторое существо движется в нашей среде вдоль оси T_1 по стрелке, встречая на своем пути множество запяток со стороны их выпуклости. Наше существо получит от этих встреч некоторое суммарное ощущение; если теперь то же существо пойдет обратно, то впечатление его от встреч с запятыми будет уже иным, ибо оно будет встречаться постоянно только с острыми концами запяток. Для нашего существа среда будет поэтому анизотропной. Так как очень малых расстоя-

ний наше существо, по условию, оценивать не может, то среда будет представляться ему вполне непрерывной; а так как количество встреч с запятыми в единицу времени при постоянной скорости движения нашего существа будет тоже постоянным, то среда будет для него вполне однородной. Мы видим теперь в чем состоит разница между нашим пространством и пространством Эвклида. Эвклидово пространство однородно и изотропно; наше — однородно и анизотропно. Эвклидово пространство только частный случай наших сред. Отличие наших сред от «кристаллографических» сред Шенфлиса и Федорова более тонко и требует особого рассмотрения. Представим себе плоскую сетку (фиг. 3), составленную из тех же запятых, но в предположении, что элементарные трансляции теперь не бесконечно малы. Если сохранить все предыдущие условия, то наше существо, очевидно, не найдет разницы между обоими пространствами: в обоих случаях пространство будет для него вполне непрерывным и анизотропным. Для того же, чтобы установить эту разницу необходимо применить иной метод. В данном



Фиг. 3.

случае следовало бы применить, напр., такой метод, который был бы аналогичен исследованию кристаллов рентгеновыми лучами; тогда разница вскрылась бы со всей очевидностью. Наша среда вела бы себя как жидкий кристалл, а «кристаллографическая» — как обыкновенный кристалл. Из этого примера мы видим, что подобно тому как нельзя мыслить себе вещь, как «вещь в себе», т. е. вне зависимости ее от других вещей и от нас самих, так в равной мере нельзя говорить о среде «вообще», т. е. вне зависимости от того метода, которым среда изучается.

Мы получили первый случай непрерывных анизотропных сред, подвергая точку, обладающую симметрией C_1 , непрерывным трансляциям около трех, не лежащих в одной плоскости, осей. Совершенно таким же образом можно получить из всякой другой точки с иной симметрией другие пространства. В таблице 2 даны все такие точечные группы, выведенные Гесселем в 1830 г. Если обозначим в общем виде симметрию исходной точки символом группы G , то символ выводимой из нее путем непрерывных трансляций пространственной группы будет GT''' . Число точечных групп G , выведенных Гесселем, бесконечно велико, следовательно и однородных непрерывных пространственных групп существует также бесконечное множество.

Но подвергать точечную группу непрерывным трансляциям около трех осей — не единственный прием вывода непрерывных групп.

Точечные группы

Название точечных групп	Тип А	Тип В	Элементы симметрии
Циклические	C_n	C_∞	$L_n; L_\infty$
Двудрические	D_n	D_∞	$L_n n L_2; L_\infty \infty L_2$
Тетраэдрическая	T	—	$3L_2 4L_3$
Октаэдрическая	O	—	$3L_4 4L_3 6L_2$
Икосаэдрическая	I	—	$6L_5 10L_3 15L_2$
Шаровая	—	K	∞L_∞
Циклические	S_{2n}	—	\bar{L}_{2n}
		C_n^h	C_∞^h
Двудрические	C_n^v	C_∞^v	$L_n n P; L_\infty \infty P$
		D_n^h	D_∞^h
Тетраэдрические	D_n^d	—	$L_n n L_2 n P$
		I^d	—
Октаэдрическая	T^h	—	$3L_2 4L_3 3PC$
		O^h	—
Икосаэдрическая	I^h	—	$6L_2 10L_3 15L_2 15PC$
Шаровая	—	K^h	$\infty L_\infty \infty PC$

Примечание: $n > 0$ — целое число; h — горизонтальная плоскость симметрии; v — вертикальные плоскости симметрии; d — диагональные плоскости симметрии.

Математическое исследование этого вопроса показывает, что так называемые циклические C_n и двудрические D_n точечные группы дают также непрерывные пространственные группы, если мы подвергнем их сначала непрерывным трансляциям около двух координатных осей и затем винтовому движению параллельно третьей оси перпендикулярной к плоскости трансляций.

Совокупность таких тройных операций мы обозначаем символом $T''L'$, а два бесконечных ряда новых пространственных групп — символами $C_n T''L'$ и $D_n T''L'$. Наконец к этому многообразию пространственных групп мы должны прибавить еще одну, стоящую совершенно особняком группу, возник-

¹ При нечетном n в этой формуле отсутствует C .

Из этой таблицы мы видим, что существует всего 9 бесконечных рядов пространственных групп: 1) $C_n T'''$, 2) $D_n T'''$, 3) $S_{2n} T'''$, 4) $C_h T'''$, 5) $C_n^h T'''$, 6) $D_n^h T'''$, 7) $D_n^d T'''$, 8) $C_n T''' L'$ и 9) $D_n T''' L'$ и 10 особенных групп: 1) TT''' , 2) OT''' , 3) JT''' , 4) KT''' , 5) $T^d T'''$, 6) $T^h T'''$, 7) $O^h T'''$, 8) $J^h T'''$, 9) $K^h T'''$, 10) L''' . Сравнивая мир непрерывных групп с миром групп прерывных, коих существует, как известно, всего 230, мы видим, что первый мир в бесконечное число раз более разнообразен, чем второй.

Нам надлежит теперь показать, в какой мере выдуманый нами новый мир пространств отвечает действительному и какое, в частности, отношение наши «некристаллографические» пространства имеют к кристаллам. Начнем с простейшего случая. Дан кристалл кубической системы, напр., каменная соль. Нас интересует симметрия этого кристалла в отношении скорости распространения света внутри него. Чтобы определить эту симметрию, вообразим себе внутри кристаллической среды светящуюся точку. Так как скорость света по всем направлениям в каменной соли одинакова, и сами лучи имеют цилиндрическую симметрию, то выбранная нами точка должна иметь симметрию шара, а так как точка может быть выбрана совершенно произвольно, то среда непрерывна. Отсюда искомая симметрия среды есть $K^h T'''$ или, просто, симметрия эвклидова пространства. Мы разобрали здесь всем хорошо известный факт, но осветили его совершенно иначе, чем это делалось до сих пор, показав, что явления кристаллооптики могут быть описываемы в терминах геометрической кристаллографии, что «некристаллографическая» (по Шенфлису) симметрия свойственна кристаллам.

Следующие примеры должны показать это ещё лучше. Возьмем опять кристалл кубической системы, но обладающий способностью вращать плоскость поляризации, напр., NaClO_3 . Если в данном случае вопрос будет идти опять о скорости света, то симметрия NaClO_3 будет та же — $K^h T'''$. Если же нас будет интересовать отношение кристаллического вещества к поляризованному монохроматическому свету, то симметрия среды будет иной. В самом деле, возьмем произвольную точку внутри кристалла и опишем около нее сферу определенного радиуса и будем исследовать симметрию этой сферы, пропуская через нее тонкий лучок поляризованных лучей по всевозможным направлениям, но обязательно так, чтобы этот лучок проходил через центр сферы. Во-первых, мы увидим, что при прохождении лучей через кристалл плоскость поляризации всегда будет поворачиваться, напр., вправо независимо от направления луча на один и тот же угол. Отсюда следует, что наша точка не имеет плоскостей сим-

метрии. Во-вторых, поворачивая шар около луча на любой угол, мы не заметим никакого влияния этих поворотов на поляризованный луч; это означает, что всякий луч есть ось симметрии бесконечного порядка. Отсюда следует, что наш шар имеет симметрию группы K . Шар, отвечающий группе K , не имеет плоскостей симметрии в отличие от шара K^h , который имеет бесконечное множество плоскостей симметрии. Значит ли это, что центр шара обладает той же симметрией. Нет, не всегда, ибо при таком способе рассмотрения, т. е. при анализе симметрии конечных фигур, нельзя отличить простые оси симметрии бесконечного порядка от винтовых осей симметрии бесконечного порядка. Если бы оси оказались простыми (не винтовыми), то симметрия точки была бы K , а соответствующая пространственная группа была бы KT''' . В противном случае среда должна быть причислена к группе L''' , как единственной, которая содержит бесконечное множество винтовых осей бесконечного порядка всевозможных направлений. Итак остается решить вопрос, являются ли оси винтовыми или простыми. Если данная среда обладает винтовыми осями бесконечного порядка, то в ней существуют вполне определенные конечные трансляции, равные «ходу» винтовых осей. Если речь идет о вращении плоскости поляризации, то этот «ход» имеется налицо в виде тех отрезков пути луча, при которых плоскость поляризации поворачивается на 360° . Эти отрезки, которые можно было бы назвать трансляциями вращения плоскости поляризации, суть обратные величины так называемой вращательной способности кристалла, измеряемой углом поворота плоскости поляризации при прохождении лучом пути в один миллиметр внутри кристалла. Итак вопрос о симметрии NaClO_3 по отношению к явлению прохождения через него поляризованных лучей решен — соответствующая группа есть L''' . Мы нарочно остановились здесь так подробно на этом случае потому, что группы K и L''' являются особенно трудными для понимания. Этим, вероятно, объясняется почему даже в настоящее время находятся лица из среды специально занимающихся кристаллографией, для которых сам факт существования этих групп представляется не доказанным, и это несмотря на то, что группа K была установлена Гесселем в 1830 году и вторично открыта через пятьдесят лет Пьером Кюри, а группа L''' была введена Жорданом в 1868 г. Между тем представить себе шар без плоскостей симметрии (группа K), по существу не труднее, чем представить себе куб без плоскостей симметрии (кубические кристаллы сильвина с косыми фигурами вытравления). В равной мере представить себе пространство, «заполненное» бесконечно тонкими и бесконечно длинными винтиками, расположенными своими осями по всевозможным направлениям,

не сложнее, чем представить себе обыкновенное евклидово пространство, состоящее из бесконечного множества «цилиндрических прямых».

Переходим теперь к кристаллам одноосным, не вращающим плоскость поляризации. Нет особой надобности доказывать, что каждая точка такого кристалла в отношении оптических явлений имеет симметрию эллипсоида вращения или иначе симметрию группы D_{∞}^h . Соответствующая пространственная группа будет $D_{\infty}^h T'''$.

Одноосные кристаллы, вращающие плоскость поляризации, имеют совершенно иную симметрию. Прежде всего рассуждением, аналогичным тому, которое имело место по отношению к кристаллам кубической системы, вращающим плоскость поляризации, легко установить наличие винтовых осей, параллельных оптической оси. Далее, из того обстоятельства, что винтовые оси эти не полярны, следует, что в среде содержатся оси 2-го порядка, перпендикулярные винтовым осям. В результате имеем для нашей среды группу $D_1 T'' L'$.

Далее укажем, что симметрия двуосных кристаллов, не вращающих плоскость поляризации, соответствует группе $D_2^h T'''$; это означает, что каждая точка нашей среды обладает тремя взаимноперпендикулярными осями симметрии второго порядка, тремя плоскостями симметрии, проходящими через эти оси, и центром симметрии или иначе принадлежат к голоэдрии ромбической системы.

До сих пор мы приводили примеры того, как следует определять симметрию кристаллов в отношении тех или иных явлений, которые в нем происходят, причем никаких особых последствий из этого не вытекало. Мы не могли предсказывать как должно протекать явление, если кристалл будет иметь ту или иную симметрию. На следующем примере мы покажем, как такие предсказания могут делаться. Возьмем двуосный кристалл, вращающий плоскость поляризации. Его оптическая симметрия будет $D_2 T'''$. Оптические оси кристалла не являются в данном случае винтовыми осями симметрии, ибо наличие двух таких пересекающихся осей требует присутствия бесконечного множества винтовых осей всевозможных направлений, что противоречит условию. Но если оптические оси не являются в данном случае винтовыми осями, то угол вращения плоскости поляризации не пропорционален пройденному лучом пути. Этот вывод можно сочетать с однородностью кристалла только единственным образом: необходимо допустить, что приращение угла вращения, отвечающее одному и тому же приращению пути луча, меняется периодически по тому или иному закону в пределах между двумя определенными положительными величинами. Проверка этого пред-

сказания, очевидно, будет и проверкой самой теории. К сожалению в настоящее время мы не располагаем достаточно точными методами измерения угла вращения плоскости поляризации, поэтому такая проверка есть дело будущего.

До сих пор мы говорили только об оптических свойствах кристаллов, но кристалл ведет себя как непрерывная среда также и в отношении многих других физических явлений; в частности упругие свойства кристаллов можно рассматривать как свойства непрерывных сред. Так для кристаллов кубической системы явления упругости имеют симметрию $O^h T'''$, для кристаллов тетрагональной системы — симметрию $D_4^h T'''$ и т. д.

Теперь мы переходим к рассмотрению симметрии таких сред, которые не могут быть причислены к кристаллам, но и не могут рассматриваться как аморфные тела. К такого рода телам принадлежат, как известно, так называемые жидкие кристаллы. Оптические свойства жидких кристаллов вполне отвечают оптическим свойствам одноосных кристаллов, поэтому соответствующая пространственная группа будет $D_{\infty}^h T'''$. С точки зрения теории симметрии к этой же категории сред должны быть отнесены многие природные тела волокнистой структуры, как то: шелк, нервы, мускулы, волосы, рог и т. д. По поводу некристаллических, но явно симметрических образований, встречающихся в растительном и животном мире, нам хотелось бы здесь высказать одно априорное соображение, напрашивающееся само собой. Всем хорошо известно, что в определенных случаях полезно и даже совершенно необходимо рассматривать кристаллы как среды прерывистые или как системы правильных систем точек — атомов. Вписанные в пространственные решетки атомы и молекулы таких кристаллов неизбежно, в силу только одной геометрической необходимости, должны обладать так называемой кристаллографической симметрией, запрещающей пятерные оси симметрии и оси симметрии порядка выше шести. Между тем, это запрещение отнюдь не распространяется на атомы и молекулы, не связанные в кристаллические решетки. Наоборот, мы имеем все основания допускать, хотя бы из периодического закона, что пятерная и семерная симметрия молекул является вполне допустимой для молекул, находящихся в жидкостях и газах. Далее мы не имеем никаких оснований лишать наши молекулы присущего всем молекулам свойства при известных условиях, напр., при понижении температуры, стремиться к образованию «жестких» структур. Затем мы ни в коем случае не можем взять на себя смелость утверждать, что всякая молекула с некристаллографической симметрией может быть «втиснута» в ту или иную пространственную решетку и тем

самым может быть лишена присущей ей симметрии. Гораздо естественнее предположить, что по меньшей мере иногда этого сделать нельзя. Но какие же «жесткие» структуры в таком случае могут образовать эти молекулы? Очевидно это будут или вполне аморфные среды или среды статистически анизотропные по терминологии Вейссенберга. В последнем случае пятерная или иная некристаллографическая симметрия молекул будет присуща и всей среде. Морские звезды, цветы и многие другие представители живой природы наилучшим образом отвечают высказанным нами выше соображениям. Подобно тому как внешняя форма кристаллов отображает решетчатую их структуру, так равно и внешняя форма организмов отображает их статистическую анизотропию. Здесь мы должны со всей определенностью отмежеваться от той многочисленной группы ученых, совершенно не знакомых с кристаллографией, но почему то очень любящих или ссылаться на нее, когда она им полезна, или критиковать ее тогда, когда по их мнению она им неприятна, — ученых, слишком далеко заходящих в аналогиях между живыми организмами и кристаллами. Необходимо помнить, что кристалл в первую очередь есть однородная среда и лишь в самую последнюю очередь — организованный индивидуум; организм есть в первую очередь индивидуум и лишь в самую последнюю очередь среда, в которой лишь самые незначительные части могут рассматриваться как однородные среды. Кристаллографическому изучению в духе изложенной теории поэтому в первую очередь подлежат лишь ткани организмов или зародышевые организмы; последние уже изучаются с этой точки зрения немецким минералогом Ринне.

К анизотропным однородным средам относятся также кристаллы и аморфные тела с наведенной анизотропией, например, растянутые или сжатые желатина, резина и т. д. В оптическом отношении такие среды ничем не отличаются от одноосных кристаллов (группа $D_{\infty}^h T'''$). Кристаллооптику поэтому правильнее было бы называть оптикой анизотропных однородных сред. Опыт показывает, что цилиндр, изготовленный из желатины и подвергнутый кручению около своей оси, в оптическом отношении не отличается от одноосных кристаллов, вращающих плоскость поляризации, напр., от кварца. Соответствующая группа для таких сред будет поэтому $D_1 T'''$.

Примером кристаллов с наведенной анизотропией может служить подвергнутая кручению каменная соль. Оптические свойства ее будут совпадать с оптическими свойствами закрученной желатины.

Наведенная анизотропия может быть сообщена аморфным и кристаллическим телам не только чисто механическим на них воздействием, но и

инными путями. Так, помещая стекло в однородное электрическое поле, мы делаем его анизотропным с симметрией группы $O_{\infty}^v T^m$. В этой группе отсутствуют центры симметрии. Известно, что кристаллы, не имеющие центра симметрии, пьезоэлектричны, поэтому мы вправе ожидать, что и аморфные тела в этих условиях будут пьезоэлектричны. Мы говорим «ожидать» потому, что утверждать этого только из кристаллографических соображений ни в коем случае нельзя. Опыты Мейсснера и наши показали, что это явление на самом деле имеет место. Совершенно так же можно «ожидать», что аморфное тело или оптически изотропный кристалл, находящиеся в однородном электрическом поле, будут обладать двойным лучепреломлением. Всем хорошо известно, что это ожидание оправдывается в так называемом явлении Керра. С равным правом можно ожидать, что аморфное тело, напр., стекло, помещенное в поле световых рентгеновых или гамма-лучей, будет пьезоэлектрично. Так ли оно происходит на самом деле, решит опыт, который, сколько нам известно, до сих пор сделан не был.

До сих пор в наших примерах фигурировали исключительно материальные среды: кристаллы и аморфные тела; между тем в природе существует большое разнообразие не материальных, а энергетических анизотропных сред. Таковы, например, однородное электрическое поле, рассматриваемое как совокупность силовых трубок и обладающее симметрией $O_{\infty}^v T^m$, и поле световых лучей, имеющее ту же симметрию. Главные оси обеих полей полярны. Магнитное поле, рассматриваемое как совокупность амперовых токов, имеет симметрию $O_{\infty}^h T^m$. В отличие от электрического поля магнитное поле не обладает плоскостями симметрии, параллельными главной оси, но обладает плоскостями симметрии, перпендикулярными главной оси. Поле поляризованных лучей, рассматриваемое как совокупность бесконечно тонких лент с условием, что в них можно различать направление «вперед» и «назад», обладает симметрией $C_2^v T^m$. Ось симметрии второго порядка в этом поле совпадает с направлением лучей и является полярной осью. Можно было бы привести большое количество примеров энергетических анизотропных полей, но и сказанного вполне достаточно для того, чтобы составить себе об этом предмете вполне ясное представление.

Чтобы вполне закончить рассмотрение анизотропных однородных сред, отметим еще одну в высшей степени интересную их категорию; я разумею средину из двух или нескольких энергетических полей. Пользуясь теорией сочетаний, можно придумать весьма большое количество таких полей. Так, например, комбинируя магнитное поле с полем поляризованных лучей, получим новое поле с симметрией $C_2 T^m L'$, до сих пор в наших примерах не

встречавшееся и вполне отвечающее симметрии явления магнитного вращения плоскости поляризации. В отличие от однородных кристаллов, вращающих плоскость поляризации, наша комбинированная среда обладает осью, концы которой отличаются друг от друга как предмет и его зеркальное изображение. Если луч света идет по направлению поля, то плоскость поляризации поворачивается вправо; если луч направлен в противоположную сторону, то плоскость поляризации поворачивается влево.

На этом мы заканчиваем рассмотрение непрерывных групп. Однако этими группами и 230 группами прерывных сред не исчерпывается все многообразие однородных трехмерных пространств. Можно представить себе такие трехмерные среды, которые вполне непрерывны по одним направлениям и прерывны по другим. Мы поставили себе задачей вывести все такие «гибридные» группы, при чем оказалось, что все эти группы могут быть получены из так называемых сеточных и цепочечных групп. Под сеточными группами разумеют двумерные прерывистые группы, выведенные Ц. Херманном. Цепочечные группы выведены Александром и Херрманном. Сеточных групп оказалось 80, а цепочечных — бесконечное множество. Примером фигуры, обладающей симметрией сеточных групп, могут служить рисунки обоев, тканей и т. д. в том, однако, случае, если повторяющиеся вдоль одной плоскости фигуры сами по себе не двумерны, а трехмерны. Примером фигуры, обладающей симметрией цепочечных групп, может служить цепочка из колец, нить одинаковых бус, бордюры обоев и т. д. Математическое исследование поставленного нами вопроса показало, что из каждой сеточной и цепочечной группы можно получить всего одну пространственную гибридную группу. Для этого сеточные группы N нужно подвергнуть одной непрерывной трансляции T' , а цепочечные группы R следует подвергнуть двум непрерывным трансляциям T'' . Символы гибридных групп поэтому будут NT' и RT'' . Можно при желании привести множество примеров гибридных средин; мы ограничимся, однако, только наиболее характерными. Стопа бумаги прерывиста в направлении, перпендикулярном к листам, и непрерывна во всех направлениях в плоскости листа. Символ ее группы будет $D_{\infty}^h(T_{\alpha}T'')$. Представим себе теперь среду, сложенную из пластин трех сортов: A, B, C . Если эти пластины расположены в порядке $ABCABCABC\dots$, то система обладает симметрией групп $C_{\infty}^h(T_{\alpha}T'')$. Ось симметрии бесконечного порядка в данном случае полярна, ибо направление $ABCAB\dots$ отличается от противоположного направления $CBACB\dots$. Надо ожидать, что материальные средины этого порядка так или иначе могут проявлять свою полярность. Так обще-

известен факт, что столбики, составленные из чередующихся слоев двух металлов и жидкости, заряжены по концам электричеством противоположных знаков. Надо думать также, что тонкослойные изоляторы, составленные из трех диэлектриков, будут пьезоэлектричны. К гибридным же пространствам должно быть отнесено поле стоячих звуковых, световых и других волн. Три взаимноперпендикулярных поля стоячих волн образуют пространственную решетку, не отличающуюся по симметрии от решетки кристалла кубической системы, и являются в совокупности как бы энергетической моделью материального кристалла. На этом мы заканчиваем обзор «некристаллографических» однородных сред и приводим ниже выводы из всего изложенного.

1. Геометрическая кристаллография вступает во второй фазис своего исторического развития, характеризуемый усиленным интересом к идее непрерывности, в противовес господствовавшему ранее направлению рассматривать кристалл исключительно как среду прерывистую.

2. Чем скорее кристаллография пройдет этот фазис своего развития, тем скорее будет создана новая кристаллография на основе синтеза обеих точек зрения.

3. Понятие непрерывности кристаллических и некристаллических сред требует усовершенствования основных понятий геометрии. Точка лишается ее универсальной шаровой симметрии и ставится в зависимость от окружающих ее точек.

4. Симметрия непрерывных и гибридных сред бесконечно разнообразнее симметрии прерывистых сред.

5. Нельзя говорить о симметрии кристалла «вообще», т. е. безотносительно к тому или иному явлению.

6. Симметрия кристаллов в такой же мере соответствует симметрии непрерывных как и прерывных групп.

7. Статистически непрерывные группы могут быть описываемы в терминах непрерывных групп.

8. Непрерывные и гибридные среды могут быть материальными, энергетическими и смешанными.

9. Изучение симметрии сред помогает предсказанию новых физических явлений.

10. Симметрия организмов включается в число объектов изучения кристаллографии.